

فضاهای برداری و ریاضیات مکانیک کوانتومی

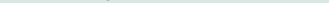
نمادگذاری دیراک در مکانیک کوانتومی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- 
 فضاهاى بردارى و رياضيات مكانيك کوانتومى
 حسين شناور

۱ نمادگذاری دیراک در مکانیک کوانتومی

نمادگذاری دیراک

فضای حالت سیستم کوانتومی: کت و برا

نمادگذاری دیراک - نمادگذاری براکت

• بیشتر آنچه تاکنون بحث شده است را می توان به وضوح با استفاده از نمادگذاری براکت دیراک (Bra – ket notation) نمایش داد.

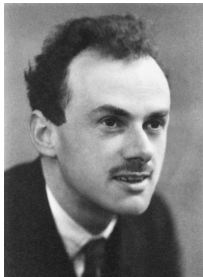
• دیراک پیشنهاد کرد که به جای نوشتن یک تابع به صورت f می توان آن را با نیمه سمت راست یک براکت $\langle | \rangle$ نمایش داد: $\phi_1 \rightarrow |\phi_1\rangle$ $f \rightarrow |f\rangle$

همچنین، مزدوج مختلط یک تابع یعنی f^* را می توان با نیمه سمت چپ یک براکت $\langle | \rangle$ نمایش داد: $\phi_1^* \rightarrow \langle \phi_1|$ $f^* \rightarrow \langle f|$

به علاوه، وقتی براکت در کنار هم قرار می گیرند، نتیجه را به عنوان ضرب داخلی دو تابع خواهیم شناخت. دقت کنید که یکی از خط های عمودی در این حالت حذف می شود:

$$\langle f | g \rangle \rightarrow \langle f | g \rangle$$

هرچند، قرار دادن این دو تابع با ترتیب معکوس $|f\rangle \langle g|$ نشان دهنده یک عملگر است که خود می تواند بر روی توابع دیگر مانند $|h\rangle$ عمل کند $|i\rangle = |f\rangle \langle g| |h\rangle$ و نتیجه هم یک تابع دیگر است.



یک کاربرد زیبا از نمادگذاری دیراک

به عنوان یک مثال ابتدایی از کاربرد نمایش براکت دیراک، بسط یک تابع دلخواه را در نظر بگیرید:

$$|f\rangle = \sum_j a_j |\varphi_j\rangle = \sum_j |\varphi_j\rangle \langle \varphi_j | f \rangle = \left(\sum_j |\varphi_j\rangle \langle \varphi_j| \right) |f\rangle$$

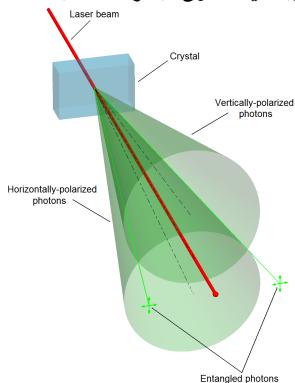
رابطه بالا در صورتی درست است که پایه های $|\varphi_1\rangle$ یک مجموعه کامل توابع پایه را تشکیل دهند. مفهوم این رابطه این است که بردار $|f\rangle$ را می توان به صورت یک سری از مولفه ها در جهت بردارهای پایه $|\varphi_1\rangle$ تجزیه کرد.

هرچند، موجود $\sum_j |\varphi_j\rangle \langle \varphi_j|$ وقتی بر روی تابع $|f\rangle$ اثر می کند،

حاصل آن تابع $|f\rangle$ است. پس این موجود باید برابر با عملگر همانی باشد.

$$1 = \sum_j |\varphi_j\rangle \langle \varphi_j|$$

این رابطه در محاسبات مکانیک کوانتومی بسیار مفید خواهد بود.



نمایش ماتریسی نمادگذاری دیراک

- نمادگذاری براکت دیراک برای نمایش بردارها و ماتریس ها نیز بسیار مفید خواهد بود. در حالت کلی در این نمادگذاری کت ها معادل با بردارهای ستونی و براها معادل با بردارهای سطری هستند. دقت کنید که $\langle A|$ فقط ترانهاده $|A\rangle$ نیست، بلکه الحاقی آن است.

$$\langle A| \doteq (A_1^* \quad A_2^* \quad \cdots \quad A_N^*)$$

$$|B\rangle \doteq \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \end{pmatrix}$$

- ضرب داخلی این دو بردار نیز به صورت زیر تعریف می شود که حاصل آن یک اسکالر است.

$$\langle A|B\rangle \doteq A_1^* B_1 + A_2^* B_2 + \cdots + A_N^* B_N = (A_1^* \quad A_2^* \quad \cdots \quad A_N^*) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \end{pmatrix}$$

- و البته از ضرب یک کت در یک برا می توان یک عملگر (یک ماتریس) ساخت.

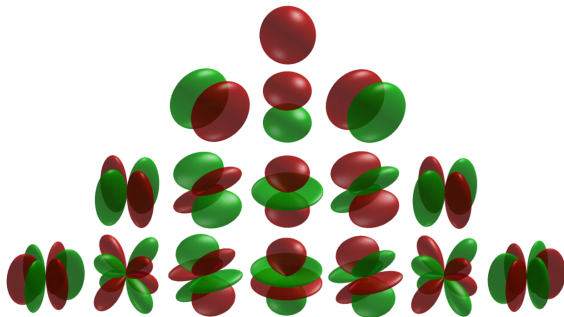
$$|\phi\rangle \langle\psi| \doteq \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} (\psi_1^* \quad \psi_2^* \quad \cdots \quad \psi_N^*) = \begin{pmatrix} \phi_1 \psi_1^* & \phi_1 \psi_2^* & \cdots & \phi_1 \psi_N^* \\ \phi_2 \psi_1^* & \phi_2 \psi_2^* & \cdots & \phi_2 \psi_N^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_N \psi_1^* & \phi_N \psi_2^* & \cdots & \phi_N \psi_N^* \end{pmatrix}$$

حالت سیستم کوانتومی چطور توصیف می شود؟

در مکانیک کلاسیک عملاً می توان با استفاده از سرعت و موقعیت اولیه و دانستن نیروهای وارده بر ذره، مسیر حرکت ذره را با دقت دلخواه تعیین کرد:

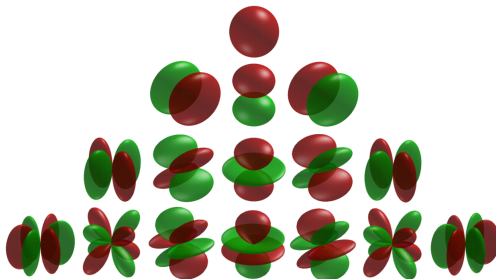
$$a = 1/m \sum F \xrightarrow{\text{integrate}} v \xrightarrow{\text{integrate}} x$$

در مکانیک کوانتومی چنین چیزی درست نیست و نمی توان موقعیت و تکانه ذره را با دقت نامحدود مشخص کرد. در عوض ما از حالت کوانتومی سیستم صحبت می کنیم و در انتها نیز می توانیم از "احتمال وجود ذره در یک حالت مشخص پس از یک زمان مشخص" صحبت کنیم.



حالت سیستم کوانتومی چطور توصیف می شود؟

- تابع حالت توصیف کننده سیستم می تواند، بسته به فیزیک سیستم، شامل پارامترهای موقعیت، اسپین، تکانه زاویه ای و ... و یا همه اینها باشد. بنابراین، توصیف حالت کوانتومی سیستم در حالت کلی چندان ساده نیست. ولی می توان نشان داد که ریاضیات خاصی (که همان جبر خطی فضای هیلبرت است) می تواند حالت های کوانتومی را به خوبی توصیف کند.
- حالت کوانتومی توصیف کننده سیستم را کت ket سیستم می نامیم. به عنوان یک اصل موضوعه می پذیریم که کت سیستم "شامل تمام اطلاعات معنی دار سیستم کوانتومی" مورد نظر است. در ادامه ویژگی های ریاضیاتی کت ها را توضیح خواهیم داد.
- فعلا می توانید کت ها را به صورت ماتریس های ستونی و برا ها را به صورت ماتریس های سطری تصور کنید.



ویژگی های کت

• دو کت را می توان با هم جمع کرد و نتیجه نیز یک کت خواهد بود:

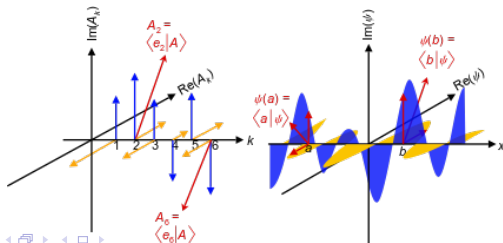
$$|\gamma\rangle = |\alpha\rangle + |\beta\rangle$$

• حاصلضرب یک کت و یک عدد مختلط نیز یک کت است. همچنین فرقی نمی کند که ضریب $c \in \mathbb{C}$ در جلو و یا پشت کت قرار گیرد:

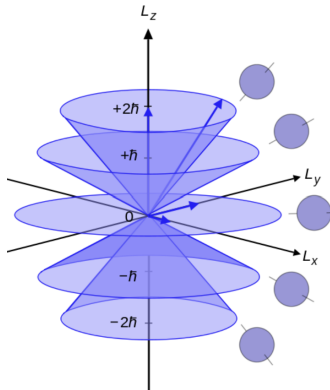
$$c |\alpha\rangle = |\alpha\rangle c$$

اگر ضریب c صفر باشد آنگاه یک کت تهی (صفر null) تولید خواهد شد.

• یک اصل موضوعه دیگر مکانیک کوانتومی این است که کت های $|\alpha\rangle$ و $c |\alpha\rangle$ (به شرط $c \neq 0$) هم ارز هستند؛ یعنی این دو کت حالت های فیزیکی یکسانی را توصیف می کنند. در این حالت می گوییم که جهت کت (و نه اندازه آن) اهمیت دارد.



مشاهده پذیرها



در مکانیک کوانتومی مشاهده پذیرها (مانند موقعیت، تکانه، اسپین و ...) را با عملگرهایی مانند A که بر روی فضای حالت عمل می کنند نشان می دهند. در حالت کلی، عملگرها از سمت چپ بر روی کت ها عمل می کنند و حاصل نیز یک کت خواهد بود:

$$A \cdot (|\alpha\rangle) = A|\alpha\rangle$$

درباره ذات این ضرب و ویژگی های آن در ادامه بیشتر خواهیم دید.

عموما، حاصلضرب $A|\alpha\rangle$ یک کت کلی به ما خواهد داد؛ هرچند، کت های مشخصی وجود دارند که برای آنها $A|\alpha\rangle$ برابر حاصلضرب یک عدد ثابت در $|\alpha\rangle$ خواهد بود. این نوع کت ها را ویژه کت (eigenkets) می نامند و برای آنها داریم:

$$A|a'\rangle = a' |a'\rangle, \quad A|a''\rangle = a'' |a''\rangle, \quad \dots$$

در اینجا a' , a'' , ... عدد هستند و آنها را ویژه مقدار (eigenvalues) می نامند هرچند $|a'\rangle$, $|a''\rangle$ نشان دهنده ویژه کت اند.

ویژه حالت ها

- حالت فیزیکی متناظر با یک ویژه کت را ویژه حالت می نامند. مثلا اگر عملگر اسپین بر روی ویژه حالت های اسپینی اثر کند، انتظار داریم (بنا به آزمایش اشترن-گراخ) که مقادیر $\pm \hbar/2$ را به عنوان ویژه مقدار دریافت کنیم. یعنی

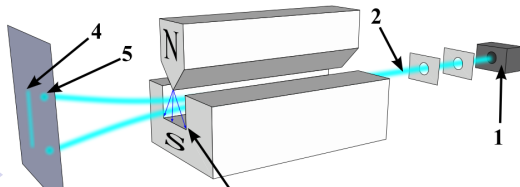
$$S_z |S_z; +\rangle = +\frac{\hbar}{2} |S_z; +\rangle \quad S_z |S_z; -\rangle = -\frac{\hbar}{2} |S_z; -\rangle$$

$$S_x |S_x; \pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2} |S_x; \pm\rangle \quad S_y |S_y; \pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2} |S_y; \pm\rangle \quad \text{و همچنین}$$

- می توان اثبات کرد که هر کت دلخواه را می توان با استفاده از ویژه کت ها بسط داد:

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} c_{a'} |a'\rangle$$

به موضوع یکتایی و کامل بودن این بسط بعدا وارد خواهیم شد.



فضای دوگان و یا فضای برا

- در انتها نتایج اندازه گیری های ما تعدادی کمیت های احتمالاتی و تعدادی اسکالر هستند. بنابراین، بهتر است بفهمیم که چطور می توان از بردارهای کت تعدادی اسکالر ساخت. برای اینکار باید فضای دوگان (dual) فضای کت را معرفی کنیم. این فضا را فضای براها می نامیم.
- می پذیریم که به ازای هر کت مانند $|\alpha\rangle$ یک دوگان آن مانند $\langle\alpha|$ وجود دارد که آن را برا bra می نامیم. این بردار را نیز می توان مانند زیر بسط داد:

$$\langle\alpha| = \sum_{a'} c_{a'} \langle a'|$$

دقت کنید که یک تناظر یک به یک بین بردارها در فضای کت و فضای برا وجود دارد) dual correspondence:

$$|\alpha\rangle \xleftrightarrow{\text{DC}} \langle\alpha|$$

$$|a'\rangle, |a''\rangle, \dots \xleftrightarrow{\text{DC}} \langle a'|, \langle a''|, \dots$$

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle \xleftrightarrow{\text{DC}} \langle\alpha| + \langle\beta|$$

- همچنین دوگان برهمنهی دو کت به صورت زیر نوشته می شود:
- $$c_\alpha |\alpha\rangle + c_\beta |\beta\rangle \xleftrightarrow{\text{DC}} c_\alpha^* \langle\alpha| + c_\beta^* \langle\beta|$$

ضرب داخلی برا و کت

- حالا می توان ضرب داخلی بین برا و کت را تعریف کرد که خروجی آن یک اسکالر است:

$$\langle \beta | \alpha \rangle = (\langle \beta |) \cdot (| \alpha \rangle)$$

البته نتیجه چنین ضربی در حالت کلی یک کمیت مختلط است. توجه کنید که برای تشکیل ضرب داخلی، همیشه یکی از حالت ها از فضای کت و دیگری از فضای برا می آید.

- یک ویژگی بسیار مهم ضرب داخلی این است که کمیت های $\langle \beta | \alpha \rangle$ و $\langle \alpha | \beta \rangle$ مزدوج مختلط همدیگر هستند:

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle^*$$

تمرین: اثبات کنید که $\langle \alpha | \alpha \rangle$ یک کمیت حقیقی است.

- فرض مهم دیگر این است که $\langle \alpha | \alpha \rangle \geq 0$. حالت $\langle \alpha | \alpha \rangle = 0$ برای کت های تهی درست است. وجود چنین شرطی برای تفسیر احتمالی خودسازگار از سیستم های کوانتومی الزامی است.

- حالت های متعامد: اگر برای دو کت داشته باشیم $\langle \alpha | \beta \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle = 0$ ، آنگاه می گوییم دو کت $|\alpha\rangle$ و $|\beta\rangle$ بر هم عمودند.

- نرمال سازی کت ها: با توجه به اینکه فقط جهت کت در فضای برداری اهمیت دارد، همیشه می توان از کت نرمال شده $|\tilde{\alpha}\rangle$ به جای کت $|\alpha\rangle$ استفاده کرد:

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle \alpha | \alpha \rangle}} |\alpha\rangle$$

تمرین: ثابت کنید $\langle \tilde{\alpha} | \tilde{\alpha} \rangle = 1$.

منابع بیشتر برای نمادگذاری دیراک و ریاضیات مکانیک کوانتومی

اگر می خواهید درباره نمادگذاری دیراک و ریاضیات مکانیک کوانتومی بیشتر بدانید، لطفا به مجموعه درس های "مفاهیم بنیادی مکانیک کوانتومی" مراجعه کنید. به ویژه دو درس زیر می توانند مفید باشند.

مقدمه ای بر فرمولبندی ریاضیاتی مکانیک کوانتومی

مفاهیم بنیادی مکانیک کوانتومی

مقدمه ای بر فرمولبندی ریاضیاتی مکانیک کوانتومی

حسین شاور

گروه فیزیک، دانشکده علوم

دانشگاه هرمزگان

مفاهیم بنیادی مکانیک کوانتومی

نمایش ماتریسی فضای حالت و عملگرها

حسین شاور

گروه فیزیک، دانشکده علوم

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید فرمولبندی ریاضیاتی مکانیک کوانتومی و مهم ترین نتایج آن را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ جمع عملگری چه ویژگی هایی دارد؟
- ۲ ضرب عملگری چه ویژگی هایی دارد؟
- ۳ مشاهده پذیرها در مکانیک کوانتومی با چه عملگرهایی توصیف می شوند؟ چرا؟
- ۴ عملگرهای هرمیتی چه نوع عملگرهایی هستند؟
- ۵ چطور می توان یک کت را در جهت کت دیگر تصویر کرد؟
- ۶ منظور از کت تهی چیست؟
- ۷ چرا به فضاهای کت و برا به صورت همزمان نیاز داریم؟
- ۸ منظور از ویژه حالت و ویژه مقدار چیست؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.

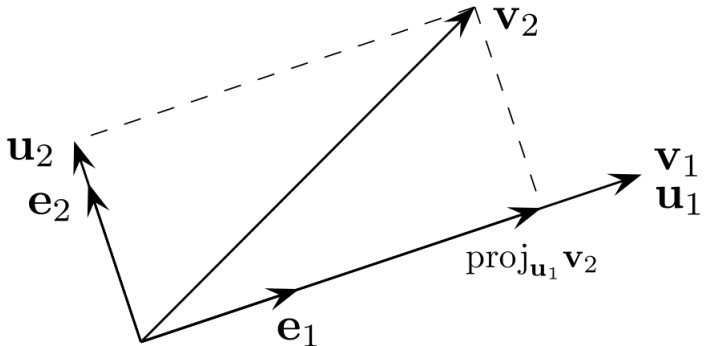


تمرین ها

- لطفا پرسش ها و تمرین های موجود در متن درس را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: متعامدسازی گرام-اشمیت

- در جلسه بعد با روش متعامدسازی گرام-اشمیت آشنا خواهیم شد.



منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ❻ <https://math.libretexts.org/>
- ❼ <https://www.youtube.com/@eigenchris>

با سپاس از توجه شما

