

نوسانگر هارمونیک در مکانیک کوانتومی

کوانتش نوسانگر هارمونیک ساده

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ کوانتش نوسانگر هارمونیک ساده
 - عملگرهای نردبانی
 - فیزیک عملگرهای نردبانی

روش دیراک برای کوانتش نوسانگر هارمونیک ساده

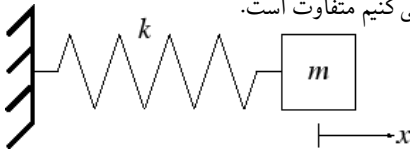
روشی که در ادامه خواهد آمد را اولین بار دیراک برای کوانتش نوسانگر هارمونیک ساده معرفی کرده است. این روش از این جهت که اطلاعات مهم کوانتومی این سیستم (طیف انرژی و ویژه حالت ها) را به سادگی برای ما فراهم می کند اهمیت دارد.

هامیلتونی یک سیستم جرم و فنر کلاسیک به صورت زیر نوشته می شود:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

در اینجا m جرم جسم نوسان کننده، p تکانه، x موقعیت نسبت به حالت تعادل و $\omega = \sqrt{k/m}$ فرکانس زاویه ای است.

حال فرض کنید که می خواهیم یک نوسانگر ساده کوانتومی را بررسی کنیم. در این حالت p و x هر دو عملگر (هرمیتی) خواهند بود. بعدها در حل معادله شرودینگر یاد خواهیم گرفت که می توان ویژه مقادیر انرژی این نوسانگر را به دست آورده و ویژه حالت های آن را بر اساس توابع هرمیت نوشت. هرچند روشی که در اینجا استفاده می کنیم متفاوت است.



عملگرهای نردبانی

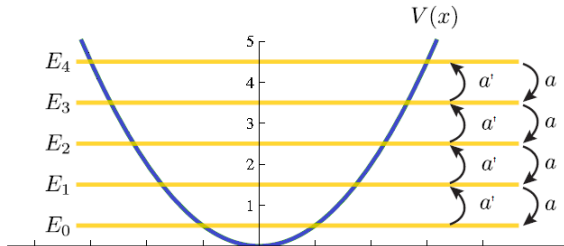
- برای حل مساله نوسانگر هارمونیک بهتر است که دو عملگر غیر هرمیتی زیر را تعریف کنیم:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right) \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right)$$

این عملگرها را به ترتیب از سمت چپ عملگر فنا (کاهنده) و عملگر خلق (افزاینده) می نامند و مجموعه آن دو را عملگرهای نردبانی می گویند. دلیل این نامگذاری این است که این عملگرها می توانند به اندازه یک واحد کوانتومی $\hbar\omega$ انرژی سیستم را افزایش و یا کاهش دهند (و یا یک فوتون خلق و نابود کنند). ادامه بحث را ببینید.

- تمرین: نشان دهید که a و $a^\dagger$ هرمیتی نیستند.

- تمرین: عملگرهای x و p را بر حسب عملگرهای a و $a^\dagger$ بازنویسی کنید.



عملگرهای نردبانی

- حال با استفاده از رابطه جابجایی کانونی بین موقعیت و تکانه داریم:

$$[a, a^\dagger] = \frac{m\omega}{2\hbar} \left[\left(x + \frac{ip}{m\omega} \right), \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right) \right] = \frac{1}{2\hbar} (-i[x, p] + i[p, x]) = 1$$

- همچنین ما عملگر شمارش (number operator) را به صورت $N = a^\dagger a$ تعریف می کنیم که به وضوح یک عملگر هرمیتی است. در ادامه خواهیم دید که ویژه مقدار این عملگر درجه برانگیختگی سیستم و یا تعداد کوانتوم های موجود در نوسانگر را برای ما می شمارد.

- با استفاده از تعریف عملگرهای نردبانی می توان رابطه زیر را بین عملگر تعداد و هامیلتونی یافت:

$$a^\dagger a = \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right) \left(x^2 + \frac{p^2}{m^2\omega^2} \right) + \left(\frac{i}{2\hbar} \right) [x, p]$$

$$= \frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2},$$

این رابطه را می توان به صورت $H = \hbar\omega(N + \frac{1}{2})$ بازنویسی کرد. توجه کنید که با توجه به اینکه H یک ترکیب خطی از N است، می توان این دو عملگر را به صورت همزمان قطری سازی کرد. در نتیجه این دو ویژه کت های مشترک دارند.

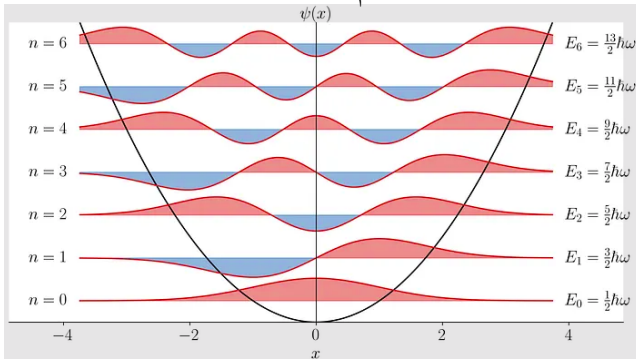
ویژه مقادیر و ویژه کت های هامیلتونی در نوسانگر هماهنگ ساده

- ما ویژه کت های انرژی و N را با $|n\rangle$ و ویژه مقادیر N را با n نشان خواهیم داد:

$$N |n\rangle = n |n\rangle$$

در ادامه نشان خواهیم داد که n باید یک عدد صحیح غیر منفی ($n \geq 0$) باشد. با استفاده از رابطه بالا می توان معادله ویژه مقداری هامیلتونی را به صورت زیر نوشته و ویژه مقادیر انرژی یعنی E_n را یافت:

$$H |n\rangle = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \Rightarrow E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$



اهمیت بنیادین عملگرهای نردبانی در توصیف نوسانگر هماهنگ ساده کوانتومی

برای درک اهمیت عملگرهای نردبانی در توصیف نوسانگر هماهنگ ساده کوانتومی به شیوه زیر عمل می‌کنیم. در ابتدا جابجایی‌های زیر را در نظر بگیرید:

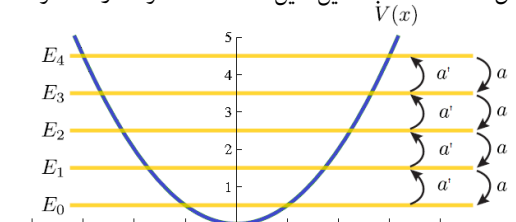
$$[N, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger [a, a^\dagger] + [a^\dagger, a^\dagger] a = a^\dagger$$

$$[N, a] = [a^\dagger a, a] = a^\dagger [a, a] + [a^\dagger, a] a = -a$$

با استفاده از رابطه اول می‌توان نوشت:

$$N a^\dagger |n\rangle = ([N, a^\dagger] + a^\dagger N) |n\rangle = (n+1) a^\dagger |n\rangle$$

پس حالت $a^\dagger |n\rangle$ ویژه حالت عملگر N با ویژه مقدار $n+1$ می‌باشد. به عبارت دیگر، اثر عملگر $a^\dagger$ بر روی کت $|n\rangle$ این است که انرژی میدان به اندازه $E_{n+1} - E_n = \hbar\omega$ افزایش یافته است؛ یعنی یک کوانتوم انرژی "خلق" شده است. به همین دلیل است که عملگر $a^\dagger$ را عملگر خلق و یا افزایشده می‌نامند.

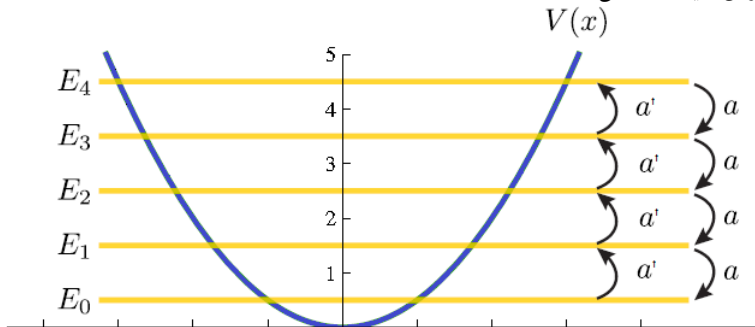


اهمیت بنیادین عملگرهای نردبانی در توصیف نوسانگر هماهنگ ساده کوانتومی

همچنین با استفاده از رابطه $[N, a] = [a^\dagger a, a] = a^\dagger [a, a] + [a^\dagger, a] a = -a$ می توان نوشت:

$$N a|n\rangle = ([N, a] + aN) |n\rangle = (n-1) a|n\rangle$$

پس حالت $a|n\rangle$ نیز ویژه حالت عملگر N با ویژه مقدار $n-1$ می باشد. به عبارت دیگر، اثر عملگر a بر روی کت $|n\rangle$ این است که انرژی میدان به اندازه $E_n - E_{n-1} = -\hbar\omega$ کاهش یافته است؛ یعنی یک کوانتوم انرژی "نابود" شده است. به همین دلیل است که عملگر a را عملگر نابودی و یا کاهنده می نامند.



تاثیر عملگرهای نردبانی بر کت حالت

- حالا می خواهیم تاثیر عملگرهای نردبانی بر کت حالت نوسانگر هارمونیک ساده را بررسی کنیم.
برای اینکار دقت کنید که بنا به رابطه $a|n\rangle = (n-1)|n-1\rangle$ و $a|n\rangle$ کت های $|n-1\rangle$ عملاً باید ضریبی از هم باشند؛ یعنی

$$a|n\rangle = c|n-1\rangle$$

در اینجا c یک ضریب ثابت است. از رابطه بالا همچنین می توان رابطه دوگان آن یعنی $\langle n|a^\dagger = c^*\langle n-1|$ را نتیجه گرفت. با ضرب طرفین این دو رابطه در هم می توان ثابت c را یافت:

$$\langle n|a^\dagger a|n\rangle = c c^* \langle n-1|n-1\rangle \Rightarrow \langle n|N|n\rangle = n\langle n|n\rangle = |c|^2$$

و یا $n = |c|^2$. پارامتر c علی الاصول می تواند مختلط هم باشد؛ ولی ما در اینجا برای سادگی فرض می کنیم که مثبت است. در نتیجه داریم:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

- تمرین: به روش مشابه نشان دهید:

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

- تمرین: تاثیر متوالی عملگرهای نردبانی بر کت حالت $|n\rangle$ را بیابید (یعنی $a^m|n\rangle$ و $(a^\dagger)^m|n\rangle$ را بیابید). پاسخ در ادامه آمده است.

تاثیر متوالی عملگر کاهنده بر کت حالت سیستم

● شمارنده n در نوسانگر هارمونیک هیچگاه نمی تواند منفی باشد، زیرا

$$n = \langle n | N | n \rangle = \langle n | a^\dagger a | n \rangle = (\langle n | a^\dagger) (a | n \rangle) \geq 0$$

بنابراین $n \geq 0$.

● فرض کنید عملگر کاهنده را به صورت متوالی بر کت حالت $|n\rangle$ تاثیر می دهیم. در این صورت داریم:

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

$$a^2 |n\rangle = \sqrt{n} a |n-1\rangle = \sqrt{n(n-1)} |n-2\rangle$$

$$a^3 |n\rangle = \sqrt{n} a^2 |n-1\rangle = \sqrt{n(n-1)} a |n-2\rangle = \sqrt{n(n-1)(n-2)} |n-3\rangle$$

در نتیجه با n بار اعمال عملگر کاهنده بر کت حالت $|n\rangle$ نوسانگر کوانتومی به کت پایه $|0\rangle$ منتقل خواهد شد.

● دقت کنید که انرژی کت پایه صفر نیست بلکه مقداری برابر با $E_0 = 1/2 \hbar \omega$ در کت پایه همچنان حضور دارد. به دلیل رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ کاهش انرژی به مقدار $E = 0$ ممکن نیست. این انرژی را انرژی خلأ کوانتومی (Quantum Vacuum Energy) و یا افت و خیز انرژی خلأ (vacuum energy fluctuations) می نامند که تاثیرات عمیق آن در موضوعات مختلف فیزیک دیده می شود. مثلاً اثر کازمیر (Casimir Effect) و جابجایی لمب (Lamb shift) را ببینید.

تأثیر متوالی عملگر افزایشده بر کت حالت سیستم

- حال فرض کنید سیستم در ابتدا در حالت پایه $|0\rangle$ قرار دارد. در ادامه نشان خواهیم داد که با n بار تأثیر عملگر افزایشده بر کت $|0\rangle$ می توان حالت سیستم را به کت $|n\rangle$ منتقل کرد:

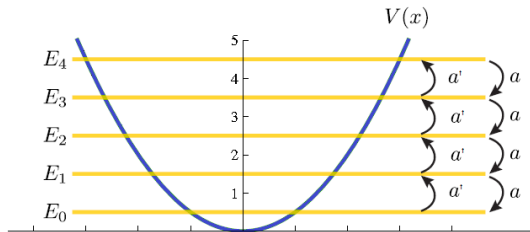
$$|1\rangle = a^\dagger |0\rangle,$$

$$|2\rangle = \left(\frac{a^\dagger}{\sqrt{2}}\right) |1\rangle = \left[\frac{(a^\dagger)^2}{\sqrt{2}}\right] |0\rangle,$$

$$|3\rangle = \left(\frac{a^\dagger}{\sqrt{3}}\right) |2\rangle = \left[\frac{(a^\dagger)^3}{\sqrt{3!}}\right] |0\rangle,$$

$$\vdots$$

$$|n\rangle = \left[\frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\right] |0\rangle.$$



- دقت کنید که تا اینجا نشان داده ایم که کت $|n\rangle$ ویژه کت مشترک عملگرهای H و N می باشد. ویژه مقادیر انرژی در این حالت برابرند با:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

- حالت $|0\rangle$ را حالت پایه و حالت های $|n\rangle$ با $n > 0$ را حالت برانگیخته می نامند.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید مفهوم کوانتش نوسانگر هماهنگ ساده را به درستی توضیح داده و برخی کاربردهای آنها را بیان کنید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- هامیلتونی نوسانگر هارمونیک ساده از چه جملاتی تشکیل شده است.
- نوشتن هامیلتونی نوسانگر هارمونیک ساده بر اساس عملگرهای خلق و فنا چه مزیت هایی دارد؟
- رابطه جابجایی کانونیک برای عملگرهای خلق و فنا را بنویسید.
- توضیح دهید که چرا عملگرهای هامیلتونی و شمارش ویژه کت های همزمان دارند.
- چطور می توان از کت پایه $|0\rangle$ به کت دلخواه $|n\rangle$ رسید؟
- چطور می توان از کت دلخواه $|n\rangle$ به کت پایه $|0\rangle$ رسید؟
- تفسیر فیزیکی عملگرهای خلق و فنا و شمارش را در یک میدان فوتونی توضیح دهید.
- منظور از انرژی خلاء کوانتومی چیست؟
- منظور از حالت پایه و حالت برانگیخته نوسانگر هارمونیک چیست؟
- آیا انرژی خلاء کوانتومی می تواند باعث انبساط شتابدار عالم شود؟ درباره حدس زلدوویچ تحقیق کنید.

<https://arxiv.org/abs/hep-th/0012253>

اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.

تمرین

• درستی روابط زیر را نشان دهید.

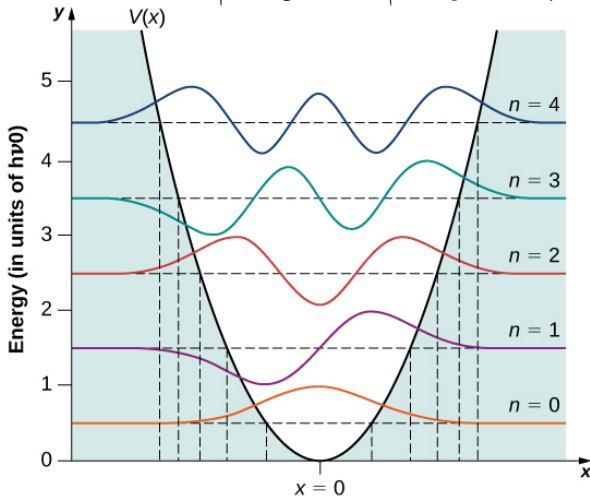
$$\langle n' | a | n \rangle = \sqrt{n} \delta_{n', n-1}, \quad \langle n' | a^\dagger | n \rangle = \sqrt{n+1} \delta_{n', n+1}$$

• درستی روابط زیر را نشان دهید.

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger), \quad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (-a + a^\dagger)$$

مبحث بعدی: تابع موج نوسانگر هارمونیک ساده

در جلسه بعد تابع موج نوسانگر هارمونیک ساده را در حالت های متفاوت $|n\rangle$ بدست آورده و مقدار چشمداشتی برخی مشاهده پذیرها در این سیستم را نیز بررسی خواهیم کرد.



منابع

- ۱ Modern Quantum Mechanics, 3rd Edition, by J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge University Pr.
- ۲ Principles of Quantum Mechanics by Ramamurti Shankar, Plenum Press
- ۳ Quantum Mechanics: Concepts and Applications, 2nd Edition by Nouredine Zettili
- ۴ Introduction to Quantum Mechanics by David J. Griffiths
- ۵ Quantum Mechanics: An Introduction by Walter Greiner
- ۶ Quantum Physics I by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>
- ۷ Quantum Physics II by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/>
- ۸ Professor M does Science,
<https://www.youtube.com/@ProfessorMdoesScience>

با سپاس از توجه شما