

مبانی گرانش نیوتنی

قوانین کپلر و مدار حرکت سیارات و ماهواره ها

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



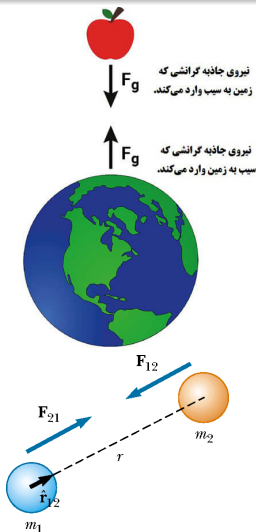
دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

۱ قوانین کپلر و مدار حرکت سیارات و ماهواره ها

- آسمان شب
- قوانین کپلر
- مدار حرکت اجرام سماوی

آنچه گذشت!



نیروی گرانش همیشه جاذبه است. از طرفی نیروی الکتریکی می تواند جاذبه و یا دافعه باشد.

نیروی گرانش وارد شده از جسم اول به جسم دوم دقیقا برابر، ولی در جهت مخالف، نیروی گرانش وارد شده از جسم دوم به جسم اول است.

چون دو نیرو با هم برابر هستند، اگر یکی از دو جسم بسیار بزرگتر از جسم دیگر باشد، جسم بزرگ عملا ثابت باقی می ماند و جسم کوچک به سمت آن حرکت می کند.

مثلا سیب و زمین به همدیگر نیرویی برابر وارد می کنند. ولی از آنجا که سیب بسیار سبک تر از زمین است، سیب حرکت می کند ولی زمین تقریبا ثابت باقی می ماند.

شکل دقیق ریاضیاتی قانون گرانش نیوتن را در زیر می بینید (حرف G نشان دهنده ثابت نیوتن است.)

$$\mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad \mathbf{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{21}$$

قانون گرانش نیوتن و سه قانون حرکت نیوتن تا حد خوبی همه پدیده های گرانشی در منظومه شمسی، و فراتر از آن، را توصیف می کنند.

در آسمان شب چه می بینیم؟!



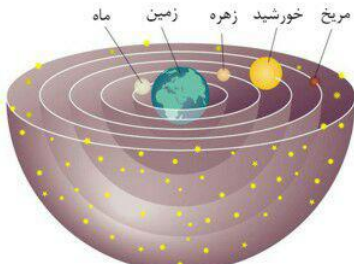
- نجوم باستان بر فرض هایی استوار شده بود که به نظر کاملا درست می آمدند، مانند زمین ثابت است.
- ۱ آسمان (ستاره ها، خورشید و ماه و ...) در بالای سر ما در حال گردش اند.
- ۲ آسمان تغییر نمی کند.
- ۳ فیلم ها را ببینید.
- دقت کنید که ستارگان از شرق طلوع می کنند و در غرب غروب می کنند.
- آسمان نیمکره های شمالی و جنوبی کاملا متفاوت است.
- همچنین، در نیمکره شمالی، و وقتی به سمت شمال نگاه می کنیم، به نظر می رسد ستارگان به دور ستاره قطبی می چرخند. ستاره قطبی در نیمکره جنوبی متفاوت است.

نظریه زمین مرکزی

بر اساس این پدیده ها منجمین باستان نظریه زمین مرکزی را ابداع کردند. بنا به این نظریه، زمین در مرکز عالم قرار دارد و همه اجرام آسمانی به دور آن در گردش هستند.



همچنین، بنا به این نظریه، ستاره های آسمان به یک سری کرات هم مرکز با زمین متصل بوده اند (هفت فلک و یا هفت آسمان). برخی معتقد بودند که این کرات شفاف هستند و روزی یکبار به دور زمین می چرخند. برخی حدس می زدند که سیارات حفره هایی درون این افلاک هستند که اجازه می دهند نور به سمت زمین تابیده شود.



این نظریه در حال حاضر به نظر ما نادرست می آید، ولی واقعیت این است که اگر اطلاعات دقیق نجومی عصر حاضر را نادیده بگیریم، نظریه زمین مرکزی همچنان می تواند اکثر پدیده های آسمانی (و نه همه آنها) را به خوبی توضیح دهد. به همین دلیل افراد بسیار برجسته ای چون ارسطو، افلاطون و بطلمیوس به آن معتقد بودند.

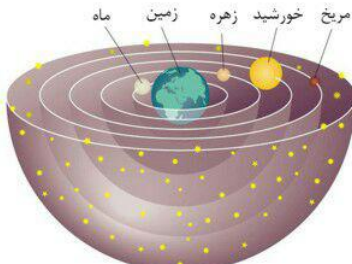
مشکلات نظریه زمین مرکزی

● گرچه در ابتدا نظریه زمین مرکزی بسیار محبوب بود، ولی با افزایش دقت مشاهدات، مشکلات آن هویدا شد.

● همچنین غیر قابل تغییر بودن آسمان با ظهور ابرنواخترهای سال های ۱۰۵۴ و ۱۵۷۲ میلادی زیر سوال رفت.

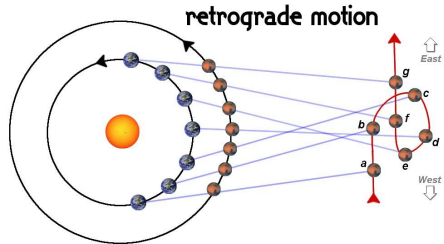
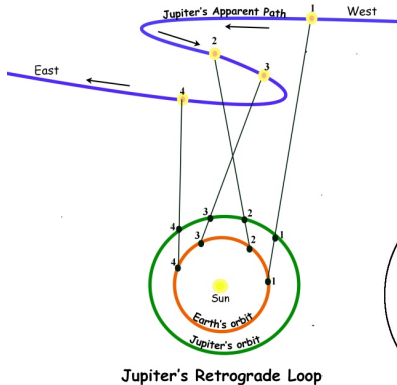
● درباره این مشکلات (مانند حرکت رجوعی) در درس نجوم بیشتر صحبت خواهیم کرد. منجمین در ابتدا بسیار تلاش کردند با وارد کردن ایده های جدید (مانند فلک تدویر) مشکلات را برطرف کنند؛ ولی باز هم با افزایش دقت مشاهدات، مشکلات بیشتری معلوم شد.

● از داستان ظهور و سقوط نظریه زمین مرکزی می توان دو نتیجه بسیار مهم درباره نظریه های علمی گرفت. اول اینکه دانشمندان تلاش می کنند نظریه های موجود را حفظ کنند. دوم اینکه فقط با افزایش دقت مشاهدات و آزمایش هاست که می توان نظریه های جدیدتر و بهتر ساخت.

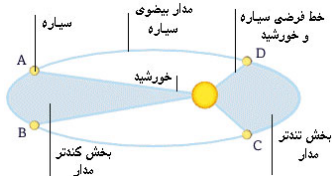


مشکلات نظریه زمین مرکزی: حرکت رجوعی سیارات خارجی

● حرکت بازگشتی و یا رجوعی (Retrograde Motion) حرکتی است که به علت سرعت زاویه‌ای بزرگتر حرکت سیاره زمین (ناظر زمینی) نسبت به یک سیاره خارجی مانند مشتری و یا مریخ مشاهده می شود. حرکت رجوعی برای مریخ به شکل یک گره و برای مشتری به شکل حرف S است.



نظریه خورشید مرکزی: اولین انقلاب نجوم قبل از اختراع تلسکوپ اتفاق افتاد.



● نیکلاس کوپرنیک (از ۱۴۷۳ تا ۱۵۴۳) ایده خورشید مرکزی را به صورت دقیق مطرح کرد (پیش از او نیز افراد دیگری به چنین امکانی اشاره کرده بودند). بنا به این نظریه خورشید در مرکز عالم است و زمین و دیگر سیاره ها در مدارهای دایروی به دور آن می چرخند.

● نظریه خورشید مرکزی نیز ایرادهایی داشت؛ ولی به صورت محسوسی از نظریه زمین مرکزی بهتر کار می کرد. مثلاً حرکت رجوعی سیارات خارجی به راحتی در این مدل توضیح داده می شود.

● انقلاب بعدی نجوم توسط تیکو براهه و یوهان کپلر بوجود آمد. تیکو براهه اندازه گیری های بسیار دقیقی از مدار حرکت سیارات انجام داد. بعداً یوهان کپلر سه قانون مشهور خود را بر اساس این اندازه گیری ها به دست آورد. قانون اول کپلر می گوید سیارات در مسیرهای بیضوی به دور خورشید می گردند و خورشید در یک کانون بیضی قرار دارد. کار براهه و کپلر در مجموع حدوداً سی سال طول کشید.

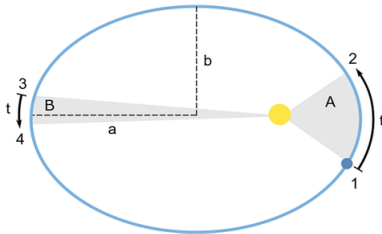
سه قانون کپلر

• سه قانون کپلر که بر اساس مشاهده صرف به دست آمدند، ولی بعدها توسط مکانیک نیوتنی توضیح داده شدند، به صورت زیر بیان می شوند:

۱ مدار حرکت سیارات به دور خورشید بیضی است و خورشید در یکی از دو کانون این بیضی قرار دارد.

۲ مساحت جاروب شده توسط یک سیاره در بازه های زمانی برابر، مقداری ثابت است.

۳ مربع دوره تناوب حرکت سیاره به دور خورشید با مکعب فاصله متوسط سیاره تا خورشید متناسب است.

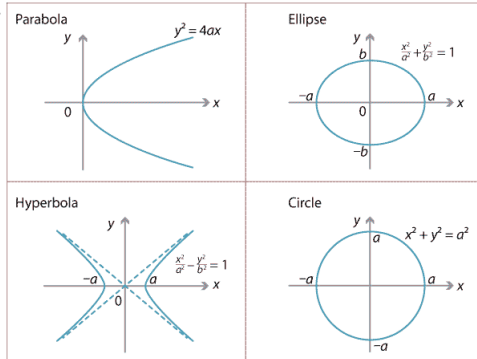
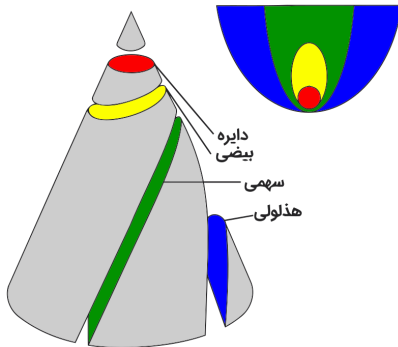


$$G \frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \xrightarrow{v = \frac{2\pi r}{T}} T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$



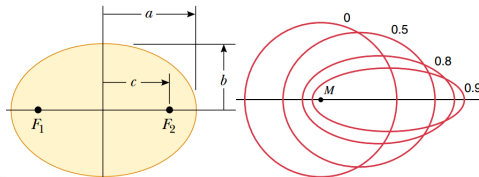
قانون اول کپلر

- اثبات قانون اول کپلر با استفاده از مکانیک نیوتنی خارج از حدود این درس است و در درس مکانیک تحلیلی بحث خواهد شد.
- هرچند، باید اشاره شود که مدار حرکت اجرام سماوی، تحت مکانیک نیوتنی، می تواند هر یک از مقاطع مخروطی (و نه فقط بیضی) باشد.

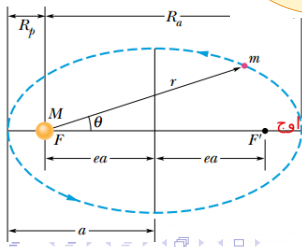


ویژگی های بیضی

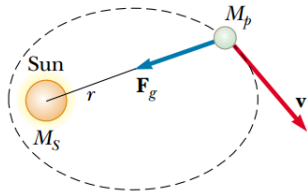
بیضی را می توان با استفاده از یک نخ و دو نقطه ثابت (به عنوان دو کانون) رسم کرد. در شکل مقابل a نصف قطر بزرگ بیضی، b نصف قطر کوچک بیضی، c فاصله کانونی بیضی و F_1 و F_2 دو کانون بیضی هستند. پارامتر $e = c/a$ را خروج از مرکز بیضی می نامند که برای دایره مقدار آن صفر و برای یک بیضی بسیار کشیده به ۱ نزدیک می شود.



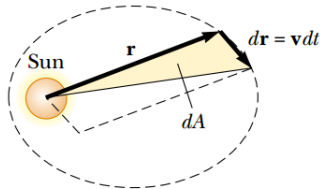
دورترین نقطه از خورشید را نقطه اوج و نزدیکترین نقطه به خورشید را نقطه حضیض می نامند. سرعت سیاره در نقطه حضیض بیشترین است. چرا؟! قانون دوم کپلر را ببینید.



قانون دوم کپلر



(a)



(b)

قانون دوم کپلر: مساحت جاروب شده توسط یک سیاره در بازه های زمانی برابر، مقداری ثابت است.

اثبات: در مدار حرکت سیاره ای، مساحت دیفرانسیلی dA که خط واصل بین سیاره و خورشید در زمان dt را جاروب می کند، در نظر بگیرید. مقدار این مساحت برابر است با

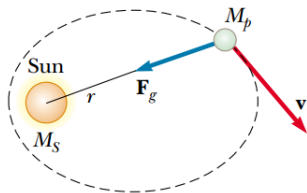
$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v} dt| = \frac{L}{2M_P} dt$$

که در آن $L = |\vec{L}|$ اندازه بردار تکانه زاویه ای است. در نتیجه داریم:

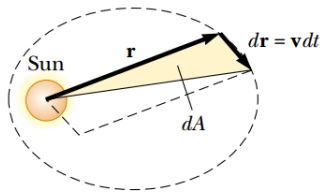
$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2M_P} = \text{cte}$$

این مقدار در حین حرکت سیاره ثابت است، چون تکانه زاویه ای سیاره یک مقدار ثابت است.

قانون دوم کپلر



(a)



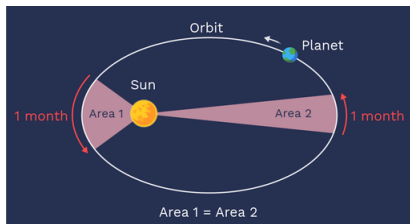
(b)

قانون دوم کپلر نتیجه مستقیمی از شعاعی بودن نیروی گرانش است. هر نیروی شعاعی (مثل نیروی گرانش جهانی نیوتن و یا نیروی کولن) پایستگی تکانه زاویه ای $\vec{L}$ را حفظ می کند و بنابراین قانون دوم کپلر در آن برقرار خواهد بود.

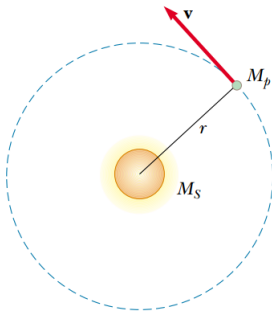
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times F\hat{r} = 0 \quad \text{اثبات:}$$

از طرفی، داریم $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$. بنابراین هر نیروی مرکزگرا مقدار تکانه زاویه ای را حفظ خواهد کرد.

پرسش: با توجه به شکل زیر توضیح دهید که چرا سرعت سیاره در نقطه حضیض بیشترین و در اوج کمترین است.



قانون سوم کپلر



• مربع دوره تناوب حرکت سیاره به دور خورشید با مکعب فاصله متوسط سیاره تا خورشید متناسب است.

• این قانون را می توان به راحتی برای مدارهای دایره ای و با استفاده از قانون گرانش جهانی اثبات کرد:

$$F = ma \Rightarrow \frac{GM_S M_P}{r^2} = \frac{M_P v^2}{r}$$

از طرفی در یک حرکت دایره ای یکنواخت داریم $v = 2\pi r/T$ ؛ در نتیجه می توان نوشت:

$$\frac{GM_S M_P}{r^2} = \frac{M_P (2\pi r/T)^2}{r} \Rightarrow T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S} \right) r^3$$

قانون سوم کپلر را می توان برای مدارهای بیضوی نیز (با کمی تلاش بیشتر) اثبات کرد. هرچند،

• برای مدارهای بیضوی مربع دوره تناوب حرکت سیاره به دور خورشید با مکعب نصف قطر بزرگ مدار بیضوی آن سیاره متناسب است.

قانون سوم کپلر و جرم خورشید

در رابطه

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_s} \right) r^3$$

توجه کنید که مقدار داخل پرانتز از جرم سیاره مستقل است و فقط به جرم جسم مرکزی ربط دارد.

تمرین: در جدول زیر می بینید که مقدار a^3/T^2 برای سیارات منظومه شمسی تقریباً مقداری ثابت است. با استفاده از قانون سوم کپلر و داده های زیر، جرم جسم مرکزی (خورشید) را بر حسب کیلوگرم بیابید.

Planet	Semi-major axis (AU)	Period (days)	$\frac{a^3}{T^2}$ ($10^{-6} \text{ AU}^3/\text{day}^2$)
Mercury	0.38710	87.9693	7.496
Venus	0.72333	224.7008	7.496
Earth	1	365.2564	7.496
Mars	1.52366	686.9796	7.495
Jupiter	5.20336	4332.8201	7.504
Saturn	9.53707	10775.599	7.498
Uranus	19.1913	30687.153	7.506
Neptune	30.0690	60190.03	7.504

قانون سوم کپلر و جرم مشتری

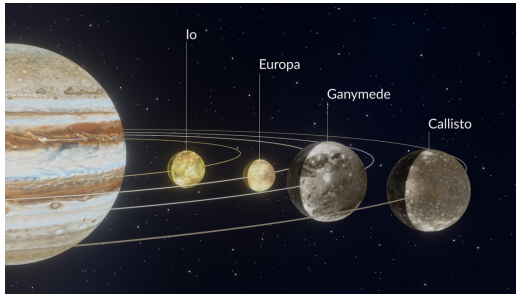


TABLE 5-3 Principal Moons of Jupiter
(Problems 62 and 63)

Moon	Mass (kg)	Period (Earth days)	Mean distance from Jupiter (km)
Io	8.9×10^{22}	1.77	422×10^3
Europa	4.9×10^{22}	3.55	671×10^3
Ganymede	15×10^{22}	7.16	1070×10^3
Callisto	11×10^{22}	16.7	1883×10^3

تمرین: در جدول زیر داده های دوره تناوب و فاصله میانگین چهار قمر اصلی مشتری را ملاحظه می کنید. دقت کنید که برای این سیستم نیز مقدار T^2/a^3 تقریباً ثابت است. با استفاده از قانون سوم کپلر و داده های زیر، جرم جسم مرکزی (مشتری) را بر حسب کیلوگرم بیابید.

دقت کنید که با روش های نسبتاً مشابه با قانون سوم کپلر، رصدهای نجومی و دانستن مقدار G می توان جرم دیگر اجرام سماوی را تعیین کرد.

مدار حرکت اجرام در مکانیک نیوتنی

بررسی دقیق حرکت اجرام سماوی فراتر از بحث حاضر است و معمولاً در درجه های مختلف در دروس مکانیک تحلیلی، مکانیک سماوی، اخترفیزیک کهکشانی، کیهان شناسی و ... بحث می شود. با این وجود اصول اساسی این حرکت را می توان با استفاده از تحلیل انرژی در حرکت دایره ای به سادگی فهمید.

فرض کنید که جسمی به جرم m در میدان گرانشی جسم بسیار سنگین $M \gg m$ در حال حرکت دایره ای است. با توجه به سنگینی جسم مرکزی می توان این جسم را تقریباً ثابت در نظر گرفت. انرژی گرانشی این سیستم برابر است با

$$U(r) = - \frac{GMm}{r}$$

می باشد در حالی که فقط جسم m که با سرعت $v = r\omega$ در حال حرکت دایره ای است، انرژی جنبشی دارد:

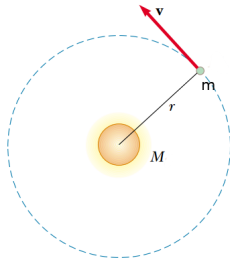
$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

از طرفی با استفاده از قانون دوم نیوتن می توان نوشت:

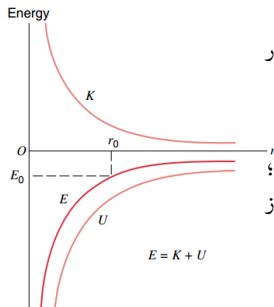
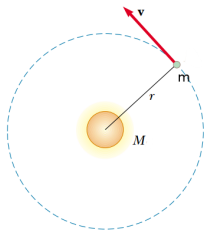
$$F = ma \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \frac{GMm}{r} = r^2\omega^2$$

$$K = GMm/(2r)$$

و بنابراین



تحلیل انرژی مدارها



در نتیجه انرژی مکانیکی کل سیاره m برابر است با

$$E = K + U = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$$

دقت کنید که این مقدار انرژی ثابت و منفی است.

توجه: در هر سیستم (نه لزوماً گرانشی) انرژی پتانسیل و انرژی کل می توانند مثبت و یا منفی باشند؛ ولی انرژی جنبشی بنا به تعریف می تواند فقط مثبت و یا صفر باشد (هرچند، مبحث تونل زنی در مکانیک کوانتومی را ببینید!).

رفتار توابع انرژی، انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی بر حسب فاصله در سیستم گرانشی مورد اشاره در بالا را در نمودار مقابل می بینید.

توجه: پتانسیل گرانشی (نیوتنی) همیشه منفی است.

مفهوم انرژی کل منفی ($E < 0$) این است که ”سیستم بسته است“؛ یعنی سیاره m همیشه مقید به ستاره M است و هیچوقت نمی تواند از گرانش آن فرار کند.

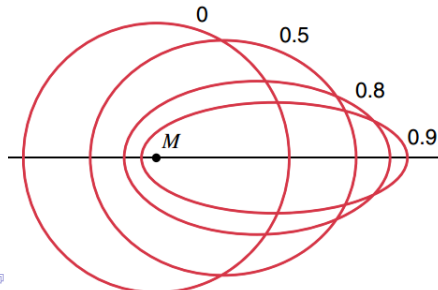
تحلیل انرژی مدارها

می توان نشان داد (درس مکانیک تحلیلی) که رابطه بالا برای انرژی کل در مدارهای بیضوی هم درست است. البته باید شعاع r را با نصف قطر بزرگ بیضی a جایگزین کرد:

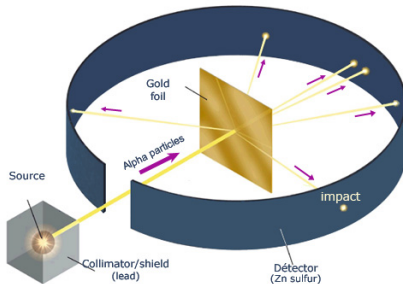
$$E = - \frac{GMm}{2a}$$

در این حالت هم انرژی کل منفی و ثابت (نیروی پایسته گرانش) است. علاوه بر این، چون نیرو شعاعی است، تکانه زاویه ای نیز پایسته است. این دو کمیت را ”ثوابت حرکت” می نامند.

با توجه به اینکه انرژی کل فقط به a بستگی دارد، مدارهای بیضوی با قطر بزرگ یکسان انرژی کل برابر دارند. مثلاً همه مدارهای بیضی در شکل زیر انرژی کل یکسانی دارند.

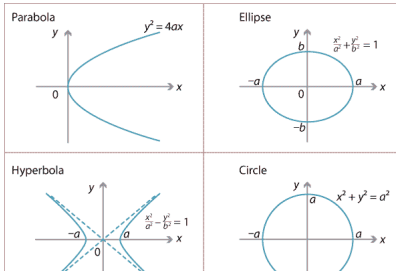
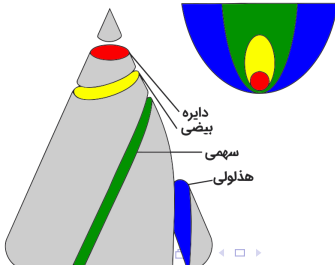


تحلیل انرژی مدارها



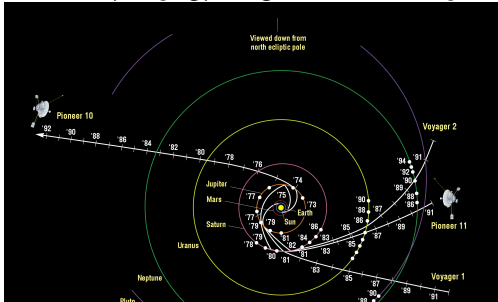
• اگر انرژی کل جرمی صفر شود، یعنی $E = 0$ ، آنگاه جرم می تواند به بینهایت فرار کند. در این حالت مدار جسم سهموی خواهد بود.

• اگر انرژی کل جرمی مثبت شود، یعنی $E > 0$ ، مدار حرکت جسم هذلولی خواهد بود. این مورد در پراکندگی ذرات از هسته اتم اتفاق می افتد (نیروی کولنی نیز به صورت $1/r^2$ تغییر می کند. آزمایش رادرفورد را ببینید).



پایونیر ۱۰: پیش به سوی بینهایت

- انرژی جنبشی فراهم شده برای فضاییمای پایونیر ۱۰ (پیشگام: Pioneer ۱۰) به اندازه ای است که می تواند از میدان گرانشی منظومه شمسی فرار کرده و عملاً وارد فضای بین ستاره ای شود. مسیر حرکت این فضاییما را در زیر مشاهده می کنید.
- داده های مخابره شده توسط این فضا پیما (و همچنین پیشگام ۱۱) به مدت دو دهه فیزیکدانان را سرگردان کرده بود، زیرا این داده ها نشان می دادند که یک شتاب ثابت به اندازه تقریباً $10^{-10} \text{ m/s}^2 \times (1.33 \pm 8.74)$ علاوه بر گرانش خورشید در مسیر این دو فضاییما دخیل است. این پدیده را ناهنجاری پایونیر (Pioneer anomaly) می نامند. هرچند، تلقی فعلی این است که این شتاب به دلیل نشت نامتقارن تابش از مولد گرما-الکتریکی ایزوتوپی این فضاییماها رخ داده است.



نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید مفهوم قوانین کپلر و انواع مدار حرکت سیارات و ماهواره ها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

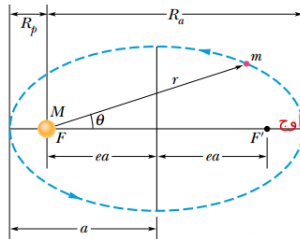
۱. اساس فرضیه زمین مرکزی و شواهد موجود برای درستی هیات بطلمیوسی را توضیح دهید.
 ۲. درباره مشکلات هیات بطلمیوسی تحقیق کنید.
 ۳. درباره حرکت رجوعی دیگر سیارات خارجی (به جز مریخ و مشتری) تحقیق کنید.
 ۴. درباره مدل سماوی تیکوبراهه تحقیق کنید.
 ۵. قوانین کپلر را بیان کنید.
 ۶. قانون اول کپلر برای چه نوع نیرویی برقرار است؟
 ۷. قانون دوم کپلر برای چه نوع نیرویی برقرار است؟
 ۸. قانون سوم کپلر برای چه نوع نیرویی برقرار است؟
 ۹. درباره هندسه و جبر مقاطع مخروطی تحقیق کنید.
 ۱۰. درباره درستی قانون سوم کپلر برای قمرهای دیگر سیارات منظومه شمسی تحقیق کنید.
 ۱۱. درباره درستی قانون سوم کپلر برای منظومه های فراخورشیدی تحقیق کنید.
 ۱۲. در یک سیستم دو جسمی چه نوع مدارهایی برای $E < 0$ ، $E = 0$ و $E > 0$ به دست می آید؟
- اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.



تمرین

- با استفاده از پایستگی انرژی و مقدار انرژی کل $E = -\frac{GMm}{r_a}$ در حرکت بیضوی سیارات نشان دهید که سرعت سیاره در فاصله r از جسم مرکزی به جرم M از رابطه زیر به دست می آید:
- $$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$



مبحث بعدی: مبانی گرانث اینشتین

درس های مکانیک سماوی

چه چیزهایی می توان از تاریخچه مکانیک سماوی آموخت؟

حسین شناور

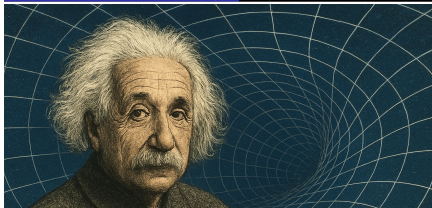
دانشگاه فردوسی مشهد

۲۹ آبان ۱۴۰۳



درس های مکانیک سماوی

مسین شاور



در ادامه - در صورت تمایل - ویدئوی
مقابل را ببینید که درباره تاریخچه
مکانیک سماوی و پیروزی های گرانس
نیوتنی می باشد.

سپس درباره مبانی نظریه نسبیت عام
اینشتین بحث می کنیم که جانشین
گرانث نیوتنی است.

منابع

- ❶ Halliday, David, Robert Resnick, and Jearl Walker; Fundamentals of physics, 10th edn. John Wiley & Sons, 2014.
- ❷ Halliday, D., R. Resnick, and K. S. Krane. "Physics, 5th edn." (2002).
- ❸ Ohanian, Hans C., and John T. Markert. Physics for engineers and scientists, 3th edn. 2007.
- ❹ Young, Hugh D., Roger A. Freedman, and Albert Lewis Ford. Sears and Zeman-sky's university physics, 13th edn. Pearson education, 2006.

با سپاس از توجه شما