

مبانی گرایش نیوتنی

گرایش اجرام گسترده و قضیه های پسته

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم

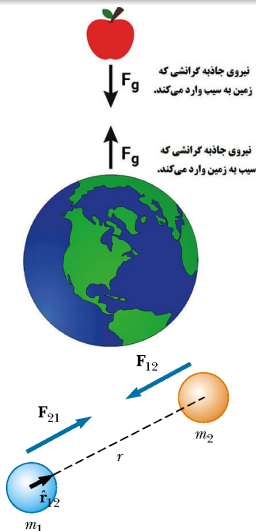


دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ گرانث اجرام گسترده و قضیه های پوسته
- گرانث و اصل برهمنهی
- گرانث توزیع جرم های پیوسته
- قضیه های پوسته

آنچه گذشت!



نیروی گرانش همیشه جاذبه است. از طرفی نیروی الکتریکی می تواند جاذبه و یا دافعه باشد.

نیروی گرانش وارد شده از جسم اول به جسم دوم دقیقا برابر، ولی در جهت مخالف، نیروی گرانش وارد شده از جسم دوم به جسم اول است.

چون دو نیرو با هم برابر هستند، اگر یکی از دو جسم بسیار بزرگتر از جسم دیگر باشد، جسم بزرگ عملا ثابت باقی می ماند و جسم کوچک به سمت آن حرکت می کند.

مثلا سیب و زمین به همدیگر نیرویی برابر وارد می کنند. ولی از آنجا که سیب بسیار سبک تر از زمین است، سیب حرکت می کند ولی زمین تقریبا ثابت باقی می ماند.

شکل دقیق ریاضیاتی قانون گرانش نیوتن را در زیر می بینید (حرف G نشان دهنده ثابت نیوتن است.)

$$\mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad \mathbf{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{21}$$

قانون گرانش نیوتن و سه قانون حرکت نیوتن تا حد خوبی همه پدیده های گرانشی در منظومه شمسی، و فراتر از آن، را توصیف می کنند.

گرانش اجرام گسترده

- تاکنون فرض کرده ایم که اجسام مورد نظر ما در مساله گرانش نقطه ای هستند و بنابراین گرانش آنها از روابط ساده

$$\mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad \mathbf{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{21}$$

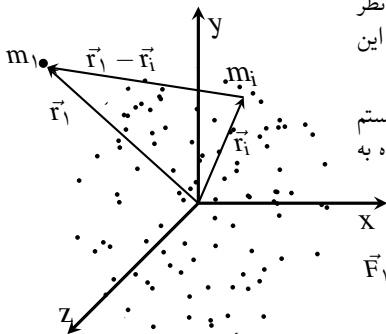
که مربوط به نیروی گرانش اجسام نقطه ای است، به دست می آید.

- ولی حالا می خواهیم با گرانش اجرام گسترده آشنا شویم. برای اینکار باید با اصل برهمنی آشنا شویم. در عمل خواهیم دید که میدان گرانش یک جسم گسترده برابر است با جمع برداری میدان تک تک اجزای آن جسم گسترده.

- بسیاری از پدیده های گرانشی، از جمله جزر و مد، ساختار سیستم های گرانشی مانند کهکشان ها و ... ، نتیجه گرانش اجسام گسترده هستند. بنابراین شناخت دقیق این موضوع مهم است.



اصل برهمنه



ذرات نقطه ای با جرم های $m_1, m_2, \dots, m_n$ را در نظر بگیرید. می خواهیم نیروی گرانشی کل وارده به یکی از این ذرات، مثلاً ذره m_1 ، را بیابیم.

اصل برهمنه: نیروی کل وارده به یک ذره در یک سیستم ذرات برابر است با مجموع برداری نیروهای وارد شده به آن ذره از طرف همه ذرات دیگر:

$$\vec{F}_{1,\text{net}} = \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \dots + \vec{F}_{1,n}$$

$$\vec{F}_{1,\text{net}} = \sum_{i=2}^n \vec{F}_{1,i} = -Gm_1 \sum_{i=2}^n \frac{m_i (\vec{r}_1 - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_i|^3}$$

و میدان گرانشی در نقطه $\vec{r}_1$ برابر است با

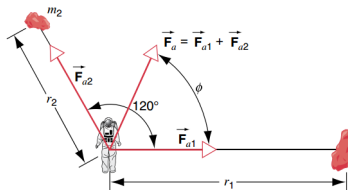
$$\vec{g}_{1,\text{net}} = \sum_{i=2}^n \vec{g}_{1,i} = -G \sum_{i=2}^n \frac{m_i (\vec{r}_1 - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_i|^3}$$

درستی اصل برهمنه در پدیده های مختلف فیزیکی، به ویژه سیستم های خطی و میدان های ضعیف، تایید شده است. با این وجود درستی این اصل در سیستم های غیرخطی و میدان های قوی مورد تردید است.

مثال

• یک فضا‌نورد با جرم کل $m_a = 105 \text{ kg}$ را در نظر بگیرید که در کمربند سیارکی در حال حرکت است. در یک لحظه از زمان، فضا‌نورد در نزدیکی دو جسم به جرم های $m_1 = 346 \text{ kg}$ و $m_2 = 184 \text{ kg}$ قرار گرفته است. فاصله این دو جسم تا فضا‌نورد به ترتیب $r_1 = 142 \text{ m}$ و $r_2 = 215 \text{ m}$ می باشد و اضلاع متصل کننده این دو جسم به فضا‌نورد زاویه 120° می ساند. فرض کنید که فضا‌نورد و دو جسم، اجرام نقطه ای هستند. اندازه و جهت نیروی کل وارده بر فضا‌نورد از طرف دو جسم در این لحظه را بیابید.

• بخشی از پاسخ: اندازه نیروی گرانشی وارده توسط هر کدام از دو جسم به صورت زیر به دست می آید.



$$F_{a1} = G \frac{m_a m_1}{r_1^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(105 \text{ kg})(346 \text{ kg})}{(215 \text{ m})^2}$$

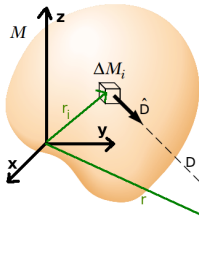
$$= 5.24 \times 10^{-11} \text{ N} = 52.4 \text{ pN},$$

$$F_{a2} = G \frac{m_a m_2}{r_2^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(105 \text{ kg})(184 \text{ kg})}{(142 \text{ m})^2}$$

$$= 6.39 \times 10^{-11} \text{ N} = 63.9 \text{ pN}.$$

• با استفاده از قانون کسینوس ها (و یا هر روش دلخواه) نشان دهید که اندازه نیروی کل برابر است با $F_a = 5.8 \times 10^{-11} \text{ N} = 58 \text{ pN}$ و جهت این نیرو برابر است با $\phi = 69.7^\circ$.

گرانش یک توزیع جرم پیوسته

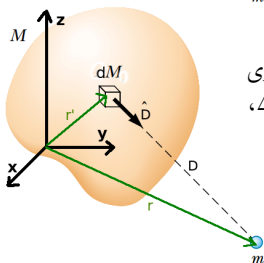


توزیع جرم پیوسته مقابل را در نظر بگیرید. برای پیدا کردن نیروی وارده از طرف این توزیع جرم به جرم نقطه ای m ، می توانیم توزیع جرم را به اجرام بسیار کوچک (المان های جرم) ΔM_i تجزیه می کنیم. سپس از اصل برهم‌نهی استفاده می کنیم و با جمع‌بندی نیروی کل را می یابیم:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \Delta \vec{F}_i = -Gm \sum_{i=1}^n \frac{\Delta M_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = -Gm \sum_{i=1}^n \frac{\Delta M_i}{|\vec{D}|^2} \hat{D}$$

که در آن $\vec{D} = \vec{r} - \vec{r}_i$ نشان دهنده بردار واصل بین المان و جرم

نقطه ای و $\hat{D} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$ نشان دهنده بردار یکه در جهت آن می باشد.

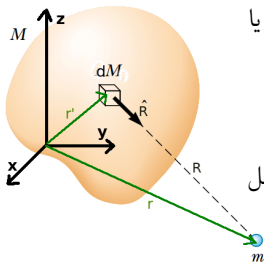


البته هرچقدر المان های جرم کوچکتر باشند، مقدار پیدا شده برای سری بالا به مقدار واقعی نزدیکتر خواهد بود. در حالت حدی $\Delta M_i \rightarrow 0$ ، این جمع‌بندی تبدیل به انتگرال می شود:

$$\vec{F} = -Gm \int \frac{dM (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -Gm \int \frac{dM}{|\vec{D}|^2} \hat{D}$$

که در آن $\vec{D} = \vec{r} - \vec{r}'$ و $\hat{D} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

روش المان ها



دقت کنید که المان dM می تواند یک المان جرم خطی، سطحی و یا حجمی باشد:

$$dM = \lambda dl \quad \text{line element}$$

$$dM = \sigma dA \quad \text{surface element}$$

$$dM = \rho dV \quad \text{volume element}$$

اگر مساله مورد نظر ما "به اندازه کافی" تقارن نداشته باشد، آنگاه حل انتگرال

$$\vec{F} = -Gm \int \frac{dM (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -Gm \int \frac{dM}{|\vec{D}|^2} \hat{D}$$

می تواند بسیار چالش برانگیز باشد؛ هرچند، چنین انتگرال هایی را می توان همیشه حداقل به صورت عددی حل کرد.

ولی اگر مساله به اندازه کافی تقارن داشته باشد، آنگاه با استفاده هوشمندانه از روش المان ها می توانیم مساله را به مراتب ساده تر حل کنیم.

روشی که در اینجا باید به کار ببریم، کاملاً شبیه به روشی است که در حل مسائل فیزیک ۲ (الکتریسیته و مغناطیس) و الکترومغناطیس به کار خواهیم برد.

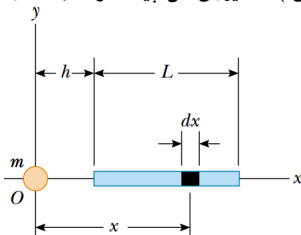
مثال اول

یک میله همگن به جرم M و طول L را در نظر بگیرید. فاصله لبه سمت چپ این میله تا جرم m برابر h می باشد. نیروی کل وارد شده از طرف میله به جرم نقطه ای را بیابید.

پاسخ: میله را به المان هایی به طول dx و جرم دیفرانسیلی dM تجزیه می کنیم. با استفاده از تناسب می توان یافت: $dM = M dx/L$. حالا اندازه نیروی گرانشی ناشی از این المان بر جرم m را می یابیم:

$$dF = \frac{G m dM}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \frac{GmM}{L} \frac{dx}{x^2}$$

جهت این نیرو نیز در جهت بردار $-\hat{\mathbf{i}}$ می باشد. چرا؟! حالا با توجه به اصل برهمه می توان همه المان های نیرو را با هم جمع بست (انتگرال گیری) تا نیروی کل پیدا شود. به حدود انتگرال دقت کنید.



$$\mathbf{F}_g = -Gm \int_h^{h+L} \frac{M dx}{L} \frac{1}{x^2} (-\mathbf{i}) = Gm \frac{M}{L} \int_h^{h+L} \frac{dx}{x^2} \mathbf{i}$$

$$\mathbf{F}_g = \frac{GmM}{L} \left[-\frac{1}{x} \right]_h^{h+L} \mathbf{i} = \frac{GmM}{h(h+L)} \mathbf{i}$$

توجه: حدود انتگرال با توجه به موقعیت ماده ای که گرانش را فراهم می کند، تعیین شده است.

مثال دوم

میدان گرانشی یک حلقه همگن به جرم M و شعاع a در فاصله z از مرکز حلقه را بیابید.
پاسخ: میله را به المان هایی با جرم دیفرانسیلی dM تجزیه می کنیم. فاصله همه این المان ها تا نقطه مشاهده P برابر است با $\sqrt{a^2 + z^2}$ ؛ بنابراین داریم:

$$dg = \frac{G dM}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \frac{G dM}{a^2 + z^2}$$

ولی جهت المان های میدان گرانشی با تغییر موقعیت المان جرم تغییر می کند. در هر حال، با توجه به تقارن مساله، المان های افقی $dg \sin \theta$ همدیگر را خنثی می کنند در حالی که المان های عمودی $dg \cos \theta$ همدیگر را تقویت می کنند.

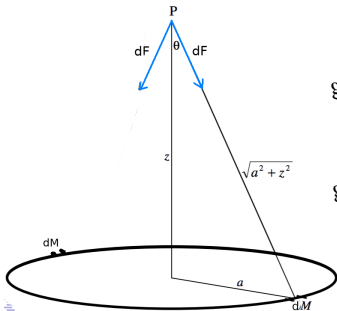
در نتیجه میدان کل برابر است با

$$g = \int dg = \int \frac{G dM}{a^2 + z^2} \cos \theta$$

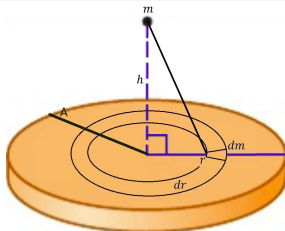
که در آن $\cos \theta = z / \sqrt{a^2 + z^2}$. بنابراین:

$$g = \frac{G}{a^2 + z^2} \cos \theta \int_0^M dM = \frac{G M z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

میدان در راستای محور عمود به سمت مرکز حلقه است.



مثال سوم



نیروی گرانشی از طرف یک قرص همگن به جرم M و شعاع A که به جرم نقطه ای m در فاصله h از مرکز قرص وارد می شود، را بیابید.

پاسخ: برای حل این مساله با استفاده از فرمول

$$\vec{F} = -Gm \int \frac{dM (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -Gm \int \frac{dM}{D^2} \hat{D}$$

باید سه انتگرال دوگانه نسبتاً سراسر را حل کنیم. ولی راه حل هوشمندانه توجه به تقارن مساله و استفاده از روش المان هاست. در مثال قبل، میدان یک حلقه را یافتیم. حال می توانیم قرص را به تعداد بسیار زیادی حلقه به جرم dm ، شعاع r ، ضخامت dr و با میدان معلوم تجزیه کنیم. میدان تک تک این المان ها عمودی و به سمت پایین است.

$$g = \frac{G dm h}{(r^2 + h^2)^{3/2}}$$

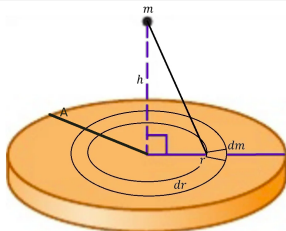
بنابراین، بنا به اصل برهمندی میدان کل برابر است با

$$g = \int dg = \int \frac{G dm h}{(r^2 + h^2)^{3/2}}$$

عبارت بالا یک انتگرال یگانه با دو متغیر است. برای سادگی یکی از متغیرها را به دیگری تبدیل می کنیم:

$$dm = M \frac{2\pi r dr}{\pi A^2} = M \frac{r dr}{A^2}$$

مثال سوم - ادامه



نیروی گرانشی از طرف یک قرص همگن به جرم M و شعاع A که به جرم نقطه ای m در فاصله h از مرکز قرص وارد می شود، را بیابید.

ادامه پاسخ: با جایگذاری تغییر متغیر بالا داریم:

$$g = \int \frac{G \frac{r M dr}{A^2} h}{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{GMh}{A^2} \int_0^A \frac{r dr}{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

توجه: حدود انتگرال با توجه به موقعیت ماده ای که گرانش را فراهم می کند، تعیین شده است.

انتگرال بالا را می توان با استفاده از تغییر متغیر زیر ساده تر کرد:

$$u = r^2 + h^2 \Rightarrow \frac{du}{dr} = 2r \Rightarrow du = 2r dr$$

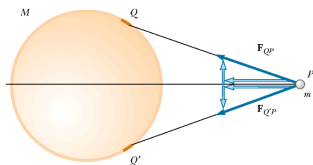
با استفاده از تغییر متغیر بالا داریم:

$$g = \frac{GMh}{A^2} \int_0^A \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = \frac{GMh}{A^2} \left[\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right] = -\frac{GMh}{A^2} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right]_0^A$$

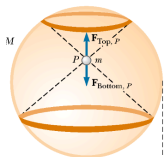
در نتیجه میدان و نیرو به صورت زیر به دست می آیند:

$$g = -\frac{GMh}{A^2} \left(\frac{1}{\sqrt{A^2 + h^2}} - \frac{1}{h} \right) \Rightarrow F = mg = \frac{r GMm}{A^2} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{A^2 + h^2}} \right)$$

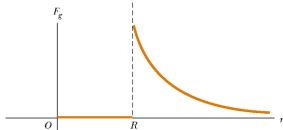
قضیه های پوستر نیوتن



(a)



(b)



مساله گرانش توزیع جرم های گسترده از اولین چالش های بزرگ ریاضیاتی در درک نظریه گرانش بود و در واقع نیوتن با ”ابداع حساب انتگرال” توانست بر این چالش پیروز شود. البته شیوه اثبات نیوتن با روشی که در اینجا به کار می رود، تفاوت هایی دارد (اثبات نیوتن هندسی تر و بر اساس بررسی المان های دیفرانسیلی است).

قضیه اول پوستر: نیروی گرانشی وارده از طرف یک پوستر همگن کروی بر یک جرم نقطه ای خارج آن پوستر برابر است با نیرو در صورتی که کل جرم جسم کروی در مرکز آن متمرکز باشد.

قضیه دوم پوستر: هیچ نیروی گرانشی از طرف یک پوستر همگن کروی بر یک جرم نقطه ای داخل آن پوستر وارد نخواهد شد.

اثبات قضیه اول پوسته

- قضیه اول پوسته: نیروی گرانشی وارده از طرف یک پوسته همگن کروی بر یک جرم نقطه ای خارج آن پوسته برابر است با نیرو در صورتی که کل جرم جسم در مرکز آن متمرکز باشد.
- اثبات: یک پوسته کروی به شعاع R ، چگالی ρ و ضخامت t را در نظر بگیرید. می خواهیم نیروی وارده از طرف این پوسته بر یک جسم نقطه ای به جرم m که در فاصله r از مرکز پوسته قرار دارد، را بیابیم. برای اینکار پوسته را به حلقه های متوالی به شعاع $R \sin \theta$ و جرم dM تجزیه می کنیم. مرکز این حلقه در فاصله $PQ = r - R \cos \theta$ از جرم نقطه ای قرار گرفته است. بنابراین، نیروی وارده از طرف حلقه به جرم نقطه ای برابر است با

$$dF = \frac{G m dM}{x^2} \cos \alpha$$

چون همه اجزای این المان به فاصله x از جرم نقطه ای هستند.

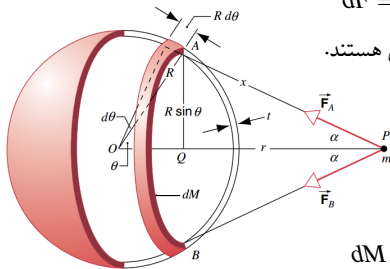
$$\cos \alpha = \frac{r - R \cos \theta}{x}$$

همچنین توجه کنید که حجم المان حلقه ای برابر است با

$$dV = t(R d\theta)(2\pi R \sin \theta)$$

بنابراین جرم حلقه برابر است با

$$dM = \rho dV = 2\pi t \rho R^2 \sin \theta d\theta$$



اثبات قضیه اول پوسته

- قضیه اول پوسته: نیروی گرانشی وارده از طرف یک پوسته همگن کروی بر یک جرم نقطه ای خارج آن پوسته برابر است با نیرو در صورتی که کل جرم جسم در مرکز آن متمرکز باشد.
- ادامه اثبات: از طرفی توجه کنید که فعلا سه متغیر x ، α و θ داریم که باید تبدیل به یک متغیر شوند. این کار ممکن است چون این سه متغیر مستقل نیستند. مثلا با استفاده از قانون کسینوس ها در مثلث $\triangle AOP$ داریم:

$$x^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta \Rightarrow R \cos \theta = \frac{r^2 + R^2 - x^2}{2r} *$$

از اینجا می توان مقدار $\cos \alpha$ را به دست آورد:

$$\cos \alpha = \frac{r - R \cos \theta}{x} = \frac{r - \frac{r^2 + R^2 - x^2}{2r}}{x} = \frac{r^2 - R^2 + x^2}{2rx}$$

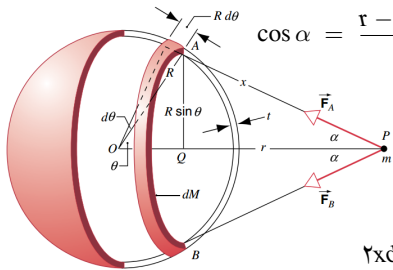
در نتیجه المان نیرو به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$dF = \frac{G m dM}{x^2} \times \frac{r^2 - R^2 + x^2}{2rx}$$

توجه کنید که همچنان دو متغیر x و $\sin \theta$ را داریم
(دومی در dM). می توانیم با استفاده از رابطه *

$$2x dx = 2rR \sin \theta d\theta$$

زاویه θ را نیز حذف کنیم:



اثبات قضیه اول پوسته

● قضیه اول پوسته: نیروی گرانشی وارده از طرف یک پوسته همگن کروی بر یک جرم نقطه ای خارج آن پوسته برابر است با نیروی که کل جرم جسم در مرکز آن متمرکز باشد.

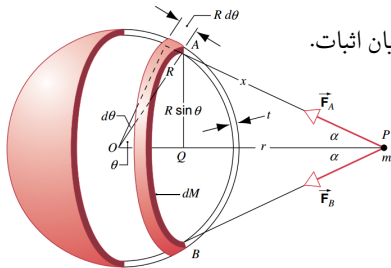
● ادامه اثبات: در نهایت المان نیروی به صورت زیر نوشته می شود:

$$dF = \frac{G m (\rho \pi R^2 \sin \theta d\theta) r^2 - R^2 + x^2}{x^3} = \frac{\pi G t \rho m R}{r^2} \left(\frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1 \right) dx$$

سپس با انتگرال گیری (و جایگذاری حدود درست x) می توان نوشت:

$$dF = \frac{\pi G t \rho m R}{r^2} \int_{r-R}^{r+R} \left(\frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1 \right) dx = \frac{\pi G t \rho m R}{r^2} \times 4R = \frac{GMm}{r^2}$$

در اینجا از رابطه $M = 4\pi R^2 t \rho$ استفاده کرده ایم. پایان اثبات.



اثبات قضیه دوم پوستر

• قضیه دوم پوستر: هیچ نیروی گرانشی از طرف یک پوستر همگن کروی بر یک جرم نقطه ای داخل آن پوستر وارد نخواهد شد.

• اثبات قضیه دوم پوستر بر اساس شکل زیر است. روش اثبات بسیار شبیه به قضیه اول است؛ هرچند در اینجا حد پایین انتگرال برابر با $R - r$ می باشد.

$$dF = \frac{\pi G t \rho m R}{r^2} \int_{R-r}^{r+R} \left(\frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1 \right) dx = \frac{\pi G t \rho m R}{r^2} \times 0 = 0$$

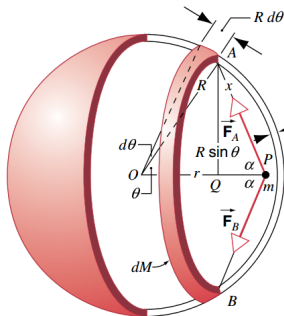
پایان اثبات.

• توجه کنید که درستی قضیه های پوستر فقط برای نیروهای عکس مجذوری (مثال دیگر: نیروی کولن) برقرار است. نیروهای دیگر چنین ویژگی ندارند.

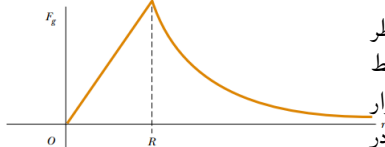
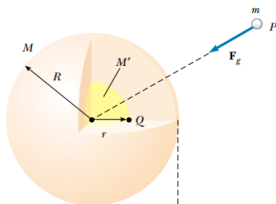
• قضیه های پوستر را می توان به راحتی با استفاده از قانون گوس در گرانش

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi G M_{in}$$

و یا قانون گوس در الکترواستاتیک اثبات کرد.



نتایج قضیه های پوسته برای کره های توپر



$$\mathbf{F}_g = -\frac{GmM}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{for } r \geq R$$

$$\mathbf{F}_g = -\frac{GmM'}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{for } r < R$$

کره هایی که معمولا با آنها سر و کار داریم توپر هستند. خوشبختانه قضیه های پوسته تکلیف نیروی وارد شده از طرف کره های توپر را هم تعیین می کنند. هرچند، باید تقارن کروی توزیع جرم رعایت شده باشد.

۱- یک کره توپر با تقارن کروی توزیع جرم را در نظر بگیرید. نیروی کل وارده از طرف این کره به یک جرم نقطه ای در خارج کره برابر است با نیرو در صورتی که کل جرم جسم کروی در مرکز آن متمرکز باشد.

۱- یک کره توپر با تقارن کروی توزیع جرم را در نظر بگیرید. به یک جرم نقطه ای در داخل کره توپر فقط آن لایه هایی که در شعاع کمتر از جرم نقطه ای قرار دارند نیرو وارد می کنند. لایه های بیرونی تاثیری در نیروی گرانش وارده به جرم نقطه ای ندارند.

به صورت خلاصه، با توجه به شکل بالا داریم.

⇐⇐

مثال

فرض کنید زمین کره ای توپر با چگالی ثابت می باشد و ما تونلی به صورت قطری در زمین حفر کرده ایم. الف) اگر ذره ای به جرم m را در این تونل رها کنیم، نیروی وارده به ذره وقتی در فاصله r از مرکز زمین قرار گرفته است، چقدر است؟ ب) حرکت این ذره چگونه است؟

پاسخ الف) کره زمین را به پوسته هایی به جرم dM تجزیه می کنیم. حال با توجه به نتیجه قضیه های پوسته می دانیم که هر پوسته خارج از شعاع r به ذره مورد نظر نیرو وارد نخواهد کرد. ولی پوسته های داخل شعاع r یک نیروی دیفرانسیلی برابر با $dF = GmdM/r^2$ به ذره وارد می کنند. نیروی کل وارده بر ذره برابر است با

$$F = \int dF = \frac{Gm}{r^2} \int_0^M dM = \frac{GmM'}{r^2}$$

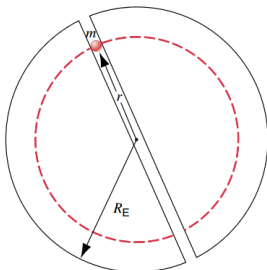
از تناسب می توان به سادگی دید که جرم داخل شعاع r برابر است با

$$\frac{M'}{M_E} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R_E^3} \Rightarrow M' = M_E \frac{r^3}{R_E^3}$$

و نیروی وارده به ذره وقتی در فاصله r از مرکز زمین قرار گرفته است:

$$F = \frac{GmM'}{r^2} = \frac{GmM_E}{R_E^3} r$$

پاسخ ب) نیروی بالا متناسب با فاصله و به سمت مرکز زمین است. این نیرو شبیه به نیروی فنر است. بنابراین حرکت ذره نوسانی خواهد بود.



نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید روش محاسبه گرانش اجسام گسترده و مفهوم قضیه های پوسته را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ اصل برهمنی را توضیح دهید.
- ۲ اصل برهمنی برای سیستم های گسسته و پیوسته چگونه نوشته می شود؟
- ۳ چطور می توان میدان گرانشی یک توزیع بار گسسته را یافت؟
- ۴ چطور می توان میدان گرانشی یک توزیع بار پیوسته را یافت؟
- ۵ در چه حالتی می توان از روش المان ها برای یافتن گرانش توزیع بارهای پیوسته استفاده کرد؟
- ۶ مفهوم قضیه های اول و دوم پوسته را توضیح دهید.
- ۷ گرانش یک جسم توپر با تقارن کروی را چطور می توان یافت؟

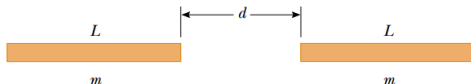
اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.

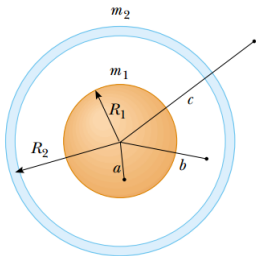
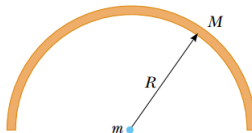


تمرین

- دو میله همگن به جرم m و طول L که در فاصله d از هم قرار دارند، چه نیروی گرانشی نسبت به هم وارد می کنند؟



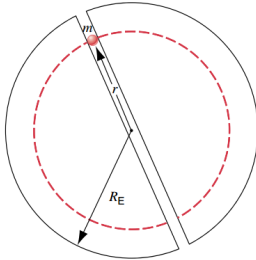
- یک کمان نیم دایره به جرم M و شعاع R چه نیرویی به یک جرم نقطه ای m در مرکز دایره وارد می کند؟



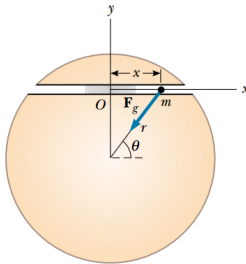
- یک کره همگن به جرم m_1 درون یک پوسته کروی به جرم m_2 قرار گرفته است. میدان گرانشی در نقاط به شعاع های a ، b و c نسبت به مرکز کره را بیابید.

تمرین

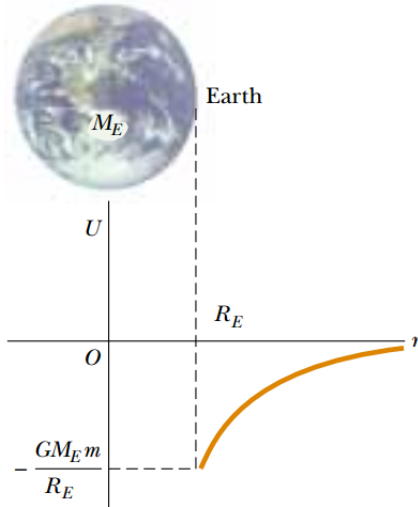
دوره تناوب ذره ای که درون چاهی به قطر زمین رها می شود چقدر است؟ شکل بالا.



دوره تناوب ذره ای که درون چاهی بین دو نقطه دلخواه از زمین رها می شود چقدر است؟ شکل پایین.



مبحث بعدی: انرژی پتانسیل گرانشی



- تاکنون بر اساس دیدگاه برداری مساله گرانش را بررسی کرده ایم. در جلسه بعد با دیدگاه اسکالر به این مساله نگاه خواهیم کرد. برای اینکار باید دوباره مفهوم انرژی پتانسیل گرانشی را واری کنیم.

منابع

- ❶ Halliday, David, Robert Resnick, and Jearl Walker; Fundamentals of physics, 10th edn. John Wiley & Sons, 2014.
- ❷ Halliday, D., R. Resnick, and K. S. Krane. "Physics, 5th edn." (2002).
- ❸ Ohanian, Hans C., and John T. Markert. Physics for engineers and scientists, 3th edn. 2007.
- ❹ Young, Hugh D., Roger A. Freedman, and Albert Lewis Ford. Sears and Zeman-sky's university physics, 13th edn. Pearson education, 2006.

با سپاس از توجه شما