

مقدمه روش های ریاضی در علوم فیزیکی

توابع در فضای مختلط

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

۱ توابع در فضای مختلط

- توابع در فضای مختلط
- اعداد مختلط در نمایش قطبی

آنچه گذشت: اعداد مختلط

- تعریف عدد مختلط: یک عدد مختلط عددی به شکل $a + bi$ می باشد که در آن a و b اعداد حقیقی هستند و $i^2 = -1$. عدد a را قسمت حقیقی و عدد b را قسمت موهومی عدد مختلط $a + bi$ می نامند.
- نکته: دو عدد مختلط با هم برابرند اگر و فقط اگر قسمت حقیقی آن دو برابر باشد و قسمت موهومی آنها نیز برابر باشد: $a + bi = x + yi \Leftrightarrow a = x \text{ and } b = y$.
- عدد مختلطی مانند $z = a + bi$ را در نظر بگیرید. در این صورت، مزدوج مختلط این عدد مختلط به صورت $\bar{z} = a - bi$ تعریف می شود.
- جمع اعداد مختلط: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- تفریق اعداد مختلط: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
- ضرب اعداد مختلط: $(a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- تقسیم اعداد مختلط:
$$\frac{a + bi}{c + di} = \left(\frac{a + bi}{c + di} \right) \left(\frac{c - di}{c - di} \right) = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$
- اگر $-r$ یک عدد حقیقی منفی باشد آنگاه ریشه دوم اصلی $-r$ برابر $i\sqrt{r} = \sqrt{-r}$ می باشد. دو ریشه $-r$ برابر $i\sqrt{r}$ و $-i\sqrt{r}$ هستند.

درباره نمادگذاری در نمایش اعداد مختلط

- اعداد مختلط را در کتاب آرفکن و همکاران با زوج مرتب هم نشان می دهند:

$$z \equiv (x, y) \equiv x + iy$$

هرچند، با توجه به اینکه نمادگذاری زوج مرتب برای موجودات دیگر (مانند بردارها) نیز استفاده می شود، ما ترجیح می دهیم در اینجا از آن استفاده نکنیم.

- همچنین مزدوج مختلط یک عدد مختلط در کتاب آرفکن و همکاران را با علامت ستاره * نشان داده شده است:

$$z^* \equiv (x, y)^* = (x, -y) = x - iy$$

توجه کنید که $z z^*$ همیشه حقیقی است. بنابراین قدرمطلق عدد z به صورت $|z| = \sqrt{z z^*}$ تعریف می شود.

Arithmetic

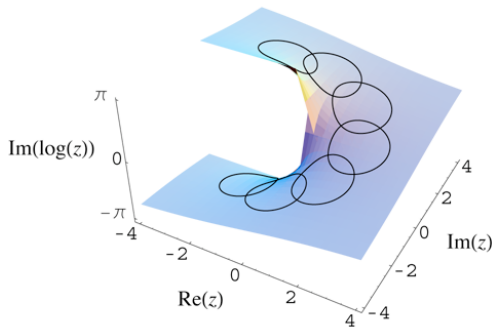
1. addition: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
2. subtraction: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
3. multiplication: $(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$
4. multiplying conjugates: $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$
5. division: $\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$

تعریف تابع در فضای مختلط

در ریاضیات، اصل تداوم
principle of permanence

می گوید که عملیات های اساسی جبر (جمع، ضرب و ...) باید در مجموعه های اعداد مختلف به صورت سازگار رفتار کنند. رعایت این اصل تاکنون، یکی از دلایل اصلی خود-سازگاری ساختارهای ریاضیاتی بوده است.

مثلا، همانگونه که پیشتر دیدیم، اعمال اصلی جبری در دستگاه اعداد مختلط بسیار شبیه به اعمال اصلی جبری در دستگاه اعداد حقیقی است. با توجه به این نکته می توان به صورت طبیعی توابع را بر روی فضای مختلط نیز تعریف کرد ، زیرا توابع نیز با اعمال عمل های اصلی بر متغیر مستقل ساخته می شوند.



تعریف تابع در فضای مختلط

- تابع $f(z) = z^2$ که بر روی دامنه اعداد مختلط (Complex : $\mathbb{C}$) تعریف شده است را در نظر بگیرید. رعایت اصل تداوم تضمین می کند که وقتی این تابع بر روی محور x محاسبه می شود، به سادگی به تابع $f(x) = x^2$ تبدیل شود، و نه یک تابع دیگر! این بسیار مهم است.
- تداوم فرم جبری (permanence of algebraic form): تعریف همه "توابع مقدماتی" را می توان به صفحه مختلط تعمیم داد. ادامه تحلیلی (analytic continuation) این توابع در فضای مختلط با تعریف این توابع در فضای حقیقی (محور x) سازگار است.
- تداوم فرم جبری به این معنی است که اگر یک تابع در فضای حقیقی به کمک یک سری تعریف شده باشد، ما می توانیم (در بازه همگرایی سری) متغیر مختلط را جایگزین متغیر حقیقی کنیم و بنابراین یک تابع از متغیر مختلط بسازیم.
- با اعمال تداوم فرم جبری به بسط تابع نمایی می توان تابع زیر را با متغیر مختلط تعریف کرد:

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{4!} z^4 + \dots$$

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{1}{2!} (iz)^2 + \frac{1}{3!} (iz)^3 + \frac{1}{4!} (iz)^4 + \dots \quad \text{حال با جاگزینی } z \rightarrow iz \text{ داریم}$$

$$= \left[1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \dots \right] + i \left[z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \dots \right]$$

تعریف تابع در فضای مختلط

- دقت کنید که بخش های حقیقی و موهومی محض را در عبارت زیر به صورت جداگانه نوشته ایم. اینکار مجاز است زیرا سری اولیه برای همه z ها مطلق همگراست.

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{1}{2!} (iz)^2 + \frac{1}{3!} (iz)^3 + \frac{1}{4!} (iz)^4 + \dots$$

$$= \left[1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \dots \right] + i \left[z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \dots \right]$$

- تمرین: آزمون نسبت دالامبر برای همه متغیرها (حقیقی و مختلط) درست است. با استفاده از آزمون نسبت دالامبر نشان دهید که هر کدام از سری های درون براکت همگرا هستند.

- پرسش: با توجه به بخش سری های مشهور در ریاضی-فیزیک، توضیح دهید که هر کدام از سری های موجود در براکت های زیر

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{1}{2!} (iz)^2 + \frac{1}{3!} (iz)^3 + \frac{1}{4!} (iz)^4 + \dots$$

$$= \left[1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \dots \right] + i \left[z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \dots \right]$$

نشان دهنده چه تابعی هستند.

فرمول اویلر

• سری های موجود در براکت های بالا نشان دهنده توابع سینوس و کسینوس هستند. در نتیجه می توان نوشت:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

این نتیجه که فرمول اویلر نام دارد، یکی از مهمترین روابط موجود در ریاضیات است و برای همه مقادیر حقیقی و مختلط z درست است. هرچند، معمولاً این رابطه برای مقادیر حقیقی z استفاده می شود.

Euler's Formula

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

Euler's identity

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

توابع در فضای مختلط

- هر تابع مانند $w(z)$ که بر روی دامنه مختلط $z = x + iy \in \mathbb{C}$ تعریف می شود را علی الاصول می توان به دو بخش حقیقی و مجازی تقسیم کرد. اینکار را هنگام محاسبه جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد مختلط نیز انجام دادیم. در نتیجه می توان نوشت:
- $$w(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

که در آن $u(x, y)$ و $v(x, y)$ توابعی "حقیقی" بر حسب متغیرهای مستقل x و y هستند.

- برای مثال برای تابع $f(z) = z^2$ داریم:

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$$

پس می توان نوشت $u(x, y) = x^2 - y^2$ و $v(x, y) = 2xy$.

- قسمت حقیقی (Real Part) هر تابع مختلط را با $\Re w(z)$ و قسمت موهومی (Imaginary Part) آن را با $\Im w(z)$ نشان می دهند. بنابراین می توان نوشت:

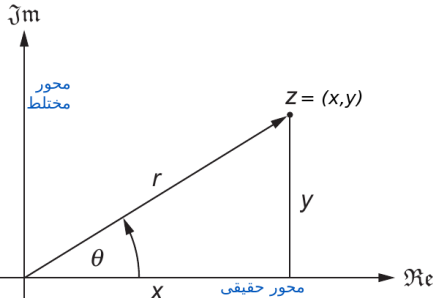
$$w(z) = u(x, y) + i v(x, y) \Rightarrow \Re w(z) = u(x, y) \text{ and } \Im w(z) = v(x, y)$$

- مزدوج مختلط تابع $w(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ برابر با $w^*(z) = u(x, y) - i v(x, y)$ می باشد.

- توجه: در حالت کلی تابع $w^*(z)$ با تابع $w(z^*)$ برابر نیست. پرسش: این دو تابع در چه حالتی با هم برابرند؟

نمایش اعداد مختلط در نمودار آرگان

- یک راه برای کسب شهود مناسب درباره اعداد مختلط این است که این اعداد را با نقاطی در صفحه مختلط نشان دهیم. چنین شکلی را نمودار آرگان (و یا آرگاند: Argand diagram) می نامند.
- در این تصور هندسی از اعداد مختلط، معمول بر این است که محور افقی در نمودار آرگان مولفه حقیقی عدد را نشان می دهد در حالی که محور عمودی نشان دهنده مولفه مختلط است. به همین دلیل محور افقی در نمودار آرگان را محور حقیقی (Real axis) و محور عمود را محور موهومی (Imaginary axis) می نامند. در هنگام استفاده از نمودار آرگان، بهتر است عدد مختلط را به صورت زوج مرتب $z = (x, y)$ نشان دهیم. شکل زیر را ببینید.

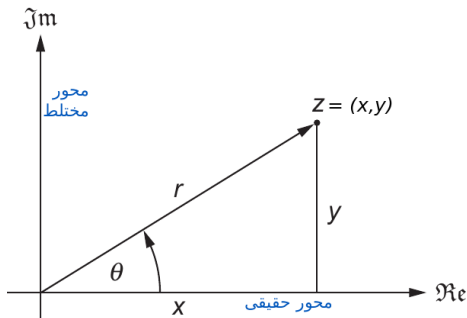


نمایش در مختصات قطبی: موثرترین راه برای تصور اعداد مختلط

- یک راه معادل استفاده از مختصات قطبی (r, θ) برای نمایش اعداد مختلط است. در این صورت با استفاده از شکل زیر می توان نوشت:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad \text{or} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} y/x$$

- توجه: فراموش نکنید که بُرد تابع آرک تانژانت $\tan^{-1}$ بازه $(-\pi/2, \pi/2)$ می باشد. بنابراین برای تشخیص درست موقعیت نقطه $z = (x, y)$ در مختصات قطبی باید به مقادیر x و y مراجعه کرد.



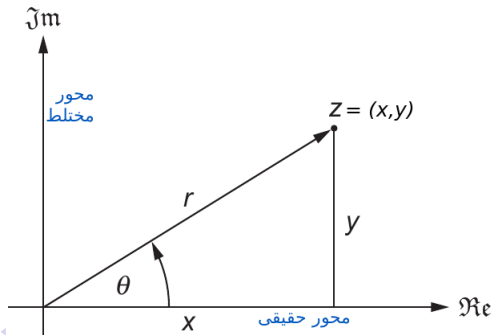
نمایش در مختصات قطبی: موثرترین راه برای تصور اعداد مختلط

- حال با توجه به رابطه اوایلر $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ می توان به رابطه بنیادی زیر رسید:

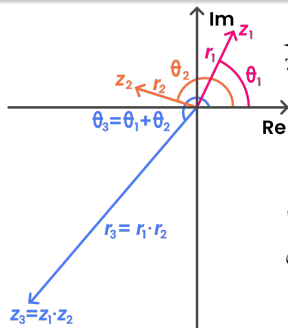
$$x + iy = r (\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta} = z$$

تمرین: ثابت کنید که $|z| = r$. بنابراین می توان نتیجه گرفت که اندازه (قدرمطلق) عدد z با فاصله آن تا مبدا مختصات آرگان سنجیده می شود.

- در نظریه متغیرهای مختلط، عدد r را قدرمطلق (و یا اندازه: modulus) عدد z می نامند در حالی که θ را فاز و یا آرگومان (argument) عدد z می گویند: $\theta = \arg(z)$.



اعمال جبری بر روی اعداد مختلط با استفاده از مختصات قطبی



● حال برخی اعمال جبری بر روی اعداد مختلط را با استفاده از مختصات قطبی بررسی خواهیم کرد. مثلاً در ضرب دو عدد مختلط z و z' داریم:

$$zz' = (re^{i\theta})(r'e^{i\theta'}) = (rr')e^{i(\theta+\theta')}$$

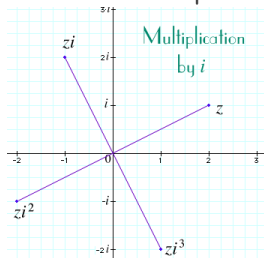
و یا $zz' = rr' [\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')]$

به عبارت دیگر، حاصلضرب zz' در نمودار آرگان اندازه‌ای برابر با حاصلضرب اندازه‌ها (یعنی rr') خواهد داشت در حالی که آرگومان (فاز) حاصلضرب برابر است با $\theta + \theta'$.

● نتیجه: حاصلضرب در نمودار آرگان مانند دوران عمل می‌کند (شکل بالا را ببینید). این مشاهده ساده از حساب مختلط باعث شده است که تقریباً تمام مسائل دوران در مکانیک کلاسیک و به ویژه کوانتومی با استفاده از فرمالیزم مشابهی توصیف شود.

● تمرین: نشان دهید که اندازه کمیت z/z' برابر r/r' و آرگومان آن برابر $\theta - \theta'$ می‌باشد.

● تمرین: درستی شکل پایین را توضیح دهید.

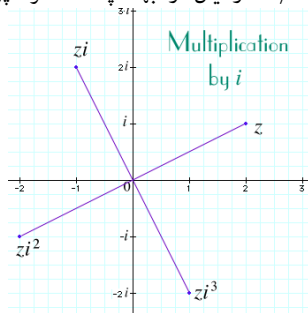


تمرین

پاسخ: در شکل زیر داریم $z = 2 + i$ ، که معادل است با مقدار $z = re^{i\theta}$ که در آن

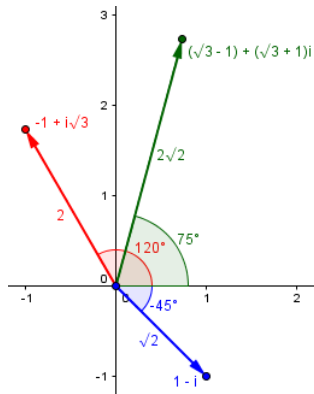
$$r = \sqrt{zz^*} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \quad \theta = \arctan \frac{1}{2} \approx 0.46 \text{ rad}$$

همچنین داریم $i = e^{i\pi/2}$. در نتیجه عدد $zi = \sqrt{5} \exp[i(\theta + \pi/2)]$ نسبت به عدد z به اندازه $\pi/2$ رادیان در جهت پادساعتگرد چرخیده است. همچنین داریم $i^2 = -1 = e^{i\pi}$. در نتیجه عدد $zi^2 = \sqrt{5} \exp[i(\theta + \pi)]$ نسبت به عدد z به اندازه π رادیان در جهت پادساعتگرد چرخیده است. به علاوه داریم $i^3 = -i = e^{3i\pi/2}$. در نتیجه عدد $zi^3 = \sqrt{5} \exp[i(\theta + 3\pi/2)]$ نسبت به عدد z به اندازه $3\pi/2$ رادیان در جهت پادساعتگرد چرخیده است و ...



تمرین

- الف) نشان دهید $(1-i)(-1+i\sqrt{3}) = (\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+1)i$
- ب) این حاصلضرب را با استفاده از مختصات قطبی نیز انجام دهید. نتیجه در شکل زیر آمده است.



- نتیجه: ضرب و تقسیم اعداد مختلط در مختصات قطبی راحت تر است در حالی که جمع و تفریق اعداد مختلط در مختصات دکارتی راحت تر است.

رفتار $z \pm z^*$

- تمرین: با استفاده از تشابه با بردارهای دوبعدی درستی رابطه زیر را نشان دهید:

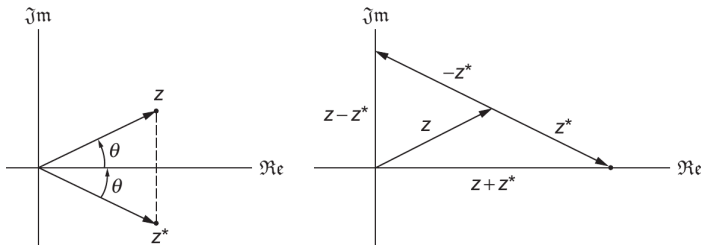
$$||z| - |z'|| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$$

- به علاوه با توجه به اینکه اندازه کمیت $z^* = re^{-i\theta}$ برابر با اندازه z بوده ولی فاز آن در یک علامت منفی متفاوت است، می توان به راحتی دید که

$$z + z^* = 2 \operatorname{Re} z = 2r \cos \theta \quad z - z^* = 2i \operatorname{Im} z = 2ir \sin \theta \quad *$$

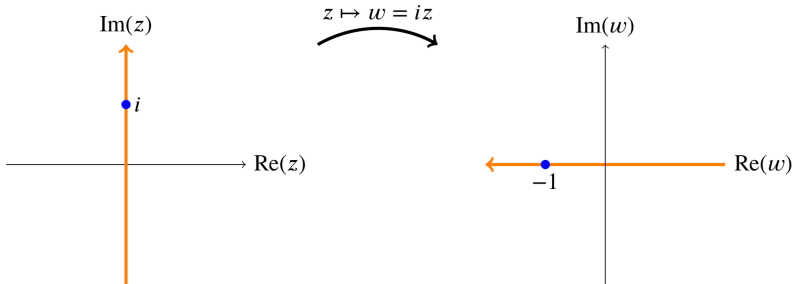
یعنی $z + z^*$ همیشه یک کمیت حقیقی و $z - z^*$ همیشه یک کمیت موهومی است.

- تمرین: دلیل درستی رابطه * را با استفاده از شکل زیر به صورت هندسی توضیح دهید.



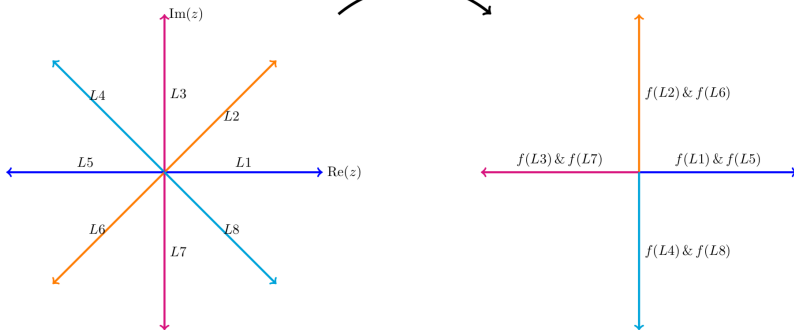
نگاشت از فضای z به فضای $w(z)$

- می توان از نمودار آرگان برای نگاشت (mapping) از فضای z به فضای $w(z)$ استفاده کرد. در این حالت هر منحنی از فضای xy به یک منحنی در فضای uv تصویر خواهد شد. توجه کنید که چنین نگاشتی را با علامت $z \mapsto w(z)$ نشان می دهند. نمونه هایی از این نگاشت ها را در ادامه ببینید.



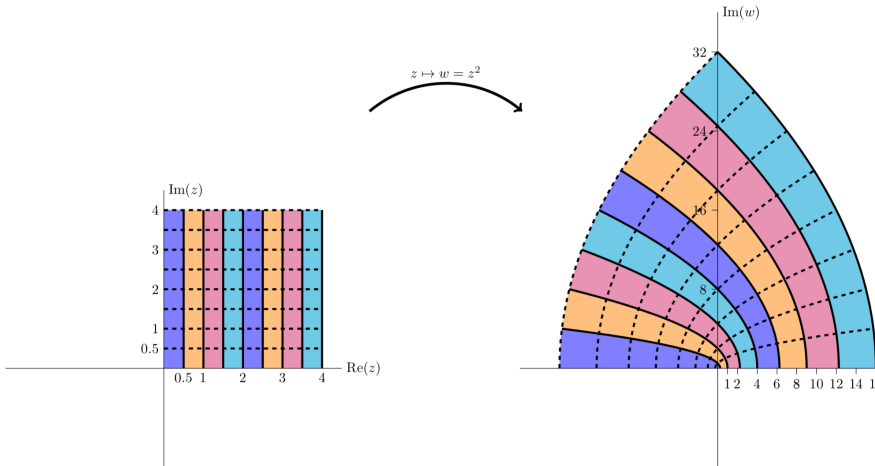
نمونه ای از نگاشت $z \mapsto w(z) = z^2$ تمرین: توضیح دهید که در نگاشت $z \mapsto w(z) = z^2$ در زیر چه اتفاقی رخ داده است. منبع:<https://math.libretexts.org/>

$$z \mapsto w = z^2$$



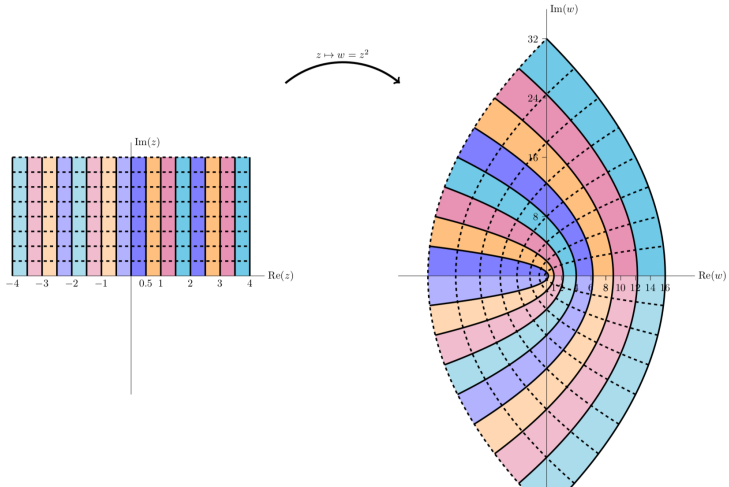
نمونه ای از نگاشت $z \mapsto w(z) = z^2$

- تمرین: توضیح دهید که در نگاشت $z \mapsto w(z) = z^2$ در زیر چه اتفاقی رخ داده است. منبع:
<https://math.libretexts.org/>



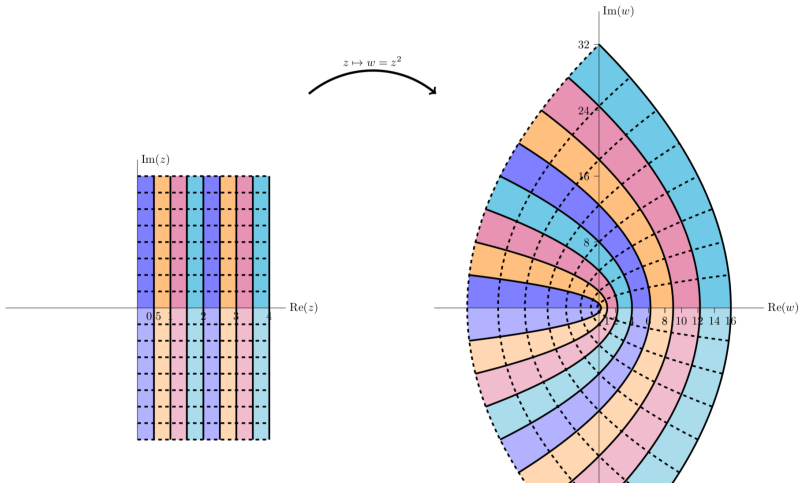
نمونه ای از نگاشت $z \mapsto w(z) = z^2$

- تمرین: توضیح دهید که در نگاشت $z \mapsto w(z) = z^2$ در زیر چه اتفاقی رخ داده است. منبع:
<https://math.libretexts.org/>



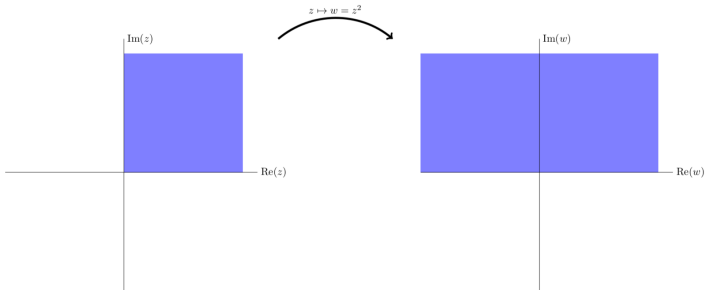
نمونه ای از نگاشت $z \mapsto w(z) = z^2$

- تمرین: توضیح دهید که در نگاشت $z \mapsto w(z) = z^2$ در زیر چه اتفاقی رخ داده است. منبع: <https://math.libretexts.org/>



نمونه ای از نگاشت $z \mapsto w(z) = z^2$

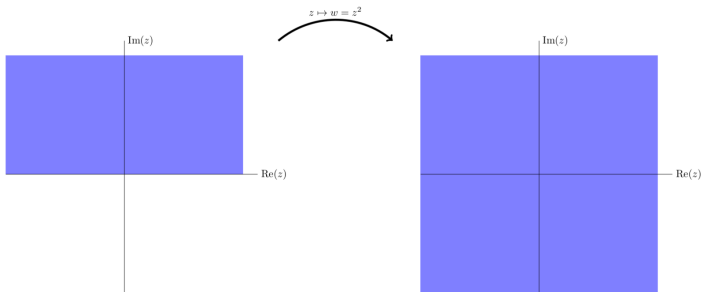
- تمرین: توضیح دهید که در نگاشت $z \mapsto w(z) = z^2$ در زیر چه اتفاقی رخ داده است. منبع:
<https://math.libretexts.org/>



نمونه ای از نگاشت $z \mapsto w(z) = z^2$

تمرین: توضیح دهید که در نگاشت $z \mapsto w(z) = z^2$ در زیر چه اتفاقی رخ داده است. منبع:

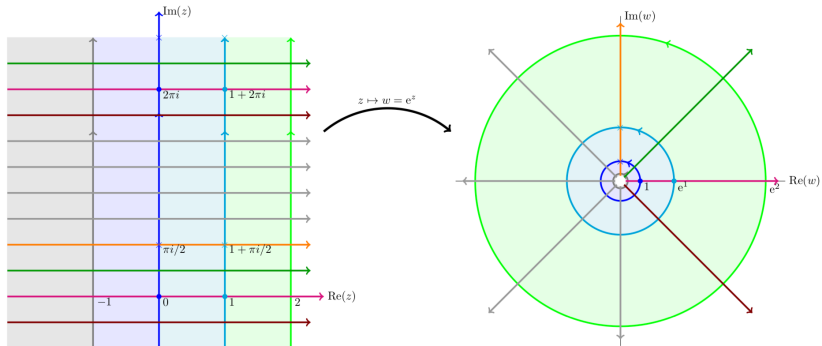
<https://math.libretexts.org/>



نمونه ای از نگاشت $z \mapsto w(z) = e^z$

تمرین: توضیح دهید که در نگاشت $z \mapsto w(z) = e^z$ در زیر چه اتفاقی رخ داده است. منبع:

<https://math.libretexts.org/>



نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید توابع در فضای مختلط و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ منظور از مزدوج مختلط یک عدد مختلط چیست؟
 - ۲ منظور از قدرمطلق (اندازه) یک عدد مختلط چیست؟
 - ۳ منظور از اصل تداوم در ریاضیات چیست؟ منظور از تداوم فرم جبری چیست؟
 - ۴ درباره ادامه تحلیلی توابع در فضای مختلط تحقیق کنید.
 - ۵ بسط سری $\exp(iz)$ را بنویسید. آیا این بسط همگراست؟ چرا؟
 - ۶ رابطه اوایلر را بنویسید. اتحاد اوایلر را بنویسید.
 - ۷ منظور از قسمت حقیقی و قسمت موهومی توابع مختلط چیست؟
 - ۸ آیا در حالت کلی رابطه $w(z^*) = w^*(z)$ درست است؟
 - ۹ منظور از نمودار آرگان چیست؟ محور حقیقی و محور مختلط را با رسم شکل نشان دهید.
 - ۱۰ منظور از نمایش اعداد مختلط در مختصات قطبی چیست؟
 - ۱۱ منظور از اندازه و فاز (آرگومان) یک عدد مختلط چیست؟
 - ۱۲ توضیح دهید که چرا ضرب در نمودار آرگان مانند دوران عمل می کند.
 - ۱۳ توضیح دهید که چرا ضرب و تقسیم اعداد مختلط در مختصات قطبی و جمع و تفریق آنها در مختصات دکارتی راحت تر است.
 - ۱۴ منظور از نگاشت در صفحه مختلط چیست؟ چگونگی رسم نگاشت ها در صفحه مختلط را توضیح دهید.
- اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فرااموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.



تمرین

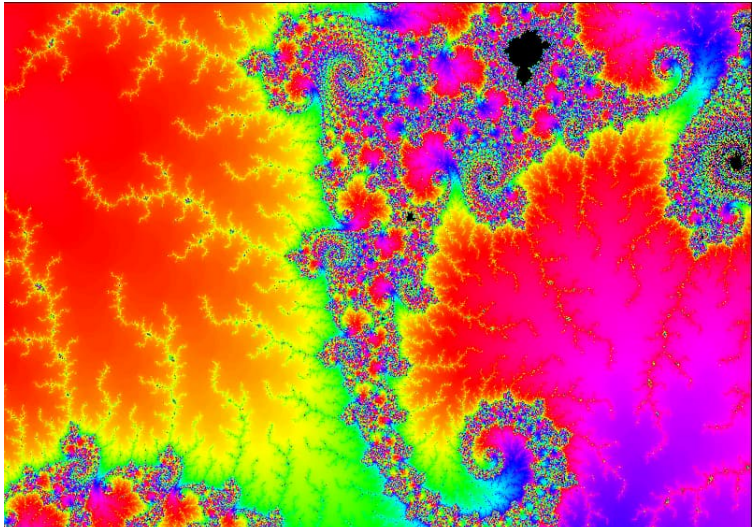
- تمرین های موجود در متن درس را پاسخ دهید.
- برای یک تابع دلخواه $w(z)$ درستی روابط زیر را نشان دهید.

$$\left| |w(z)| - |w'(z)| \right| \leq |w(z) \pm w'(z)| \leq |w(z)| + |w'(z)|,$$

$$\Re w(z) = \frac{w(z) + [w(z)]^*}{2}, \quad \Im w(z) = \frac{w(z) - [w(z)]^*}{2}$$

مبحث بعدی: مباحثی در جبر اعداد مختلط

- در جلسه بعد جبر اعداد مختلط را بیشتر بررسی خواهیم شد.



منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)

با سپاس از توجه شما

