

دینامیک سیستم های کوانتومی

اسپین در میدان مغناطیسی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ اسپین در میدان مغناطیسی
- تقدم اسپینی
- فاکتور ژيرومغناطیسی

تحول یک ذره اسپینی در میدان مغناطیسی

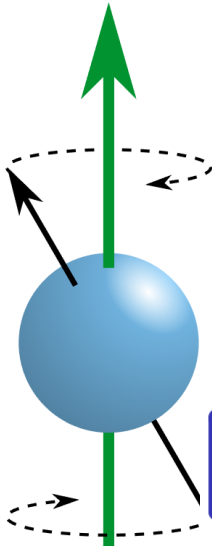
• به عنوان ساده ترین مثال در مساله تحول زمانی، ما دینامیک یک ذره اسپین $1/2$ (مثل یک الکترون به جرم m_e) با ممان مغناطیسی $e\hbar/2m_e c$ را در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ بررسی می کنیم.

• پیشتر در درس ”آزمایش اشترن-گرلاخ و نتایج آن” در بخش ”مفاهیم بنیادی مکانیک کوانتومی” انرژی پتانسیل این ذره را به دست آورده ایم. در اینجا فرض می کنیم که انرژی جنبشی ذره ناچیز است؛ در نتیجه هامیلتونی ذره عملاً همان انرژی پتانسیل ذره در میدان مغناطیسی است:

$$H = - \left(\frac{e}{m_e c} \right) \vec{S} \cdot \vec{B}$$

که در آن $e < 0$ همان بار الکترون است. همچنین از یکاهای CGS استفاده شده است؛ بنابراین واحد میدان های الکتریکی و مغناطیسی یکسان است. برای تبدیل به آحاد SI شما می توانید c را حذف کنید.

مفاهیم بنیادی مکانیک کوانتومی
آزمایش اشترن-گرلاخ و نتایج آن



تحول یک ذره اسپینی در میدان مغناطیسی

• حال فرض کنید که میدان مغناطیسی ثابت است (اگر ثابت نباشد، چه کار کنیم؟!) و در جهت z می باشد. در اینصورت هامیلتونی ذره به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$H = - \left(\frac{eB}{m_e c} \right) S_z$$

توجه کنید که با توجه به رابطه بالا، هامیلتونی و اسپین S_z در یک ثابت با هم اختلاف دارند. در نتیجه این دو مشاهده پذیر با هم جابجا می شوند و ویژه حالت های S_z ویژه حالت های هامیلتونی (طیف انرژی سیستم) نیز هستند. دو تراز انرژی موجود برای هامیلتونی این سیستم عبارتند از

$$E_{\pm} = \mp \frac{eB\hbar}{2m_e c} \quad \text{for } |S_z \pm\rangle$$

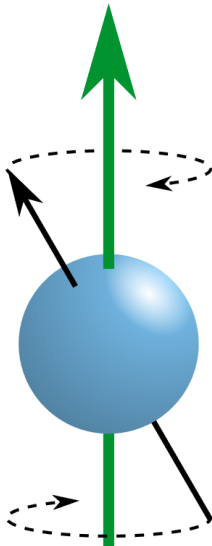
پرسش: کدام حالت انرژی بیشتری دارد؟

• معمولا در مکانیک کوانتومی ساده تر است که انرژی ها را برحسب ضرایب $\hbar\omega$ بنویسیم. به همین دلیل فرکانس ω را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\omega = \frac{|e|B}{m_e c}$$

تا اختلاف انرژی بین ترازهای بالا و پایین برابر $\hbar\omega$ شود. حال می توان هامیلتونی را به صورت ساده تر مقابل نوشت:

$$H = \omega S_z$$



تحول زمانی اسپین در میدان مغناطیسی

- با توجه به بحث های قبل می دانیم که همه اطلاعات لازم تحول ذره در عملگر تحول زمانی نهفته است:

$$U(t, 0) = \exp\left(\frac{-i\omega S_z t}{\hbar}\right)$$

این عملگر باید بر روی کت حالت اولیه سیستم اثر کند تا کت حالت در زمان دلخواه t را به دست دهد. برای محاسبات آینده از ویژه کت های S_z یعنی $|+\rangle$ و $|-\rangle$ استفاده می کنیم. مثلاً کت حالت اولیه سیستم را به صورت $|\alpha\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle$ می نویسیم. در نتیجه، کت حالت سیستم در هر زمان دلخواه برابر است با

$$|\alpha, t_0 = 0; t\rangle = U(t, 0) |\alpha\rangle = \exp\left(\frac{-i\omega S_z t}{\hbar}\right) (c_+|+\rangle + c_-|-\rangle)$$

حال با توجه به اینکه $S_z|\pm\rangle = (\pm\hbar/2)|\pm\rangle$ ، تحول زمانی در رابطه اخیر به صورت زیر نوشته می شود:

$$|\alpha, t_0 = 0; t\rangle = c_+ \exp\left(\frac{-i\omega t}{2}\right) |+\rangle + c_- \exp\left(\frac{+i\omega t}{2}\right) |-\rangle$$

- مثلاً فرض کنید که حالت اولیه سیستم کت $|\alpha\rangle = |S_z+\rangle = |+\rangle$ باشد؛ در نتیجه داریم $c_+ = 1$ و $c_- = 0$. در نتیجه می توان از رابطه بالا به راحتی دید که سیستم در زمان t همچنان در حالت $|+\rangle$ باقی خواهد ماند. البته انتظار این را نیز داشتیم چون کت $|+\rangle$ در اینجا یک حالت پایا است.

تحول زمانی اسپین در میدان مغناطیسی

• حالا فرض کنید که حالت اولیه سیستم کت $|\alpha\rangle = |S_x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$

باشد؛ در نتیجه داریم $c_+ = 1/\sqrt{2}$ و $c_- = 1/\sqrt{2}$. همچنین این سوال مطرح شده است که احتمال حضور سیستم در حالت $|S_x\pm\rangle$ در زمان t چقدر است. برای محاسبه این احتمال داریم:

$$\begin{aligned} |\langle S_x; \pm | \alpha, t_0 = 0; t \rangle|^2 &= \left| \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \langle + | \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \langle - | \cdot \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \exp \left(\frac{-i\omega t}{2} \right) | + \rangle \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \exp \left(\frac{+i\omega t}{2} \right) | - \rangle \right] \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{2} \exp \left(\frac{-i\omega t}{2} \right) \pm \frac{1}{2} \exp \left(\frac{+i\omega t}{2} \right) \right|^2 \\ &= \cos^2 \frac{\omega t}{2} \quad \text{for } S_x+, \\ &= \sin^2 \frac{\omega t}{2} \quad \text{for } S_x-. \end{aligned}$$

توجه کنید که با وجودی که اسپین در ابتدا در حالت $|S_x+\rangle$ است، برهمکنش با میدان مغناطیسی باعث دوران اسپین می شود. مثلاً ذره در زمان $t = \pi/\omega$ در حالت $|S_x-\rangle$ قرار می گیرد.

تقدم اسپینی و مقدار چشمداشتی اسپین

• همچنین توجه کنید که مجموع احتمالات حضور ذره در دو حالت $|S_x +\rangle$ و $|S_x -\rangle$ برابر یک می باشد. از نظر فیزیکی این نکته بدان معنی است که ذره بالاخره در یکی از حالت ها باید موجود باشد! از نظر ریاضیاتی نیز با توجه به ویژگی یکانی بودن عملگر تحول زمانی انتظار این را داشتیم.

• در درس ”اندازه گیری در مکانیک کوانتومی“ دریافتیم که مقدار چشمداشتی یک عملگر مانند A با ویژه مقادیر a_i وقتی سیستم در حالت $|\phi\rangle$ قرار دارد برابر است با

$$\langle A \rangle = \langle \phi | A | \phi \rangle = \sum_i a_i |\langle a_i | \phi \rangle|^2$$

با استفاده از فرمول بالا می توان مقدار چشمداشتی عملگر S_x در حالت $|S_x +\rangle$ را یافت.

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \left(\frac{\hbar}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right) + \left(\frac{-\hbar}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right) \\ &= \left(\frac{\hbar}{2} \right) \cos \omega t, \end{aligned}$$

پس کمیت $\langle S_x \rangle$ با فرکانس ω در حال نوسان است.

• تمرین: برای حالت یاد شده نشان دهید که $\langle S_y \rangle = (\hbar/2) \sin \omega t$ و $\langle S_z \rangle = 0$. مفهوم فیزیکی این سه نتیجه این است که اسپین در صفحه xy در حال دوران است.

شواهد تجربی برای تقدم اسپینی

- از لحاظ تجربی، تقدم اسپینی به خوبی تایید شده است. در واقع توافق این آزمایش با تجربه به حدی است که معمولا برای بررسی دیگر پدیده های کوانتومی از آن استفاده می شود.
- توجه کنید که هامیلتونی معرفی شده در ابتدای این بخش برای برهکنش اسپین با میدان مغناطیسی با فرض نقطه ای بودن ذره به دست آمده است. در این حالت نسبت ژیرومغناطیسی در فرکانس

$$\Omega = \frac{g|e|B}{2m_e c}$$

دقیقا برابر $g = 2$ می باشد. ولی تصحیحات مراتب بالاتر که از نظریه الکترودینامیک کوانتومی می آیند مقدار ثابت ژیرومغناطیسی را تغییر می دهند. این تصحیحات تا دقت بسیار خوبی با تجربه توافق دارند. در واقع با فرض ثابت ساختار ریز $1/137$ $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0 \hbar c) \simeq 1/137$ تصحیحات مراتب بالاتر به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{g}{2} = 1 + C_2\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) + C_4\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + C_6\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + C_8\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + \dots$$

$$+ a_{\mu\tau} + a_{\text{hadronic}} + a_{\text{weak}},$$

مقدار آزمایشگاهی برای الکترون (Odom et al. PRL 97, 030801 (2006)) به صورت زیر است. توافق تجربه و نظریه (دوازده رقم اعشار تا سال 2006) در این مورد بالاترین است.

$$g/2 = 1.001\,159\,652\,180\,85(76) [0.76 \text{ ppt}],$$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید مفهوم تحول اسپین در میدان مغناطیسی را به درستی توضیح داده و برخی کاربردهای آنها را بیان کنید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ گوید:

● هامیلتونی برهمکنش اسپین در میدان مغناطیسی چگونه به دست می آید؟

● اختلاف انرژی دو تراز اسپینی در میدان مغناطیسی چقدر است؟

● عملگر تحول زمانی اسپین در میدان مغناطیسی را بنویسید.

● اگر ذره اسپینی در ابتدا در یک حالت مانا قرار داشته باشد، بر اثر تحول زمانی در میدان مغناطیسی حالت آن چگونه تغییر می کند؟

● روش کلی پیدا کردن احتمال حضور ذره در یک حالت خاص پس از گذشت زمان t از تحول ذره را بیان کنید.

● روش کلی پیدا کردن مقدار چشمداشتی یک عملگر در یک حالت خاص پس از گذشت زمان t از تحول ذره را بیان کنید.

● اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.

↓↓↓ ↑↑↑

تمرین

● حل کلی مساله تقدم اسپینی با روشی متفاوت: فرض کنید که یک سیستم اسپینی در ابتدا در حالت

$$c_+(0) = \cos(\alpha/2) \quad c_-(0) = \sin(\alpha/2)$$

قرار دارد که در آن α یک فاز دلخواه است. می خواهیم کت حالت این سیستم در زمان دلخواه t یعنی

$$\chi = \begin{pmatrix} c_+(t) \\ c_-(t) \end{pmatrix}$$

را بیابیم. برای اینکار باید معادله شرودینگر $i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = H \chi$ را حل کنیم. در اینجا $H = \Omega S_z$ و $\Omega = \frac{g e B}{\hbar m_e c}$ فرکانس تقدیم است.

الف) نشان دهید که معادله بالا به دسته معادله زیر تبدیل می شود:

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{c}_+ \\ \dot{c}_- \end{pmatrix} = \frac{\Omega \hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{c}_{\pm} = \mp i \frac{\Omega}{2} c_{\pm}$$

ب) نشان دهید که جواب این دسته معادلات به صورت زیر است:

$$c_+(t) = \cos(\alpha/2) \exp(-i \Omega t/2), \quad c_-(t) = \sin(\alpha/2) \exp(+i \Omega t/2)$$

پ) پیدا کردن مقدار چشمداشتی:

با استفاده از رابطه $\langle A \rangle = \chi^\dagger A \chi$ روابط زیر را اثبات کنید:

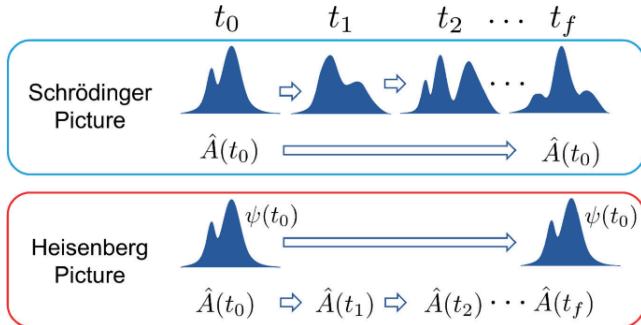
$$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos \alpha, \quad \langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin \alpha \cos(\Omega t), \quad \langle S_y \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin \alpha \sin(\Omega t).$$

<https://phys.libretexts.org/>

منبع

مبحث بعدی: تصویر شرودینگر و تصویر هایزنبرگ در مکانیک کوانتومی

- در جلسه بعد با مفاهیم تصویر شرودینگر و تصویر هایزنبرگ در مکانیک کوانتومی آشنا خواهیم شد. این دو در واقع دو روش متفاوت برای دیدن مساله تحول سیستم های کوانتومی و حل آنها هستند.



منابع

- ۱ Modern Quantum Mechanics, 3rd Edition, by J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge University Pr.
- ۲ Principles of Quantum Mechanics by Ramamurti Shankar, Plenum Press
- ۳ Quantum Mechanics: Concepts and Applications, 2nd Edition by Nouredine Zettili
- ۴ Introduction to Quantum Mechanics by David J. Griffiths
- ۵ Quantum Mechanics: An Introduction by Walter Greiner
- ۶ Quantum Physics I by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>
- ۷ Quantum Physics II by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/>
- ۸ Professor M does Science,
<https://www.youtube.com/@ProfessorMdoesScience>

با سپاس از توجه شما

