

مبانی نسبیت خاص

یافتن تبدیلات لورنتس به روشی ساده

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم

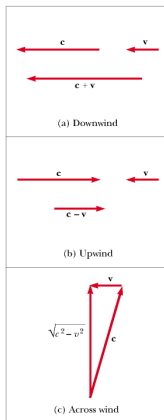


دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ یافتن تبدیلات لورنتس به روشی ساده
- یک ناوردای بسیار مهم فضا زمانی
- تبدیلات لورنتس به روشی ساده

آنچه تاکنون آموخته ایم: اصول نظریه نسبیت خاص اینشتین



در بخش اول، یعنی ”مبانی نسبیت خاص”، درباره دلایل تجربی و تئوری برای تغییر نظریه حرکت بحث کردیم. در این بخش دیدیم که اینشتین نظریه نسبیت خاص را بر اساس دو اصل زیر معرفی کرد:

اصل نسبیت اینشتین: قوانین فیزیک در تمام دستگاه های لخت یکسان هستند. هیچ دستگاه لخت مرجعی وجود ندارد.

اصل ثبات سرعت نور: در فضای تهی مقدار سرعت نور در تمام دستگاه های لخت یکسان و برابر c است.

در ابتدا به نظر می رسد اصل نسبیت با اصل ثبات سرعت نور در تضاد است؛ زیرا بنا به تبدیلات گالیله انتظار داریم که سرعت نور در دستگاه های مختلف متفاوت باشد. برای رفع این مشکل، اینشتین

مفهوم همزمانی پدیده ها را تغییر داد و نسبیت همزمانی را بنیان نهاد.

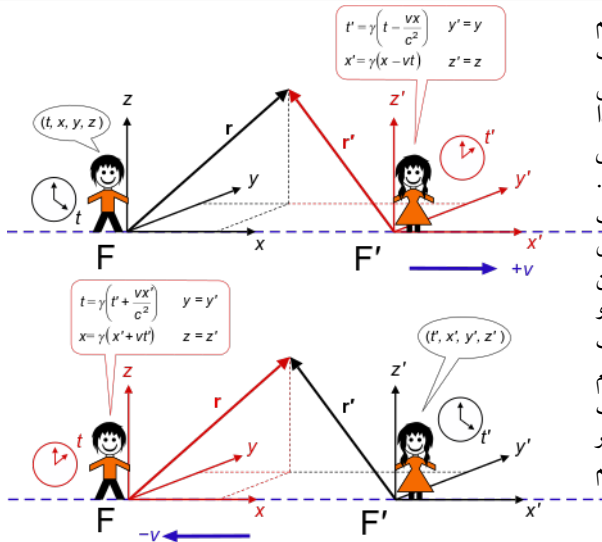
پروژه اندازه گیری بازه های مکانی را بازتعریف کرد.

در نتیجه تبدیلات جدیدی (تبدیلات لورنتس به جای تبدیلات گالیله) را معرفی کرد.

در ادامه نتایج سینماتیکی (توصیف حرکت) و دینامیکی (عوامل حرکت) ناشی از این نظریه را توضیح خواهیم داد.

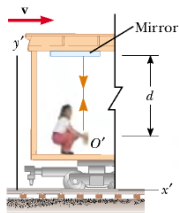
اهداف این جلسه

در این جلسه می خواهیم روشی ساده برای به دست آوردن تبدیلات لورنتس معرفی کنیم. البته در ابتدا یک ناوردای مهم فضازمانی را معرفی خواهیم کرد. سپس، از اصل ثبات سرعت نور و رابطه انقباض طول (که در جلسه پیش به آن رسیدیم) استفاده کرده و تبدیلات لورنتس را به دست می آوریم. در بخش دوم از این مجموعه، تبدیلات لورنتس را به روش بسیار پیچیده تری اثبات خواهیم کرد.

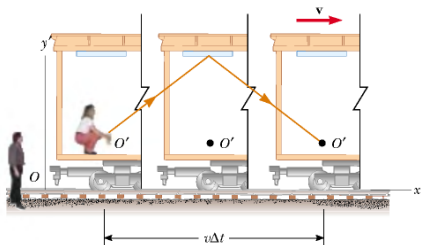


ناوردای فضازمانی

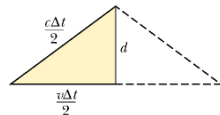
- در جلسه قبل از شکل زیر برای اثبات رابطه اتساع زمان استفاده کردیم. ولی این شکل یک ناوردای بسیار مهم را نیز به ما معرفی می کند. از دید ناظر O' که با سرعت v در قطار در حال حرکت است و یک پالس نوری را مستقیماً به سمت بالا می فرستد، مقدار فاصله d یک ناورداست. همچنین، از نظر ناظری که در کنار قطار ایستاده است، باز مقدار فاصله d یک ناورداست
$$d^2 = \left(\frac{c\Delta t}{\gamma}\right)^2 - \left(\frac{v\Delta t}{\gamma}\right)^2$$
- مقدار d یک طول عمود بر حرکت است و به صورت کلی مقدار چنین طول هایی در حرکت تغییر نخواهد کرد چون انقباض طول در راستای حرکت اتفاق می افتد.



(a)



(b)



(c)

ناوردای فضازمانی

● حال با توجه به اینکه داریم $x = v \Delta t$ ، می توان نتیجه گرفت که کمیت

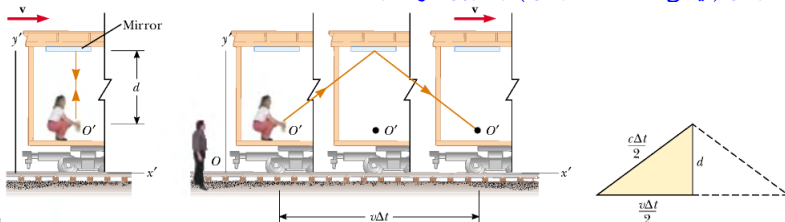
$$\Delta s^2 = \Delta d^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2$$

یک ناورداست.

● دقت کنید که مقدار یاد شده برای هر ناظر دیگر با هر سرعتی (در جهت موازی با حرکت قطار (نیز همین مقدار خواهد بود.

● در واقع در حالت کلی می توان نشان داد که کمیت $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$ برای همه ناظرهای لخت یک کمیت ناورداست.

● دیفرانسیل این کمیت (یعنی ds^2) را المان خط و یا المان طول (line element) می نامند. بعدها خواهیم فهمید که این کمیت، متریک را برای ما تعریف خواهد کرد که عملاً همه اطلاعات فضازمان (یعنی هندسه فضازمان) را درون خود دارد.

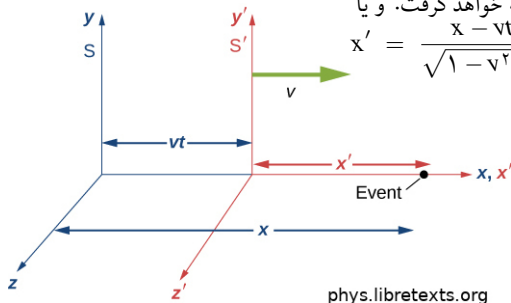


تبدیلات لورنتس

فرض کنید که دو دستگاه S و S' مطابق شکل زیر با سرعت v نسبت به هم در حال حرکت هستند. حالا رویداد خاصی را در نظر بگیرید که با مختصات $(t, x, 0, 0)$ در دستگاه S و با مختصات $(t', x', 0, 0)$ در دستگاه S' نشان داده می شود. می خواهیم تبدیل مختصات بین دو دستگاه S و S' را بیابیم.

در مکانیک نیوتنی این دو دستگاه با تبدیل مختصه مکانی $x' = x - vt$ به هم مربوط می شوند. هرچند، در جلسه پیش دیدیم که طول x' که در دستگاه S' اندازه گیری شده است، نسبت به ناظر S به اندازه $x' \sqrt{1 - v^2/c^2}$ منقبض خواهد شد. در نتیجه ناظر S تبدیل مختصه $x = vt + x' \sqrt{1 - v^2/c^2}$ نتیجه خواهد گرفت. و یا

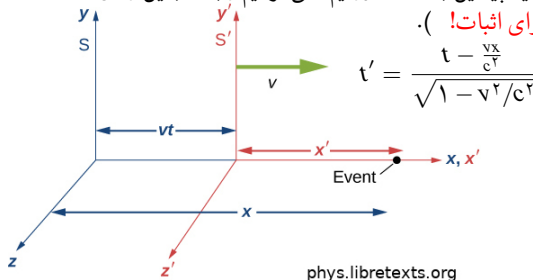
$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$



استفاده از اصل ثبات سرعت نور و روش اندازه گیری بر اساس پرتوهای نوری

- فراموش نکنیم که همه این اندازه گیری ها با پرتوهای نوری انجام می شوند. مثلاً یک پالس نوری از رویداد مورد نظر در زمان t فاصله x را می پیماید و به مبدا S می رسد. برای این پالس نوری می توان نوشت: $c = \frac{x}{t} \Rightarrow x^2 - c^2 t^2 = 0$. به همین صورت، یک پالس نوری دیگر نیز از همان رویداد در زمان t' فاصله x' را می پیماید و به مبدا S' می رسد. برای این پالس نوری نیز می توان نوشت: $c = \frac{x'}{t'} \Rightarrow x'^2 - c^2 t'^2 = 0$. در واقع با جمع بندی این دو رابطه می توان رابطه مهم $x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2$ را به دست آورد. این رابطه نتیجه مستقیم اصل ثبات سرعت نور و روش خاص اندازه گیری ماست (استفاده از پرتوهای نوری).

- از معادله اخیر و معادله ای که در اسلاید پیشین به دست آوردیم، می توانیم رابطه تبدیل زمان ها را بیابیم (تمرین: چند دقیقه وقت برای اثبات!).



phys.libretexts.org

اثبات

- برای اثبات رابطه اخیر از دو رابطه $x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ و $x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2$ استفاده خواهیم کرد. از رابطه اول مقدار x'^2 را یافته و از رابطه دوم زمان t'^2 را پیدا می کنیم:

$$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow x'^2 = \frac{(x-vt)^2}{1-v^2/c^2}$$

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2 \Rightarrow c^2 t'^2 = x'^2 - x^2 + c^2 t^2$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$c^2 t'^2 = \frac{x^2 - 2vtx + v^2 t^2}{1-v^2/c^2} - x^2 + c^2 t^2 = \frac{x^2 - 2vtx + v^2 t^2 - (x^2 - c^2 t^2)(1-v^2/c^2)}{1-v^2/c^2}$$

حال پس از کمی ساده سازی خواهیم داشت:

$$c^2 t'^2 = c^2 \frac{(t - vx/c^2)^2}{1-v^2/c^2}$$

و یا

$$t' = \pm \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

- پرسش: فقط جواب مثبت درست است. چرا؟! •

تبدیل مختصات از دستگاه S' به دستگاه S

به همین ترتیب می توان نشان داد که تبدیل مختصات از دستگاه S' به دستگاه S صورت زیر به دست می آید:

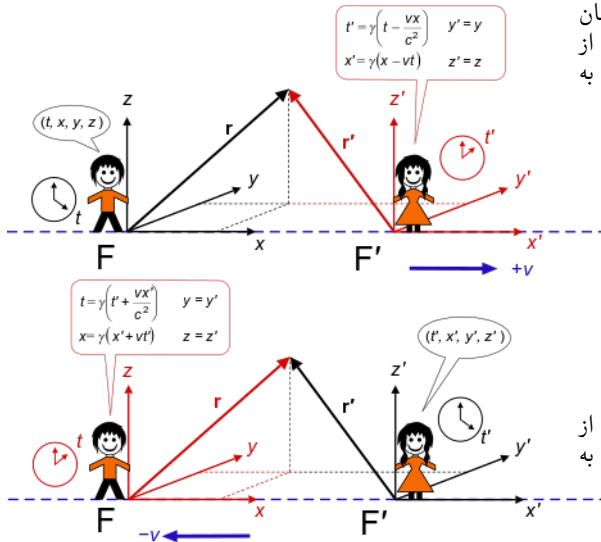
$$t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

تمرین: تبدیل مختصات از دستگاه S' به دستگاه S را به دست آورید.



يك اثبات ديگر براي ناوردايي المان خط

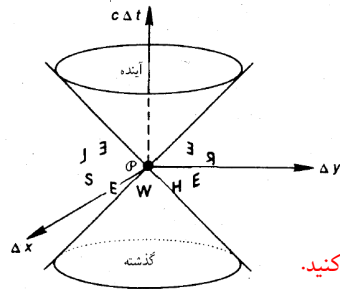
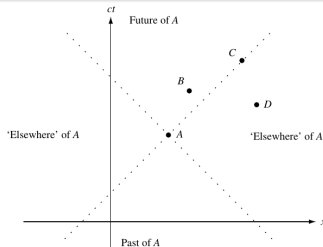
• دو رويداد ۱ و ۲ را در دستگاه هاي S و S' در نظر بگيريد. بازه زماني بين اين دو رويداد در دستگاه S را با $\Delta t = t_2 - t_1$ و در دستگاه S' را با $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ نشان مي دهيم. به همين ترتيب بازه مكاني بين اين دو رويداد در دستگاه S را با $\Delta x = x_2 - x_1$ و در دستگاه S' را با $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ نشان خواهيم داد. مي خواهيم نشان دهيد كه المان خط $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2$ تحت تبديلات لورنتس يك كميت ناورداست.

• اثبات:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + v \Delta x' / c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \Delta x = \frac{\Delta x' + v \Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2 \left(\frac{\Delta t' + v \Delta x' / c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)^2 - \left(\frac{\Delta x' + v \Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)^2 \\ \Delta s^2 &= \frac{c^2 \Delta t'^2 + v^2 \Delta x'^2 / c^2 + 2v \Delta t' \Delta x' - (\Delta x'^2 + v^2 \Delta t'^2 + 2v \Delta t' \Delta x')}{1 - v^2/c^2} \\ \Delta s^2 &= \frac{(c^2 - v^2) \Delta t'^2 - \Delta x'^2 (1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2} = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 = \Delta s'^2 \end{aligned}$$

علامت Δs^2



علامت Δs^2 نیز ناورداست. در واقع

اگر برای دو رویداد داشته باشیم $\Delta s^2 > 0$ ، آنگاه بازه Δs را زمان گونه (timelike) می نامیم. یعنی نقطه B در آینده نقطه A قرار دارد و ارتباط علی بین نقاط A و B ممکن است.

اگر برای دو رویداد داشته باشیم $\Delta s^2 = 0$ ، آنگاه بازه Δs را نورگونه (lightlike or null) می نامیم. یعنی نقاط A و C فقط و فقط با یک پالس با سرعت نور می توانند به هم مرتبط شوند.

اگر برای دو رویداد داشته باشیم $\Delta s^2 < 0$ ، آنگاه بازه Δs را فضاگونه (spacelike) می نامیم. یعنی نقاط A و D هیچگاه نمی توانند با هم ارتباط (علی) داشته باشند.

به گذشته و آینده نقطه A در ساختار "مخروط نوری" دقت کنید.
فرمول مخروط نوری: $c^2 t^2 = x^2 + y^2$

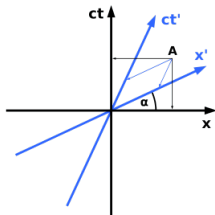
هرمان مینکوفسکی



هرمان مینکوفسکی (Hermann Minkowski) (۱۸۶۴ - ۱۹۰۹) ریاضیدان برجسته آلمانی (زاده لیتوانی کنونی) بود. پس از معرفی نظریه نسبیت خاص توسط اینشتین، میکوفسکی که استاد ریاضی اینشتین بود، تلاش کرد روش دیگری را برای به دست آوردن نتایج اینشتین (تبدیلات لورنتس) معرفی کند. مینکوفسکی، ایده خود را در طی یک سری سخنرانی مطرح کرده است که پس از مرگ او در سن ۴۴ سالگی به صورت مقاله منتشر شده است.

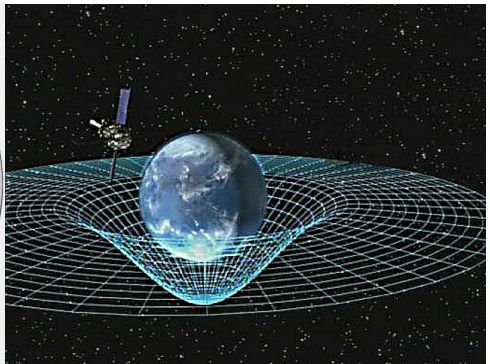
ایده اصلی مینکوفسکی این است که تبدیلات لورنتس در واقع یک دوران در دستگاه فضا-زمان است. روش مینکوفسکی از این جهت اهمیت دارد که به خوبی ناوردهای نظریه اینشتین را آشکار می کند. همچنین، از لحاظ مفهومی، در این روش، مفهوم فضا و زمان به خودی خود کمرنگ می شوند و به جای آن مفهوم فضازمان معرفی می شود. این وحدت فضا و زمان یکی از مهم ترین نتایج نظریه نسبیت خاص است.

در بخش دوم از این مجموعه، تبدیلات لورنتس را به روش مینکوفسکی به دست خواهیم آورد.



فضا زمان مینکوفسکی

Hermann Minkowski: The views of space and time which I wish to lay before you have sprung from the soil of experimental physics, and therein lies their strength. **They are radical.** Henceforth space by itself, and time by itself, are doomed to fade away into mere shadows, and only a kind of **union of the two** will preserve an independent reality.



نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید روش موجود برای به دست آوردن تبدیلات لورنتس و برخی نتایج مهم آن را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

۱ توضیح دهید که چطور می توان با استفاده از مفهوم انقباض طول، اندازه گیری بازه ها با استفاده از پالس های نوری و اصل ثبات سرعت نور تبدیلات لورنتس را به دست آورد.

۲ توضیح دهید که چرا بهتر است مفاهیم فضا و زمان را کنار گذاشته و از مفهوم فضا-زمان استفاده کنیم.

۳ کمیت ds^2 را متریک می نامند. تحقیق کنید که این کمیت چطور هندسه فضا-زمان را توضیح می دهد.

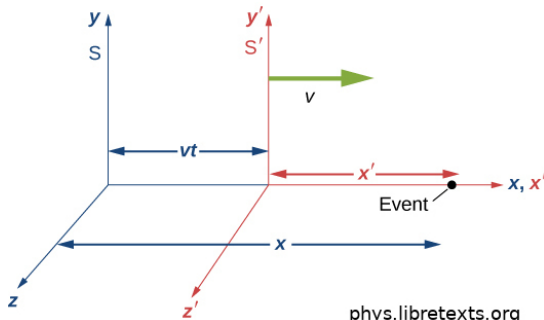
اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.



تمرین ها: زمان تحویل ۱۸ آبان ماه

- در بخش بعد تبديلات لورنتس را به صورت مستقل از مفاهيم انقباض طول و اتساع زمان به دست خواهيم آورد. نشان دهيد که در اين صورت مي توان انقباض طول و اتساع زمان را از تبديلات لورنتس نتيجه گرفت.
- يك راه ديگر براي پيدا کردن تبديلات زماني اين است که پارامتر x' را از بين دو رابطه $x' = \gamma(x - vt)$ و $x = \gamma(x' + vt')$ حذف کنيم. از اين روش استفاده کرده و رابطه $t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ را به دست آوريد.

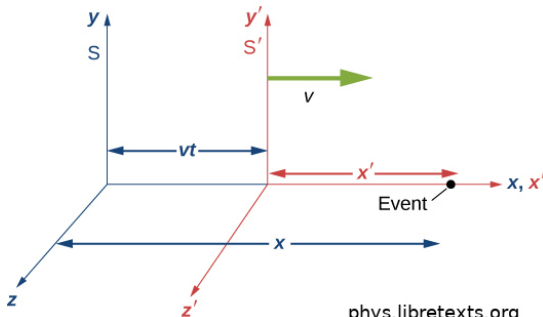


تمرین ها: زمان تحویل ۱۸ آبان ماه

فرض کنید که رابطه

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

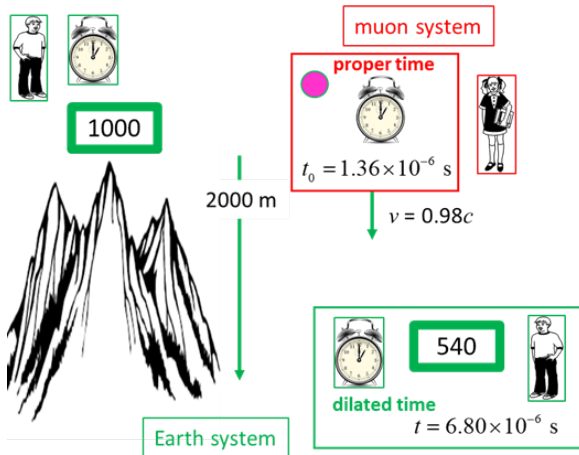
بین مختصات دو دستگاه برقرار است. به علاوه، مبدا مختصات در این دو دستگاه در $t = 0$ بر هم منطبق خواهند بود، یعنی $x' = a_{11}(x - vt)$. همچنین، در این درس نشان دادیم که رابطه $c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2$ بین این متغیرها وجود دارد. از این اطلاعات استفاده کرده و تبدیلات لورنتس را بیابید (یعنی مقادیر پارامترهای ماتریس بالا را معلوم کنید).



phys.libretexts.org

مبحث بعدی: شواهد تجربی برای انقباض طول و اتساع زمان نسبی

- در جلسه بعد شواهد تجربی برای انقباض طول و اتساع زمان را توضیح خواهیم داد.



مراجع

- ➊ Introduction to Special Relativity; Robert Resnick
- ➋ Relativity: Special, General, and Cosmological; Wolfgang Rindler
- ➌ General Relativity: An Introduction for Physicists; M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, A. N. Lasenby
- ➍ Introduction To Special Relativity; Markus Klute
<https://ocw.mit.edu/courses/8-20-introduction-to-special-relativity-january-ia>
- ➎ Leonard Susskind's Special Relativity, Find in YouTube

با سپاس از توجه شما

