

دینامیک سیستم های کوانتومی

تصویر شرویدنگر و تصویر هایزنبرگ در مکانیک کوانتومی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

تصویر شرودینگر و تصویر هایزنبرگ در مکانیک کوانتومی

- ## عملگرهای یکانی
- ### تحولات های حالت و مشاهده پذیرها در تصویر شرودینگر و هایزنبرگ

تصویر شرودینگر و تصویر هایزنبرگ

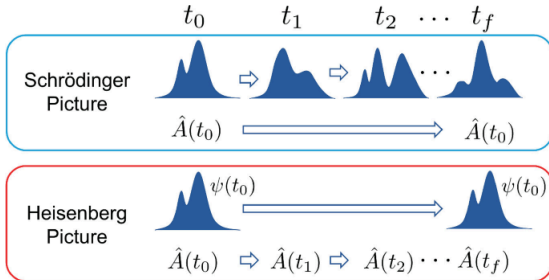
- در درس های قبل عملگر تحول زمانی $\mathcal{U}(t, t_0)$ را معرفی کردیم. این عملگر بر روی کت حالت اولیه سیستم ها اثر کرده و کت حالت سیستم در زمان دلخواه t را به دست می دهد:

$$|\alpha, t_0; t\rangle = \mathcal{U}(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle$$

Schrodinger Picture

- این شیوه توصیف تحول زمانی سیستم های کوانتومی را ”تصویر شرودینگر” می نامند.
- روش های دیگری نیز برای توصیف تحول سیستم وجود دارد. مثلاً در ”تصویر هایزنبرگ” مشاهده پذیرها با زمان تحول می یابند (شکل زیر) و کت حالت سیستم ثابت فرض می شود.

$$A^{(H)} = \mathcal{U}^\dagger(t)A^{(S)}\mathcal{U}(t)$$



دوباره عملگرهای یکانی

- البته تصویرهای دیگر نیز موجودند و این تصاویر از لحاظ نتایج فیزیک کاملاً هم ارزند؛ ولی ما فعلاً دو تصویر گفته شده را در نظر می گیریم. برای بررسی دقیق این دو نوع تصویر، ما مجدداً مفهوم عملگر یکانی و ویژگی های آن را یادآوری کرده و توسعه خواهیم داد.
- در درس ”تغییر پایه های فضا در مکانیک کوانتومی” آموختیم که از عملگرهای یکانی می توان برای ساختن پایه های جدید استفاده کرد. در واقع فهمیدیم که محتوای فیزیکی کت های حالت از یک نمایش به نمایش دیگر (با پایه های متفاوت) تغییری نمی کند؛ هرچند پایه ها تغییر می کنند و ضرایب بسط نیز تغییر می کنند.
- همچنین، در ادامه ما دو عملگر یکانی (انتقال و تحول زمانی) را تعریف کردیم که کت حالت سیستم را تغییر می دادند:

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{\text{physical change}} U|\alpha\rangle \quad U = \mathcal{T}(d\vec{x}) \quad \text{or} \quad U = \mathcal{U}(t, t_0)$$

در اینجا $U|\alpha\rangle$ نشان دهنده حالت سیستم پس از تغییر فیزیکی مورد نظر است.

- نکته اساسی این است که پس از اعمال عملگر یکانی، مقدار حاصلضرب داخلی بین کت ها بدون تغییر باقی می ماند.

$$\langle\beta|\alpha\rangle \rightarrow \langle\beta|U^\dagger U|\alpha\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle$$

تاثیر عملگرهای یکانی بر عملگرها

• به علاوه پیشتر درباره تاثیر عملگرهای یکانی بر مقادیری مانند

$$\langle \beta | X | \alpha \rangle \rightarrow \langle \beta | U^\dagger X U | \alpha \rangle = \langle \beta | U^\dagger X U | \alpha \rangle \quad *$$

بحث کرده ایم. پرسش: معنی فیزیکی عبارت بالا چیست؟

هرچند عبارت اخیر را از نظر ریاضیاتی می توان به راحتی به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\langle \beta | X | \alpha \rangle \rightarrow \langle \beta | \cdot (U^\dagger X U) \cdot | \alpha \rangle \quad **$$

عبارت های * و ** دو دیدگاه متفاوت به فیزیک تبدیل یکانی برای ما فراهم می کنند:

۱ دیدگاه اول به تبدیل یکانی سیستم ها: کت های حالت بنا به $U | \alpha \rangle \rightarrow | \alpha \rangle$

تغییر می کنند، ولی عملگرها بدون تغییر باقی می مانند.

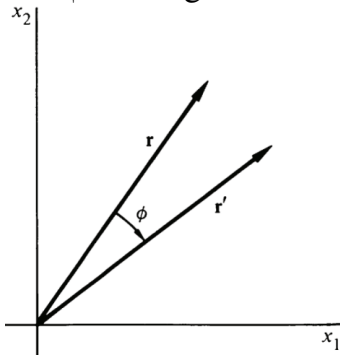
۲ دیدگاه دوم به تبدیل یکانی سیستم ها: کت های حالت بدون تغییر باقی می

مانند ولی عملگرها به صورت $U^\dagger X U \rightarrow X$ تغییر می کنند.

• پرسش: کدام دیدگاه در فیزیک کلاسیک وجود ندارد، و چرا؟

آیا چنین چیزی در فیزیک کلاسیک وجود دارد؟

- آیا در فیزیک کلاسیک نیز دو دیدگاه متفاوت وجود دارد؟
- پاسخ ساده: خیر! در فیزیک کلاسیک کت حالت سیستم (تابع معروف ψ در مکانیک کوانتومی) وجود ندارد. بنابراین تحول کت حالت نیز بی معنی است و در نتیجه دیدگاه اول اصلاً وجود ندارد. ولی تبدیل مشاهده پذیرها (مانند موقعیت، تکانه زاویه ای و ...) در فیزیک کلاسیک وجود دارد و بنابراین دیدگاه دوم مشابه با روند موجود در فیزیک کلاسیک است.
- به همین دلیل ارتباط بین مکانیک کوانتومی و فیزیک کلاسیک به صورت واضح در دیدگاه دوم نشان داده خواهد شد (قضیه اهرنفست، جلسه بعد).



مثال: عملگر انتقال در مکانیک کوانتومی

- به عنوان یک مثال، تاثیر عملگر انتقال در مکانیک کوانتومی را از دو دیدگاه متفاوت بررسی خواهیم کرد.

- بنا به دیدگاه اول، در اثر انتقال، کت حالت سیستم تغییر می کند ولی عملگر موقعیت تغییر نمیکند:

$$|\alpha\rangle \rightarrow \left(1 - \frac{i\vec{p} \cdot d\vec{r}'}{\hbar}\right) \vec{\alpha}$$

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}$$

- از طرف دیگر، در دیدگاه دوم، کت حالت سیستم بدون تغییر باقی می ماند در حالی که عملگر موقعیت تغییر می کند:

$$|\alpha\rangle \rightarrow \vec{\alpha}$$

$$\vec{r} \rightarrow \left(1 + \frac{i\vec{p} \cdot d\vec{r}'}{\hbar}\right) \vec{r} \left(1 - \frac{i\vec{p} \cdot d\vec{r}'}{\hbar}\right) \simeq \vec{r} + \frac{i}{\hbar} [\vec{p} \cdot d\vec{r}', \vec{r}] = \vec{r} + d\vec{r}'$$

لطفا درستی این محاسبه را تا آخر چک کنید.

- تمرین: نشان دهید که هر دو دیدگاه مقدار یکسانی را برای مقدار چشمداشتی موقعیت پیش بینی می کنند:

$$\langle \vec{r} \rangle \rightarrow \langle \vec{r} \rangle + \langle d\vec{r}' \rangle$$

- حالا که مفهوم تبدیل یکانی، و دو دیدگاه متفاوت به آن، را بررسی کردیم، به مساله تحول زمانی $\mathcal{U}(t, t_0)$ برمی گردیم.

تحول زمانی کت های حالت و مشاهده پذیرها

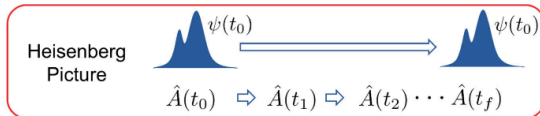
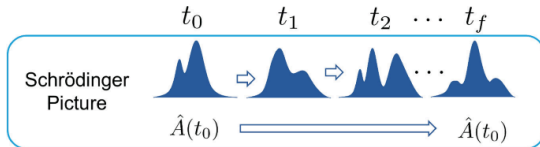
تاثیر تحول زمانی $U(t, t_0)$ را می توان به صورت

$$\langle \beta | X | \alpha \rangle \rightarrow (\langle \beta | U^\dagger(t, t_0)) X (U(t, t_0) | \alpha \rangle) = \langle \beta | U^\dagger(t, t_0) X U(t, t_0) | \alpha \rangle *$$

و یا به شکل $\langle \beta | X | \alpha \rangle \rightarrow \langle \beta | . (U^\dagger(t, t_0) X U(t, t_0)) . | \alpha \rangle *$ نوشت.
عبارت های * و ** دو دیدگاه متفاوت به ”فیزیک تحول زمانی” برای ما فراهم می کنند:

تصویر شرودینگر: کت های حالت بنا به $U(t, t_0) | \alpha \rangle \rightarrow | \alpha \rangle$ تحول می یابند، ولی عملگرها بدون تغییر باقی می مانند.

تصویر هایزنبرگ: کت های حالت بدون تغییر باقی می مانند ولی عملگرها به صورت $X \rightarrow U^\dagger(t, t_0) X U(t, t_0)$ تحول می یابند.



جمع بندی تصویر شرودینگر و تصویر هایزنبرگ

- حالت بسیار ساده ای را در نظر بگیرید که هامیلتونی مستقل از زمان است و بنابراین عملگر تحول زمانی به صورت زیر به دست می آید:

$$U(t, t_0 = 0) = U(t) = \exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right)$$

- با توجه به بحث بالا، در اثر اعمال این عملگر تحول زمانی، رفتار مشاهده پذیر دلخواهی مانند A در تصویر شرودینگر S و تصویر هایزنبرگ H به صورت زیر به هم مربوط می شود:

$$A^{(H)}(t) = U^\dagger(t) A^{(S)} U(t)$$

- دقت کنید که مشاهده پذیر A در زمان $t = 0$ در هر دو تصویر شرودینگر و هایزنبرگ یکسان است:

$$A^{(H)}(t = 0) = A^{(S)}$$

- کت های حالت نیز در زمان $t = 0$ در هر دو تصویر شرودینگر و هایزنبرگ برابر هستند:

$$|\alpha, t_0 = 0\rangle_H = |\alpha, t_0 = 0\rangle_S$$

- ولی پس از گذشت زمان t کت حالت در تصویر شرودینگر تغییر می کند:

$$|\alpha, t_0 = 0; t\rangle_S = U(t) |\alpha, t_0 = 0\rangle_S$$

- در حالی که پس از گذشت زمان t کت حالت در تصویر هایزنبرگ ثابت باقی می ماند:

$$|\alpha, t_0 = 0; t\rangle_H = |\alpha, t_0 = 0\rangle_H$$

مقدار چشمداشتی یک عملگر در تصویر شرو دینگر و تصویر هایزنبرگ

- می توان به راحتی نشان داد که مقدار چشمداشتی هر عملگری در هر دو تصویر شرو دینگر و هایزنبرگ یکسان است:

$$\begin{aligned}
 {}_S\langle\alpha, t_0 = 0; t|A^{(S)}|\alpha, t_0 = 0; t\rangle_S &= \langle\alpha, t_0 = 0|\mathcal{U}^\dagger A^{(S)}\mathcal{U}|\alpha, t_0 = 0\rangle \\
 &= {}_H\langle\alpha, t_0 = 0; t|A^{(H)}(t)|\alpha, t_0 = 0; t\rangle_H
 \end{aligned}$$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید مفهوم تصویر شرویدنگر و تصویر هایزنگر در مکانیک کوانتومی را به درستی توضیح داده و برخی کاربردهای آنها را بیان کنید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ گوید:

- ویژگی های اصلی عملگرهای یکانی را نام ببرید.
 - چند عملگر یکانی مهم در مکانیک کوانتومی را نام ببرید.
 - توضیح دهید که دو دیدگاه متفاوت به اثر عملگرهای یکانی از چه رابطه ریاضیاتی نتیجه می شود.
 - کدام دیدگاه به عملگرهای یکانی در فیزیک کلاسیک وجود ندارد و چرا؟
 - کدام دیدگاه به فیزیک کلاسیک نزدیکتر است و چرا؟
 - منظور از تصویر شرویدنگر چیست؟ تحول کت حالت و مشاهده پذیرها پس از گذشت زمان t در تصویر شرویدنگر چگونه است؟
 - منظور از تصویر هایزنگر چیست؟ تحول کت حالت و مشاهده پذیرها پس از گذشت زمان t در تصویر هایزنگر چگونه است؟
 - توضیح دهید که چرا نتایج فیزیکی حاصله از تصویر شرویدنگر و تصویر هایزنگر کاملاً هم ارزند.
- اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفاً درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.

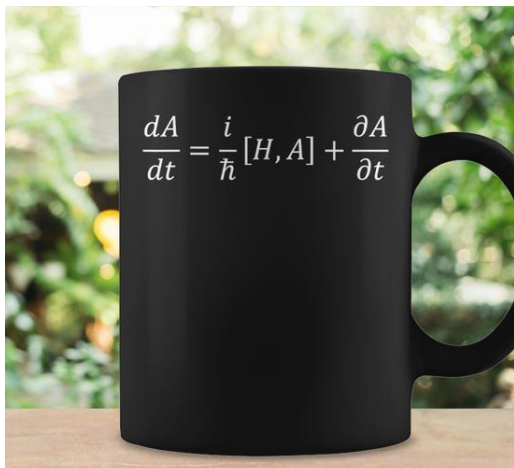


تمرین

این بار تمرین نداریم!

مبحث بعدی: معادله حرکت هایزنبرگ و قضیه اهرنفست

• در جلسه بعد معادله حرکت هایزنبرگ را به دست خواهیم آورد و با کاربردهای ابتدایی آن آشنا خواهیم شد. همچنین قضیه اهرنفست را اثبات کرده و رابطه مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی را توضیح خواهیم داد.



منابع

- ❶ Modern Quantum Mechanics, 3rd Edition, by J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge University Pr.
- ❷ Principles of Quantum Mechanics by Ramamurti Shankar, Plenum Press
- ❸ Quantum Mechanics: Concepts and Applications, 2nd Edition by Nouredine Zettili
- ❹ Introduction to Quantum Mechanics by David J. Griffiths
- ❺ Quantum Mechanics: An Introduction by Walter Greiner
- ❻ Quantum Physics I by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>
- ❼ Quantum Physics II by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/>
- ❽ Professor M does Science,
<https://www.youtube.com/@ProfessorMdoesScience>

با سپاس از توجه شما

