

فیزیک الکتریسیته و مغناطیس

پنجمین جلسہ حل تمرین

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



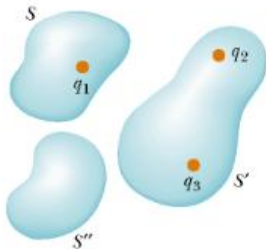
دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در زمستان ۱۳۹۹ و بهار ۱۴۰۰ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
 - خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
- h.shenavar@gmail.com
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که با تلاش بسیار امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

پنجمین جلسہ حل تمرین

- مروری بر قانون گوس
- مروری بر پتانسیل الکتریکی

یادآوری از قانون گوس



۱ قانون گوس: شار الکتریکی گذرنده از هر سطح بسته $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$ (برابر است با بار درون آن سطح بسته q_{in}) تقسیم بر ϵ_0 ؛ یعنی

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

۲ سطح بسته مذکور در قانون گوس را سطح گوسی می نامیم؛ مانند S, S', S'' در اینجا.

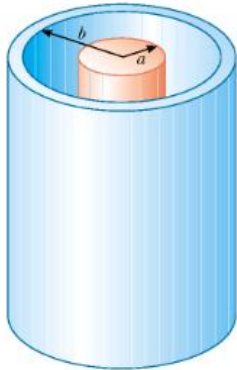
۳ لازم است که مساله مورد نظر به اندازه کافی متقارن باشد زیرا می خواهیم سطحی را پیدا کنیم که مقدار میدان الکتریکی روی آن سطح ثابت باشد و بنابراین از انتگرال خارج شود:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA \Leftarrow \text{enough symmetry}$$

اگر مساله به اندازه کافی متقارن نباشد، ساده سازی بالا امکان پذیر نبوده و بنابراین استفاده از قانون گوس (برای پیدا کردن میدان) ممکن نخواهد بود $\Leftarrow \Leftarrow$ قانون کولن.

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

مثالی از قانون گوس



قانون گوس:

دو استوانه نارسانای بی نهایت در شکل مقابل را فرض کنید. چگالی بار روی استوانه داخلی برابر $+\lambda_1$ و بار روی استوانه بیرونی برابر $-\lambda_2$ می باشد که در آن $\lambda_1 > \lambda_2$. با استفاده از قانون گوس، میدان در

الف) شعاع های $r > b$

ب) در شعاع های $a < r < b$

و پ) د شعاع های $r < a$ را بیابید.

جهت میدان در هر قسمت به کدام سو (جانب و یا خارج مرکز) است؟

توجه: در هر مورد سطح گوسی انتخاب شده را به دقت شرح دهید.

شکل از هالیدی، ویرایش هشتم.

توجه: این مساله نمونه ای از مواردی است که توزیع بار در واقع سطحی

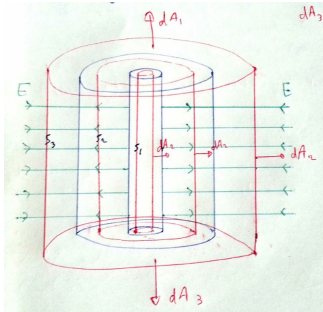
است، ولی ما با آن به صورت یک مساله یک بعدی (با توزیع بار خطی

) برخورد می کنیم. چرا؟!

پاسخ:

$$\sigma = \frac{Q}{(2\pi a)h} = \frac{1}{2\pi a} \frac{Q}{h} = \frac{1}{2\pi a} \lambda$$

پاسخ



بنابراین از قانون گوس داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\pi\epsilon_0 r}$$

از مسائل حل شده در فصل دوم می دانیم که میدان استوانه شعاعی است. بنابراین، سطح گوس باید استوانه شکل باشد.

پاسخ الف) سطح گوسی بسته S_3 به طول l و شعاع r را در نظر بگیرید. برای این سطح گوسی استوانه شکل باید مقدار شار روی هر سه سطح بالا A_1 ، پایین A_3 و جانبی A_2 را بیابیم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_1 \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 + \int_2 \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 + \int_3 \vec{E} \cdot d\vec{A}_3$$

سهم سطوح بالا و پایین در انتگرال صفر است زیرا بردار میدان $\vec{E}$ بر بردارهای سطح $d\vec{A}_1$ و $d\vec{A}_3$ عمود است؛ بنابراین

$$\int_1 \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 = \int_3 \vec{E} \cdot d\vec{A}_3 = 0$$

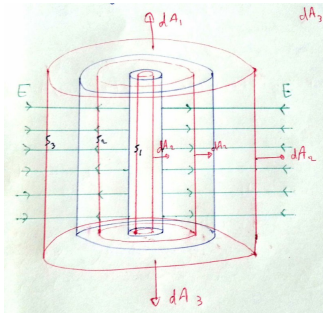
از طرف دیگر برای انتگرال روی سطح شماره ۲ داریم:

$$\int_2 \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 = \int_2 E dA_2 \cos 180^\circ = -E \int_2 dA_2 = -E(2\pi r l)$$

بار داخل سطح گوسی نیز برابر است با

$$q_{in} = (\lambda_1 - \lambda_2) l$$

پاسخ



بنابراین از قانون گوس داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r}$$

پاسخ ب) سطح گوسی بسته S_2 به طول l و شعاع r را در نظر بگیرید. برای این سطح گوسی استوانه شکل باید مقدار شار روی هر سه سطح بالا A_1 ، پایین A_3 و جانبی A_2 را بیابیم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_1 \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 + \int_2 \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 + \int_3 \vec{E} \cdot d\vec{A}_3$$

سه سطوح بالا و پایین در انتگرال صفر است زیرا بردار میدان $\vec{E}$ بر بردارهای سطح $d\vec{A}_1$ و $d\vec{A}_3$ عمود است؛ بنابراین

$$\int_1 \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 = \int_3 \vec{E} \cdot d\vec{A}_3 = 0$$

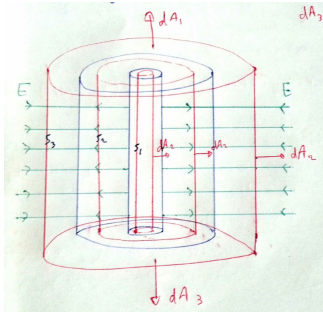
از طرف دیگر برای انتگرال روی سطح شماره ۲ داریم:

$$\int_2 \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 = \int_2 E dA_2 \cos 0 = E \int_2 dA_2 = E(2\pi r l)$$

بار داخل سطح گوسی نیز برابر است با

$$q_{in} = \lambda_1 l$$

پاسخ



بنابراین از قانون گوس داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = 0$$

پاسخ پ) سطح گوسی بسته S_1 به طول l و شعاع r را در نظر بگیرید. برای این سطح گوسی استوانه شکل باید مقدار شار روی هر سه سطح بالا A_1 ، پایین A_3 و جانبی A_2 را بیابیم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_1 \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 + \int_2 \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 + \int_3 \vec{E} \cdot d\vec{A}_3$$

سه سطوح بالا و پایین در انتگرال صفر است زیرا بردار میدان $\vec{E}$ بر بردارهای سطح $d\vec{A}_1$ و $d\vec{A}_3$ عمود است؛ بنابراین

$$\int_1 \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 = \int_3 \vec{E} \cdot d\vec{A}_3 = 0$$

از طرف دیگر برای انتگرال روی سطح شماره ۲ داریم:

$$\int_2 \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 = \int_2 E dA_2 \cos 0 = E \int_2 dA_2 = E(2\pi r l)$$

بار داخل سطح گوسی نیز برابر است با

$$q_{in} = 0$$

تعمیم دهید.

قانون گوس:

دو استوانه رسانای بینهایت با شعاع های a و b را در نظر بگیرید. بار الکتریکی به صورت غیر یکنواخت و با چگالی حجمی بار

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{r^2}{b^2}$$

بین دو استوانه (یعنی فقط در شعاع های بین a و b) پخش شده است. شکل پایین مقطع دو استوانه و توزیع بار را نشان می دهد.

با استفاده از قانون گوس میدان در

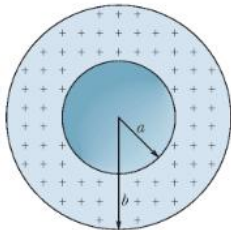
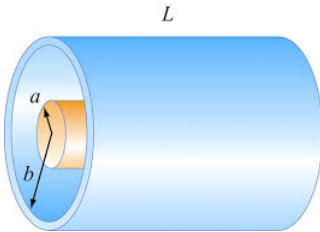
(الف) داخل استوانه کوچکتر، یعنی $r < a$

(ب) بین دو استوانه، یعنی $a < r < b$

(پ) خارج استوانه بزرگتر، یعنی $r > b$

را بر حسب فاصله r از مرکز استوانه داخلی بیابید.

توجه: در هر سه مورد سطح گوسی انتخاب شده را به دقت، و با رسم شکل، مشخص کنید.



یادآوری مفهوم پتانسیل الکتریکی



شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

۱ اگر کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ به مسیر انجام کار بستگی نداشته باشد، آنگاه آن نیرو را پایستار می نامیم. می توان برای نیروهای پایستار یک انرژی پتانسیل یکتا تعریف کرد:

$$\Delta U = U_b - U_a \equiv W_{ab} = - \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

۲ نیروی الکتریکی پایستار است؛ بنابراین، انرژی پتانسیل الکتریکی داریم.

۳ رابطه بین انرژی پتانسیل الکتریکی و پتانسیل الکتریکی

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0}$$

۴ انرژی پتانسیل الکتریکی بین دو بار نقطه ای

$$U = K \frac{q_1 q_2}{r}$$

۵ پتانسیل یک کمیت اسکالر است، یعنی جهت ندارد. چقدر خوب! لازم نیست نگران جهت کمیت ها در محاسبات خود باشیم.

• پتانسیل الکتریکی یک بار نقطه ای

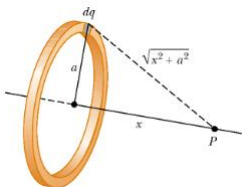
$$V = K \frac{q}{r}$$

• پتانسیل الکتریکی با استفاده از میدان:

$$V_P = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

• اصل برهمه‌نی

مثال: پتانسیل ناشی از یک حلقه باردار با چگالی بار خطی ثابت λ



شکل از فیزیک هالیدی، ویرایش پنجم.

تمرین: نشان دهید که پتانسیل حلقه در نقاط بسیار دور، یعنی $a \gg x$ ، به صورت $V \propto Q/x$ تغییر می‌کند.

تمرین: میدان روی محور x را با استفاده از رابطه

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

به دست آورید. نتیجه را با جواب به دست آمده در فصل دوم برای میدان یک حلقه باردار مقایسه کنید.

نکته مهم: با دانستن پتانسیل حلقه می‌توان پتانسیل دیسک را پیدا کرد ↓↓↓.

پتانسیل حلقه را نمی‌دانیم؛ ولی می‌دانیم که پتانسیل بار نقطه‌ای dq نشان داده شده در شکل برابر است با

$$dV = K \frac{dq}{r}$$

که در آن $dq = \lambda dx$ المان بار است در حالی که $r = \sqrt{a^2 + x^2}$ فاصله المان تا نقطه مشاهده است.

برای پیدا کردن پتانسیل کل باید از طرفین رابطه $dV = K \frac{dq}{r}$ انتگرال بگیریم:

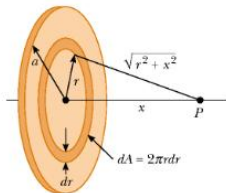
$$\int_0^V dV = \int_0^s K \frac{\lambda ds}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$V = K \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + x^2}} [s]_0^s = K \frac{\lambda s}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

که در آن s محیط حلقه است. بنابراین $Q = \lambda s$ بار کل حلقه می‌باشد:

$$V = K \frac{Q}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

مثال: پتانسیل یک دیسک باردار با چگالی سطحی بار ثابت σ



شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

تمرین: انتگرال اخیر را می توان با تغییر متغیر $u = r^2 + x^2$ حل کرد. نشان دهید که جواب به صورت زیر است:

$$V = 2K\pi\sigma \left(\sqrt{x^2 + a^2} - x \right)$$

پتانسیل دیسک را نمی دانیم. ولی می دانیم که دیسک مورد نظر از تعداد بسیار زیادی حلقه باردار تشکیل شده و پتانسیل حلقه باردار را نیز می دانیم (از مثال قبل). شکل مقابل را ببینید.

اگر بار حلقه دایفرانسیلی را با dq نشان داده و شعاع آن را r فرض کنیم، آنگاه پتانسیل ناشی از این حلقه در فاصله x از مرکز آن برابر است با

$$dV = K \frac{dq}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

که در آن $dq = \sigma dA$ بار المان حلقوی است.

برای پیدا کردن پتانسیل کل باید سهم همه حلقه ها را پیدا کرده و با هم جمع ببندیم (یادمان باشد که جمع بندی در مسائل پیوسته به معنی انتگرال گیری است):

$$\int_0^V dV = K \int \frac{\sigma dA}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

در فصل دوم دیدیم که المان مساحت حلقه برابر است با $dA = 2\pi r dr$

$$V = K\pi\sigma \int_0^a \frac{2r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

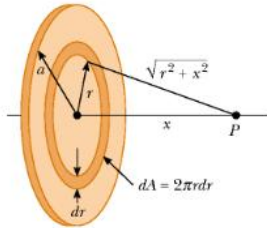
جواب انتگرال

$$u = r^2 + x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2rdr$$

$$V = K\pi\sigma \int_0^a \frac{2rdr}{\sqrt{r^2 + x^2}} = K\pi\sigma \int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}} = K\pi\sigma \left[\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]$$

$$V = 2K\pi\sigma \left[(r^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} \right]_0^a = 2K\pi\sigma \left(\sqrt{x^2 + a^2} - x \right)$$

مثال: پیدا کردن میدان از پتانسیل σ



شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

تمرین: میدان روی محور x را با استفاده از رابطه

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

به دست آورید. نتیجه را با جواب به دست آمده در فصل دوم برای میدان یک حلقه باردار مقایسه کنید.

پتانسیل دیسک باردار را به صورت

$$V = 2K\pi\sigma \left(\sqrt{x^2 + a^2} - x \right)$$

به دست آوریم. از طرفی می توان میدان در جهت x را با استفاده از رابطه

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

به دست می آید. با توجه به اینکه میدان فقط به متغیر x بستگی دارد، داریم:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{dV(x)}{dx} \\ &= -2K\pi\sigma \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - 1 \right) \\ &= 2K\pi\sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) \end{aligned}$$

با سپاس از توجه شما،
مراقب سلامت خود و اطرافیان خود
باشید.