

مفاهیم بنیادی مکانیک کوانتومی

آزمایش اشترن-گرلاخ و نتایج آن

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

۱ آزمایش اشترن-گراخ و نتایج آن

- آزمایش اشترن-گرلاخ
- آزمایش های اشترن-گرلاخ متوالی

تاریخچه آزمایش اشترن-گرلاخ

آزمایش اشترن-گرلاخ در سال ۱۹۲۲ در فرانکفورت انجام شد. این آزمایش احتمالاً یکی از بهترین روش ها برای درک ذات غیرعادی سیستم های کوانتومی است. به کمک این آزمایش می توان موارد زیر را تا حدودی درک کرد:

وجود تکانه زاویه ای ذاتی ذرات (اسپین).

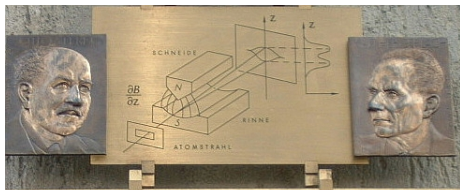
کوانتش اسپین.

رمبش تابع موج و روش اندازه گیری.

اصل عدم قطعیت.

برهمنهی کوانتومی.

فضای هیلبرت.



IM FEBRUAR 1922 WURDE IN DIESEM GEBÄUDE DES
PHYSIKALISCHEN VEREINS, FRANKFURT AM MAIN,
VON OTTO STERN UND WALTHER GERLACH DIE
FUNDAMENTALE ENTDECKUNG DER RAUMQUANTISIERUNG
DER MAGNETISCHEN MOMENTE IN ATOMEN GEMACHT.
AUF DEM STERN-GERLACH-EXPERIMENT BERUHEN WICHTIGE
PHYSIKALISCH-TECHNISCHE ENTWICKLUNGEN DES 20. JHDS.,
WIE KERNSPINRESONANZMETHODE, ATOMUHR ODER LASER.
OTTO STERN WURDE 1943 FÜR DIESE ENTDECKUNG
DER NOBELPREIS VERLIEHEN.

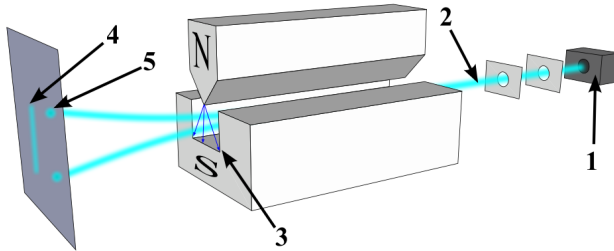
اشترن و گرلاخ در ابتدا به دنبال آشکارسازی

دوران الکترون ها به دور هسته (یعنی $\vec{L}$)

بودند؛ ولی آنها اسپین (یعنی $\vec{S}$) را یافتند!

آرایه آزمایشگاهی آزمایش اشترن - گرلاخ

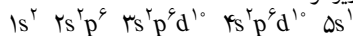
- در آزمایش اشترن-گرلاخ اتم های نقره از یک کوره (۱) با سرعت خارج می شوند. سپس آنها به یک موازی ساز رسیده (۲) و باریکه ای نسبتاً موازی تشکیل می دهند. آنگاه اتم ها وارد یک میدان مغناطیسی متغیر شده (۳) و دست آخر موقعیت آنها در آشکارساز تعیین می شود. شکل زیر را ببینید.



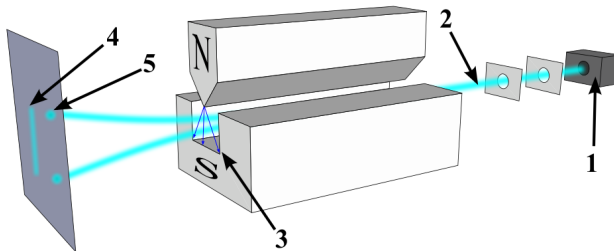
پرتاب اتم های نقره در میدان مغناطیسی متغیر

• بنا به قانون نیروی لورنتس $\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ اگر ذره بدون باری را در میدان مغناطیسی پرتاب کنیم، انتظار نداریم به آن ذره نیرویی وارد شود.

• حال یک اتم خنثی با یک الکترون در تراز آخر (مانند نقره) را در نظر بگیرید. ساختار الکترونی نقره را می توان به شکل زیر نوشت:



این اتم در میدان مغناطیسی پرتاب می شود و طرحی شبیه به حالت ۵ (و نه حتی ۴!!) را خواهد ساخت. یعنی اتم ها نه فقط منحرف می شوند، بلکه یک طرح گسسته و نه پیوسته تشکیل می دهند. چرا؟!



تفسیرهای ابتدایی برای آزمایش اشترن-گرلاخ



کروونیک اولین بار این ایده را مطرح کرد که ممکن است الکترون در حال دوران به دور خودش باشد. ولی پائولی این ایده را نادرست می دانست، چون در نتیجه باید الکترون با سرعتی بیش از سرعت نور به دور خودش دوران کند. در نتیجه کروونیک نتیجه خود را منتشر نکرد.

در ادامه اولنیک و گوداشمیت ایده دوران الکترون به دور محور خود (اسپین الکترون) را منتشر کردند. استاد راهنمای آنها (اهرنفست) فکر می کرد که این ایده چندان بامعنی نیست، ولی بهتر است چاپ شود!

بلافاصله پس از چاپ، این ایده مورد انتقاد هایزنبرگ، لورنتس و دیگران قرار گرفت. داستان به خوبی در مقاله پایس توضیح داده شده است.



GEORGE UHLENBECK AND THE DISCOVERY OF ELECTRON SPIN

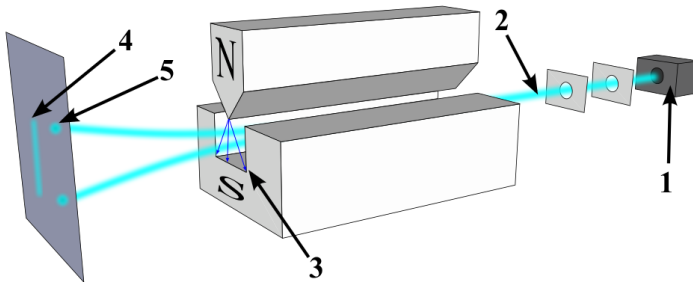
How two young Dutchmen, one with only a master's degree, the other a graduate student, made a most important finding in theoretical atomic physics.

The owl depicted on the signet ring George Uhlenbeck used to wear—"Uhlenbeck" in German means "owl's brook"—derives from his family's coat of arms. The shield reads, in the language of heraldry: Azure, on a tree trunk proper rising from water argent, an owl contourné, head affronty. In plain language, it depicts an owl with its head turned toward you, sitting on a tree trunk in natural color, which rises up out of a silvery brook. (I owe the transcription of the Dutch blazon into English heraldry to Michael MacLagan, the Richmond Herald in the College of Arms.)

Abraham Pais

تفسیرهای ابتدایی برای آزمایش اشترن-گرلاخ

- نتیجه آزمایش اشترن - گرلاخ به حدی عجیب بود که تا مدتی پدیده مشاهده را "کوانتش فضا" می نامیدند.
- اشترن و گرلاخ خود امیدوار بودند که با این آزمایش اثر تکانه زاویه مداری الکترون را نشان دهند. هرچند، بزودی مشخص شد که چنین توضیحی درست نیست. چرا؟!

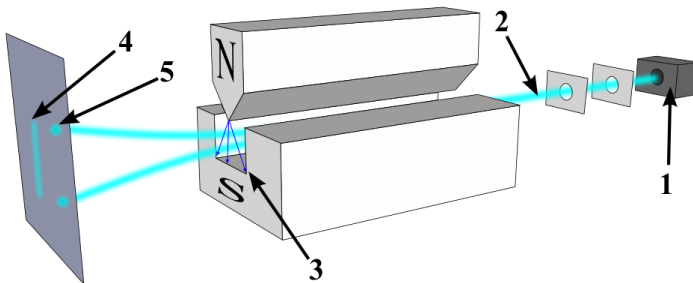


اتم به عنوان یک دوقطبی مغناطیسی

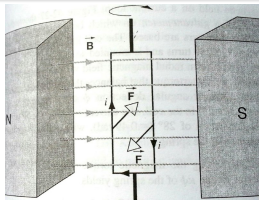
البته حتی در فیزیک کلاسیک هم انتظار داریم که اگر یک آهنربا در یک میدان مغناطیسی پرتاب شود، توسط آن میدان منحرف شود. کم کم این ایده مطرح شد که هرچند اتم از نظر بار الکتریکی خنثی است، ولی توزیع بارهای اتم می تواند باعث یک ممان مغناطیسی μ شود. ولی طرح خروجی باید پیوسته باشد و نه گسسته.

فیلم را ببینید.

آیا ممکن است ممان مغناطیسی اتم یک مقدار گسسته داشته باشد؟ در ادامه این ایده را با جزئیات بیشتر بررسی خواهیم کرد.



یادآوری: گشتاور وارد بر حلقه جریان



اعمال نیرو به قطعات یک حلقه می تواند باعث دوران حلقه شود. برای توصیف این دوران لازم است گشتاور وارد بر قطعات حلقه را حساب کنیم.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

یادآوری گشتاور:

به قطعات ۲ و ۴ حلقه نیرویی برابر با

$$F_2 = F_4 = ibB \sin(\theta \pm \pi/2) = ibB \cos \theta$$

وارد می شود. هرچند، این قطعات هیچ سهمی در گشتاور ندارند زیرا نیروی وارده از طرف آنها به محور دوران وارد می شود.

به قطعات ۱ و ۳ حلقه نیرویی برابر با

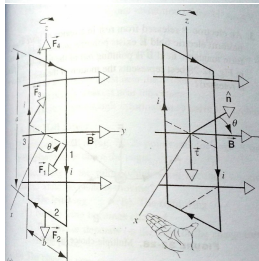
$$F_1 = F_3 = iaB \sin \pi/2 = iaB$$

وارد می شود. گشتاور وارد بر این قطعات برابر است با

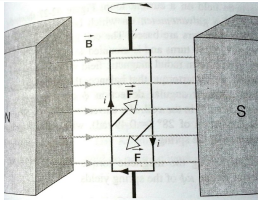
$$\tau_1 = \tau_3 = F_1 \frac{b}{2} \sin \theta$$

که البته هم جهت هم هستند. بنابراین گشتاور کل برابر است با

$$\tau = \tau_1 + \tau_3 = 2F_1 \frac{b}{2} \sin \theta = i(ab)B \sin \theta$$



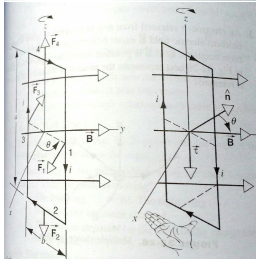
یادآوری: گشتاور وارد بر حلقه جریان



در حالت کلی، اگر مساحت حلقه بسته ای برابر A باشد و حلقه شامل N دور سیم باشد، آنگاه می توان ثابت کرد که گشتاور مغناطیسی وارد بر این حلقه برابر است با

$$\vec{\tau} = N i \vec{A} \times \vec{B}$$

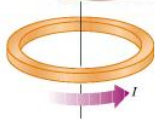
جزئیات و توضیحات بیشتر در این زمینه را می توانید از مجموعه درس های فیزیک الکتریسیته و مغناطیس من ببینید.



یادآوری: ممان دو قطبی مغناطیسی



قرارداد مربوط به جهت بردار مساحت $\vec{A}$: جهت بردار مساحت $\vec{A}$ با توجه به جهت جریان و با استفاده از قاعده دست راست تعیین می شود؛ به این صورت که، اگر چهار انگشت دست راست را در راستای سیم قرار داده و در جهت جریان بچرخانیم، آنگاه انگشت شست در جهت $\vec{A}$ خواهد بود.



ممان دو قطبی مغناطیسی: کمیت $\vec{\mu} = Ni\vec{A}$ در بسیاری از روابط مغناطیس وارد می شود. این کمیت را ممان دو قطبی مغناطیسی می نامند. ناگفته پیداست که $\vec{\mu}$ همجهت با $\vec{A}$ می باشد.

با استفاده از مفهوم ممان دو قطبی مغناطیسی، می توان گشتاور مغناطیسی وارد بر هر حلقه را به صورت $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ نوشت که جهت آن با استفاده از قاعده دست راست معلوم می شود.

می توان به حلقه درون میدان مغناطیسی یک انرژی پتانسیل نسبت داد. با جمع بستن (انتگرال گیری) کارهای دیفرانسیلی وابسته به این حلقه در دوران آن، یعنی $dW = \vec{\tau} \cdot d\theta$ ، انرژی پتانسیل کل به صورت

$$U(\theta) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

به دست می آید.

ایده خام الکترون در حال دوران

- در ادامه نشان می دهیم که یک رابطه بنیادی بین ممان دو قطبی مغناطیسی مربوط به یک بار الکتریکی در حال دوران و تکانه زاویه آن وجود دارد.
- یک حلقه بار با چگالی خطی λ بار λ را در نظر بگیرید که با سرعت v در حال دوران است. برای چنین جریان باری می توان نوشت:

$$I = \lambda v = \frac{Q}{2\pi R} v$$

بنابراین ممان مغناطیسی این توزیع بار را می توان به شکل

$$\mu = IA = \frac{Q}{2\pi R} v \times \pi R^2 = \frac{1}{2} QvR$$

نوشت. از طرفی تکانه زاویه ای این حلقه بار را می توان

$$\vec{L} = MvR$$

نوشت. در نتیجه خواهیم داشت: $\vec{\mu} = \frac{1}{M} Q \vec{L}$

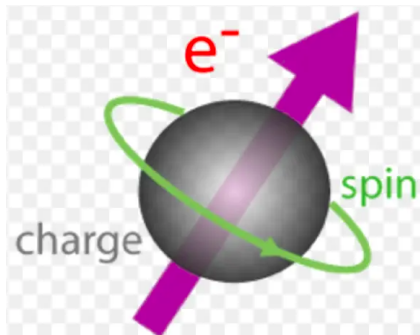
این رابطه را می توان برای هر توزیع بار در حال دوران تعریف کرد.

- پرسش: اشترن و گرلاخ چنین مدلی در ذهن داشته و انتظار داشتند که بتوانند تکانه زاویه ای مداری اتم نقره را آشکارسازی کنند. ولی با توجه به ساختار اتم نقره، یعنی $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^1$ چنین چیزی رخ نمی دهد. چرا؟



ایده خام الکترون در حال دوران

- تمرین: فرض کنید که الکترون در حال دوران به دور محور خود است و مقدار اندازه حرکت زاویه ای آن در حدود $\hbar$ است. همچنین، مقدار شعاع الکترون را کمتر از مقدار $r_e < 10^{-18} \text{ m}$ فرض کنید. اگر تکانه زاویه ای چنین باری برابر با $L = m_e r_e v_e$ باشد، حد پایین سرعت الکترون را بیابید.

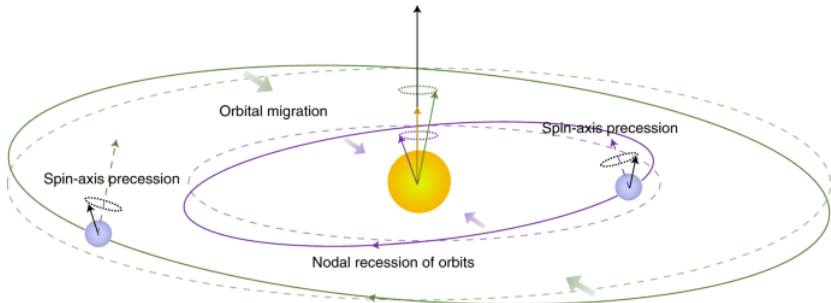


- حالا توضیح دهید که چرا پائولی و دیگران با ایده الکترون در حال دوران به دور محور خود مخالف بوده اند.

تشابه با حرکت مداری و اسپینی در حرکت سیارات

برای درک حرکت مداری و اسپینی الکترون ها در اتم ها، به همتای کلاسیک آنها در حرکت سیارات توجه کنید. پائولی و دیگران می دانستند که الکترون به دور هسته دوران می کند؛ ولی باور نداشتند که الکترون می تواند به دور محور خود هم دوران کند. ایده اولنک و گوداشمیت دوران الکترون به دور محور خود (اسپین) بود. بعدها خواهیم فهمید که همانطور که برهمکنش اسپین-مدار سیارات بسیار مهم است، برهمکنش اسپین-مدار در فیزیک اتمی نیز مشاهده شده و اهمیت فوق العاده ای دارد.

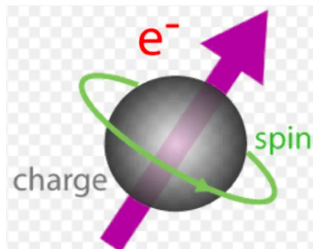
شکل از نیچر: <https://doi.org/10.1038/s41550-019-0701-7>



اسپین الکترون

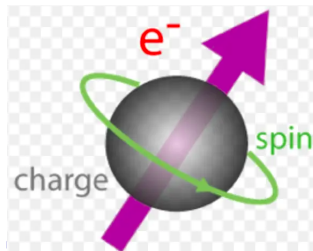
- به همین ترتیب می توان اسپین الکترون را به صورت $\vec{\mu} = \frac{e}{m_e} \vec{S} = \frac{e\hbar}{m_e} (\frac{\vec{S}}{\hbar})$ تعریف کرد. توجه کنید که کمیت $S/\hbar$ بدون واحد است. از این نکته بعدا استفاده خواهیم کرد.
- هرچند بعدا نشان داده شد که اسپین همه ذرات اتمی و زیر اتمی شامل یک فاکتور g نیز می باشد. در نتیجه اسپین الکترون را باید به شکل زیر نوشت:

$$\vec{\mu} = g_e \frac{e\hbar}{m_e} (\frac{\vec{S}}{\hbar})$$
- این فاکتور از نظریه نسبیتی کوانتوم (معادله دیراک) می آید.
- برای الکترون داریم $g_e \approx 2$ ؛ یعنی الکترون دو برابر پیش بینی کلاسیک ممان مغناطیسی دارد.



تصویر کنونی از الکترون

- مقدار $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.3 \times 10^{-24} \text{ J/T}$ را مگنتون بور (Bohr magneton) می نامند. مقدار این کمیت مهم است و بعداً در مساله ها ظاهر خواهد شد.
- مدل کنونی الکترون در اتم بر این اساس استوار است که الکترون به دور هسته در حال دوران است. این دوران را با L نشان داده و آن را تکانه زاویه ای الکترون می نامند. این کمیت گسسته است.
- هرچند می دانیم که الکترون اسپین S نیز دارد، ولی این اسپین به معنی دوران الکترون به دور محور خود نیست بلکه اسپین یک خاصیت ذاتی الکترون (مانند جرم و بار الکترون) است. این خاصیت ذاتی دو درجه آزادی دارد (همانطور که پائولی تشخیص داده بود). این دو درجه آزادی برای ما اهمیت خواهند داشت.



در آزمایش اشترن-گرلاخ چه چیزی رخ می دهد؟

• در آزمایش اشترن-گرلاخ میدان مغناطیسی در جهت z است، ولی کمی ناهمگنی دارد. در نتیجه نیروی زیر به الکترون (و یا اتم نقره) وارد می شود:

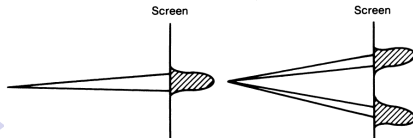
$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

• یادآوری: تصور اولیه این بود که به دلیل توزیع کاملاً تصادفی سرعت و ممان مغناطیسی اتم های خروجی از کوره، باید یک توزیع پیوسته گوسی بر روی آشکارساز ببینیم. ولی عملاً دو قله مجزا مشاهده شد. برای توضیح این پدیده دست آخر مدل $\mu_z = -2\mu_B \frac{S_z}{\hbar}$ مورد قبول واقع شد چون این مدل بیشترین پازل ها را آشکار می کرد.

• پرسش: یکی از نتایج مهم آزمایش اشترن گرلاخ این است که مقدار اسپین الکترون کوانتیزه است، یعنی $\frac{S_z}{\hbar} = \pm \frac{1}{2}$

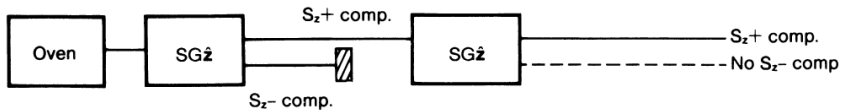
با توجه به مطالب گفته شده، شما توضیح دهید که چرا چنین چیزی درست است؟

• پرسش: می گوئیم الکترون یک ذره اسپین $\frac{1}{2}$ است. اسپین پروتون، نوترون و میوئون چقدر است؟



آزمایش های اشترن-گرلاخ متوالی

- بخش دوم از اهمیت آزمایش اشترن-گرلاخ با توالی چنین آزمایش هایی در جهت های مختلف مشخص می شود. در ادامه دستگاه اشترن-گرلاخ که میدان مغناطیسی آن در جهت z است را با SG_z نشان می دهیم.
- این آزمایش ها اصول موضوعه مکانیک کوانتومی (و ذات نسبتا عجیب آنها) را تا حدی برای ما مشخص می کنند.



آزمایش های اشترن-گرلاخ متوالی در جهت Z

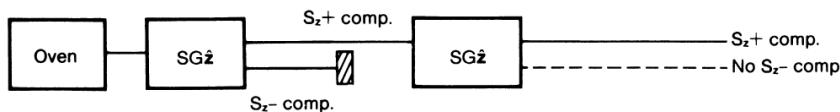
- آزمایش های اشترن-گرلاخ متوالی زیر در جهت Z را در نظر بگیرید. در این آزمایش مسیر باریکه شامل اسپین S_z سد شده است. سپس باریکه S_{z+} از یک SG_z دیگر عبور داده شده است. نتیجه همان S_{z+} خواهد بود، یعنی هیچ الکترونی با اسپین $1/2 -$ مشاهده نشده است.
- این دو حالت را به ترتیب با $|z; +\rangle$ و $|z; -\rangle$ و یا با $|+\rangle$ و $|-\rangle$ و یا با $|\uparrow\rangle$ و $|\downarrow\rangle$ و یا با $|1\rangle$ و $|0\rangle$ نشان خواهیم داد. کت های $|+\rangle$ و $|-\rangle$ را به ترتیب با بردارهای ستونی دو بعدی

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نشان می دهیم. بنابراین براها با بردارهای سطری نشان داده خواهند شد.

$$\langle +| = (1, 0) \quad \langle -| = (0, 1)$$

- ضرب داخلی یک کت و یک برا یک اسکالر خواهد بود.



آزمایش های اشترن-گرلاخ متوالی در جهت z

- از این آزمایش می بینیم که دو حالت $|+\rangle$ و $|-\rangle$ بر هم عمودند: $\langle + | - \rangle = \langle - | + \rangle = 0$.
و این موضوع را بردارهای انتخاب شده به خوبی نشان می دهند:

$$\langle + | - \rangle = (1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$$

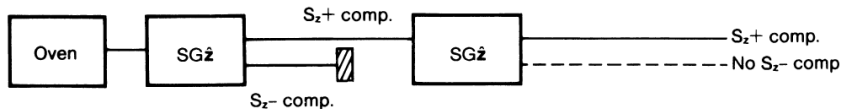
و البته اندازه بردارها نیز برابر یک است. اثبات:

$$\langle + | + \rangle = (1, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 0 \times 0 = 1$$

توجه: اگر $i, j = \pm$ آنگاه می توان این روابط را به صورت خلاصه $\langle i | j \rangle = \delta_{ij}$ هم نوشت.

- مقایسه: در فضای سه بعدی بردارهای پایه فضا، یعنی $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ بر هم عمودند؛ ولی در اینجا $|\uparrow\rangle$ و $|\downarrow\rangle$ بر هم عمودند!

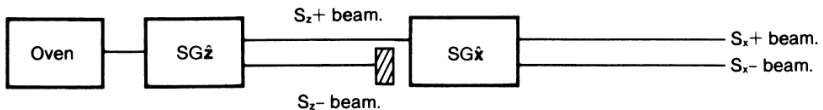
- توجه: هر حالت اسپین الکترون را می توان با استفاده از پایه های فضای اسپینی، یعنی $|+\rangle$ و $|-\rangle$ بسط داد:
$$|\phi\rangle = \alpha_1 |+\rangle + \alpha_2 |-\rangle$$



آزمایش های اشترن-گرلاخ متوالی در جهت Z و X

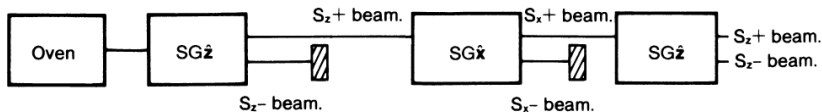
• آزمایش های اشترن-گرلاخ متوالی زیر در جهت Z و X را در نظر بگیرید. خروجی آزمایش نشان می دهد که 50° درصد خروجی ها در جهت $|S_x-\rangle$ و 50° درصد خروجی ها در جهت $|S_x+\rangle$ هستند.

• این نتیجه هم در مقایسه با پایه های فضای سه بعدی عجیب است چون نشان می دهد که حالت های $|S_x-\rangle$ و $|S_x+\rangle$ با حالت های $|S_z-\rangle$ و $|S_z+\rangle$ همپوشانی دارند. از لحاظ ریاضیاتی می نویسیم

$$\langle S_x; \pm | S_z; \pm \rangle \neq 0$$


آزمایش های اشترن-گرلاخ متوالی در جهت Z و X و دوباره Z

- آزمایش های اشترن-گرلاخ متوالی زیر در جهت Z و X و دوباره Z را در نظر بگیرید. خروجی آزمایش نشان می دهد که 50° درصد خروجی ها در جهت $|S_z-\rangle$ و 50° درصد خروجی ها در جهت $|S_z+\rangle$ هستند. یعنی عملاً حافظه سیستم با اعمال میدان SG_x حذف شده است و دوباره اسپین های S_z- داریم!



- توجه: فرایند اندازه گیری در مکانیک کوانتومی عملاً یک فرایند فیلترینگ است! به این فرایند بعداً در مبحث اندازه گیری دوباره برخورد خواهیم کرد.

آزمایش های اشترن-گرلاخ متوالی

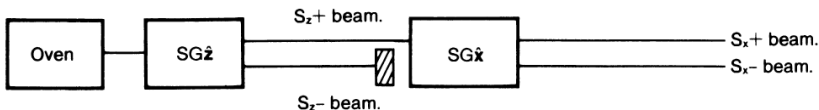
- تا اینجا متوجه می شویم که پایه های $|S_{x-}\rangle$ و $|S_{x+}\rangle$ را می توان با استفاده از پایه های $|S_{z-}\rangle$ و $|S_{z+}\rangle$ به صورت زیر بسط داد:

$$|S_{x+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_{z+}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|S_{z-}\rangle$$

$$|S_{x-}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}|S_{z+}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|S_{z-}\rangle$$

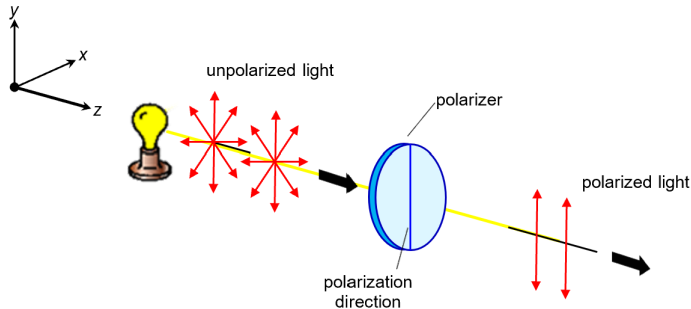
تمرین: الف) نشان دهید که این دو بر هم عمودند. ب) نشان دهید که احتمال وجود حالت $|S_{x-}\rangle$ در حالت $|S_{z+}\rangle$ برابر ۵۰٪ است.

- پرسش: همین آزمایش ها را می توانیم با SG_y هم انجام دهیم و به نتایج مشابهی هم خواهیم رسید. ولی پایه های فضا $|S_{y+}\rangle$ و $|S_{y-}\rangle$ را چطور با استفاده از پایه های $|S_{z+}\rangle$ و $|S_{z-}\rangle$ نشان دهیم؟



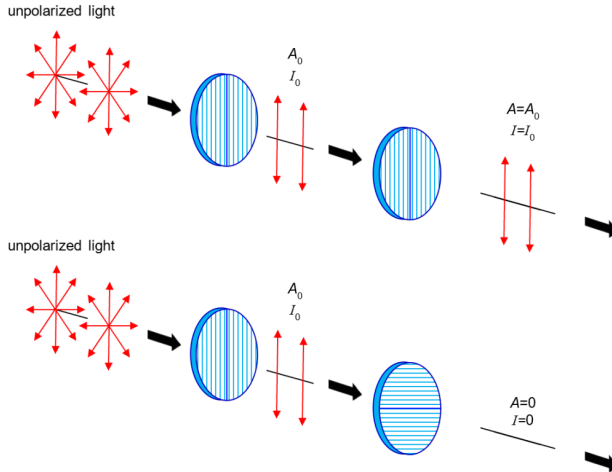
تشابه با قطبش الکترومغناطیسی

- برای پاسخ به پرسش اخیر بهتر است حالت مشابه در الکترومغناطیس (مساله قطبش) را در نظر بگیریم. نور قطبیده (نوری که از یک قطبش گر عبور کرده است) فقط در یک جهت قطبیده است.



تشابه با قطبش الکترومغناطیسی

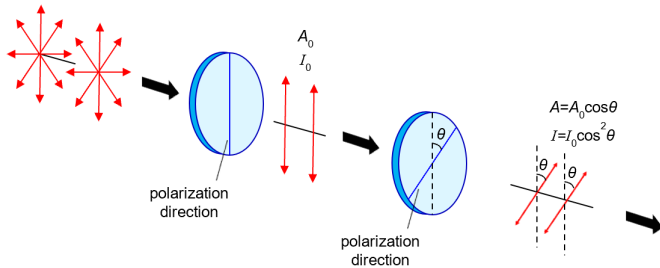
- اگر نور قطبیده در جهت عمودی را از یک قطبش گر افقی عبور دهیم، خروجی صفر خواهد بود. تشابه با آزمایش SG را توضیح دهید.



تشابه با قطبش الکترومغناطیسی

- اگر قطبش گر با محور عمود زاویه داشته باشد، نتیجه چه خواهد بود؟ تشابه با آزمایش SG را توضیح دهید.

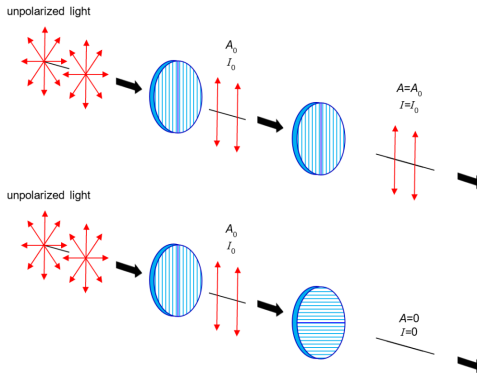
unpolarized light



Malu's Law

تشابه با قطبش الکترومغناطیسی

- مثال: پرتو نوری (که از نوسان های الکترومغناطیسی تشکیل شده است) در جهت $\hat{z}$ منتشر می شود. اگر میدان الکتریکی در جهت $\hat{x}$ قطبیده شده باشد، آن را با $\vec{E} = E_0 \hat{x} \cos(kz - \omega t)$ نشان می دهیم. واضح است که اگر صفحات قطبش گر در جهت عمود بر هم باشند، نباید نوری از قطبش گر دوم عبور کند.



Parallel and crossed polarizers

تشابه با قطبش الکترومغناطیسی

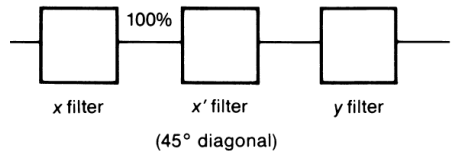
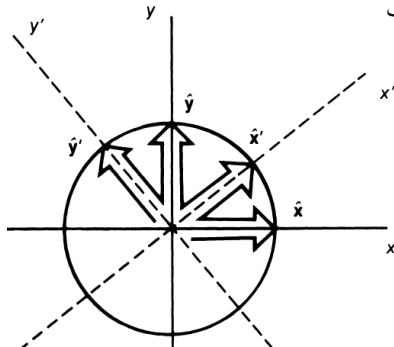
- اگر قطبش گر با محور عمود زاویه $\theta = \pi/4$ داشته باشد، آنگاه بخشی از نور عبور خواهد کرد. میدان الکتریکی قطبیده شده در جهت $\hat{x}'$ و $\hat{y}'$ به صورت زیر به میدان های قبلی مربوط هستند:

$$E_0 \hat{x}' \cos(kz - \omega t) = E_0 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} \cos(kz - \omega t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y} \cos(kz - \omega t) \right]$$

$$E_0 \hat{y}' \cos(kz - \omega t) = E_0 \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} \cos(kz - \omega t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y} \cos(kz - \omega t) \right]$$

بنابراین جهت گیری میدان در دستگاه جدید یک ترکیب خطی از جهت گیری میدان در دستگاه قدیم است.

- پرسش: خروجی آزمایش زیر را توضیح دهید.



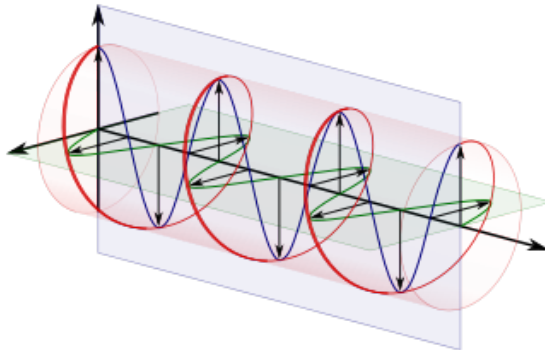
- آیا حالت دیگری برای قطبش (به جز ترکیب خطی) ممکن است؟ بله! قطبش دایره ای.

قطبش دایره ای

- یک موج با قطبش دایره ای یک ترکیب خطی از میدان قطبیده در جهت $\hat{x}$ و میدان قطبیده در جهت $\hat{y}$ است که با اختلاف فاز $\pi/2$ با هم ترکیب شده اند. فیلم را ببینید.
- موج با قطبش دایره ای راستگرد با رابطه

$$\vec{E} = E_0 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} \sin(kz - \omega t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y} \sin(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}) \right)$$

توصیف می شود.



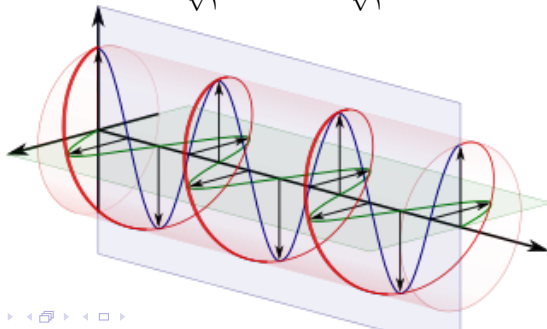
قطبش دایره ای

- همچنین می توان میدان الکتریکی یک موج با قطبش دایره ای راستگرد را به صورت قسمت حقیقی (و یا موهومی) کمیت زیر تعریف کرد:

$$\vec{E}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} e^{i(kz - \omega t)} + \frac{i}{\sqrt{2}} \hat{y} e^{i(kz - \omega t)}$$

- که در آن $i = e^{i\pi/2}$. ناگفته پیداست که میدان الکتریکی یک موج با قطبش دایره ای چپگرد به صورت قسمت حقیقی کمیت زیر تعریف می شود:

$$\vec{E}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} e^{i(kz - \omega t)} - \frac{i}{\sqrt{2}} \hat{y} e^{i(kz - \omega t)}$$



فضای هیلبرت



از تشابه بین بردارهای پایه فضای اسپینی و قطبش الکترومغناطیسی می توان به این نتیجه رسید که

$$|S_{y+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_{z+}\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|S_{z-}\rangle$$

$$|S_{y-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_{z+}\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|S_{z-}\rangle$$

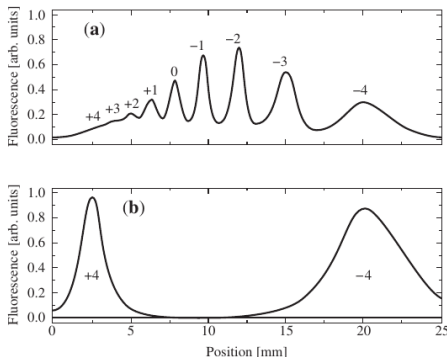
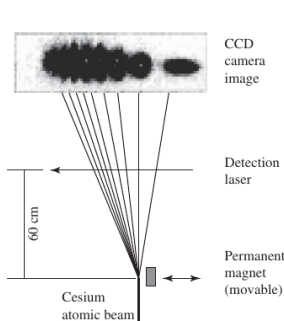
تمرین: الف) نشان دهید که این دو برهم عمودند. ب) نشان دهید که احتمال وجود حالت $|S_{y-}\rangle$ در حالت $|S_{z+}\rangle$ برابر ۵۰٪ است.

از اینجا متوجه می شویم که فضای دو بعدی اسپینی که حالت الکترون را توصیف می کند، مولفه هایی مختلط دارد. بنابراین، ضرایب بسط در یک حالت دلخواه اسپین الکترون مانند $|\phi\rangle = \alpha_1|+\rangle + \alpha_2|-\rangle$ در حالت کلی مختلط هستند.

این نوع فضاها را در حالت کلی فضای هیلبرت می نامیم. در جلسه بعد با ساختار فضای هیلبرت به صورت مقدماتی آشنا خواهیم شد.

آزمایش اشترن-گرلاخ مدرن

شکل زیر نتایج یک آزمایش اشترن-گرلاخ مدرن را نشان می دهد که با اتم سزیم ^{133}Cs انجام شده است. هسته این اتم اسپینی برابر $I = 7/2$ دارد در حالی که اسپین الکترون موجود در آخرین تراز اتم برابر $s = 1/2$ می باشد. عدد کوانتومی اسپینی این اتم $F = 4$ جفت شدگی بین هسته و آخرین الکترون را نشان می دهد و می تواند در $9 = 2F + 1$ حالت متفاوت قرار بگیرد. این نه حالت در شکل بالا به وضوح تفکیک شده اند.



نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید آزمایش اشترن-گرلاخ و مهم ترین نتایج آن را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ توضیح دهید که آزمایش اشترن-گرلاخ چطور وجود تکانه زاویه ای ذاتی ذرات (اسپین) را آشکار می کند.
- ۲ توضیح دهید که آزمایش اشترن-گرلاخ چطور کوانتش اسپین الکترون را توضیح می دهد.
- ۳ توضیح دهید که آزمایش اشترن-گرلاخ چطور برهمه‌نی کوانتومی الکترون را توضیح می دهد.
- ۴ تحقیق کنید که آزمایش اشترن-گرلاخ چطور رمبش تابع موج و روش اندازه گیری را آشکار می کند.
- ۵ تحقیق کنید که آزمایش اشترن-گرلاخ چطور اصل عدم قطعیت را آشکار می کند.
- ۶ توضیح دهید که چرا آزمایش اشترن گرلاخ ما را وادار به پذیرش یک فضای اسپینی مختلط می کند.
- ۷ درباره فضای هیلبرت تحقیق کنید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ” درونی سازی ” مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.

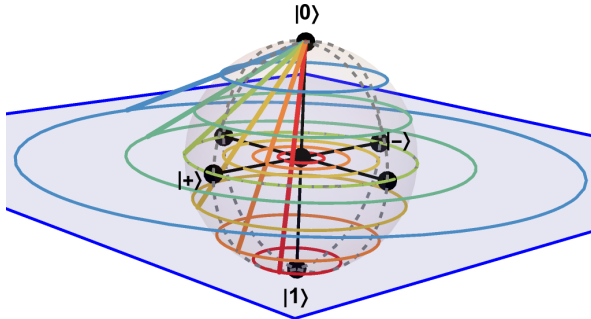


تمرین ها

- لطفا تمرین ها و پرسش های موجود در متن درس را پاسخ دهید.
- مقدار $\langle S_{x+} | S_{y-} \rangle$ و $|\langle S_{x+} | S_{y-} \rangle|^2$ را بیابید.

مبحث بعدی: مقدمه ای بر فرمولبندی ریاضیاتی مکانیک کوانتومی

- مهم ترین نتیجه این جلسه این بود که حالت کوانتومی سیستم توسط یک بردار که بر روی فضای مختلط تعریف شده است توصیف می شود. در جلسه بعد ریاضیات چنین فضایی را بررسی خواهیم کرد.



منابع

- ۱ Modern Quantum Mechanics, 3rd Edition, by J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge University Pr.
- ۲ Principles of Quantum Mechanics by Ramamurti Shankar, Plenum Press
- ۳ Quantum Mechanics: Concepts and Applications, 2nd Edition by Nouredine Zettili
- ۴ Introduction to Quantum Mechanics by David J.Griffiths
- ۵ Quantum Mechanics: An Introduction by Walter Greiner
- ۶ Quantum Physics I by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>
- ۷ Quantum Physics II by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/>
- ۸ Professor M does Science,
<https://www.youtube.com/@ProfessorMdoesScience>

با سپاس از توجه شما