

مقدمه ای بر دترمینان و ماتریس ضرب مستقیم ماتریس ها و توابع ماتریسی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ ضرب مستقیم ماتریس ها و توابع ماتریسی
- ضرب مستقیم ماتریس ها
- توابع ماتریسی

ضرب کرونگر دو ماتریس

- نوع دیگری از ضرب دو ماتریس را ضرب مستقیم (direct product) و یا ضرب کرونگر (Kronecker product) دو ماتریس می نامند و آن را با علامت $\otimes$ نشان می دهند. این ضرب حالت خاصی از ضرب تانسوری است که بعداً بحث خواهد شد.
- دقت کنید که برخلاف ضرب ماتریسی (ضرب داخلی دو ماتریس) که فقط برای ماتریس ها با ابعاد خاصی تعریف شده است، ضرب مستقیم دو ماتریس برای هر دو ماتریس با هر ابعادی قابل تعریف است.
- ضرب مستقیم: ماتریس A با ابعاد $m \times n$ و ماتریس B با ابعاد $p \times q$ را فرض کنید. در این صورت ضرب مستقیم دو ماتریس که آن را با $A \otimes B$ نشان می دهند، ماتریسی با ابعاد $mp \times nq$ می باشد. مولفه های این ماتریس به این صورت ساخته می شوند که هر مولفه از ماتریس A در تمام ماتریس B ضرب می شود تا ماتریس جدید ساخته شود:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix},$$

- پس اگر داشته باشیم $C = A \otimes B$ ، آنگاه مولفه های این ماتریس عبارتند از $C_{\alpha\beta} = A_{ij}B_{kl}$ که در آن $\alpha = p(i-1) + k$, $\beta = q(j-1) + l$

ضرب مستقیم دو ماتریس

- به عبارت دیگر ضرب مستقیم دو ماتریس A و B برابر است با

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{p1} & a_{1n}b_{p2} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{p1} & a_{mn}b_{p2} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{bmatrix}$$

- نشان دهید که ضرب مستقیم ماتریس ها جابجا پذیر نیست، ولی شرکت پذیر است.

مثال

- نتیجه ضرب مستقیم (کرونکر) دو ماتریس 2×2 را در زیر ببینید:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

- نتیجه ضرب مستقیم (کرونکر) دو ماتریس ستونی 2×1 را در زیر ببینید:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_1 y_2 \\ x_2 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}$$

- تمرین: برای دو ماتریس زیر نشان دهید که داریم $AB = A \otimes B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- پرسش: تساوی $AB = A \otimes B$ در حالت کلی برای چه نوع ماتریس هایی درست است؟

مثال

● به دو مثال زیر از ضرب مستقیم دقت کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & 2 \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \\ 3 \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & 4 \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 0 & 1 \times 5 & 2 \times 0 & 2 \times 5 \\ 1 \times 6 & 1 \times 7 & 2 \times 6 & 2 \times 7 \\ 3 \times 0 & 3 \times 5 & 4 \times 0 & 4 \times 5 \\ 3 \times 6 & 3 \times 7 & 4 \times 6 & 4 \times 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 12 & 14 \\ 0 & 15 & 0 & 20 \\ 18 & 21 & 24 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 & -9 & -6 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & 7 \\ 2 & 8 & -8 & -3 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -9 & -6 & 5 & -32 & 36 & 24 & -20 & 56 & -63 & -42 & 35 \\ 1 & -3 & -4 & 7 & -4 & 12 & 16 & -28 & 7 & -21 & -28 & 49 \\ 2 & 8 & -8 & -3 & -8 & -32 & 32 & 12 & 14 & 56 & -56 & -21 \\ 1 & 2 & -5 & -1 & -4 & -8 & 20 & 4 & 7 & 14 & -35 & -7 \\ -16 & 18 & 12 & -10 & 24 & -27 & -18 & 15 & 24 & -27 & -18 & 15 \\ -2 & 6 & 8 & -14 & 3 & -9 & -12 & 21 & 3 & -9 & -12 & 21 \\ -4 & -16 & 16 & 6 & 6 & 24 & -24 & -9 & 6 & 24 & -24 & -9 \\ -2 & -4 & 10 & 2 & 3 & 6 & -15 & -3 & 3 & 6 & -15 & -3 \end{bmatrix}$$

● اگر داشته باشیم $C = A \otimes B$ و $C' = A' \otimes B'$ ، و همچنین ابعاد ماتریس های مورد نظر

چنان باشد که ضرب های AA' و BB' خوش تعریف باشند، آنگاه می توان ثابت کرد

$$CC' = (AA') \otimes (BB')$$

همچنین اگر ابعاد ماتریس های A و B یکسان باشد، آنگاه برای هر ماتریس دلخواه C می توان نشان داد

$$C \otimes (A + B) = C \otimes A + C \otimes B \quad \text{and} \quad (A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C.$$

ماتریس های دیراک (ماتریس های گاما)

- در نظریه نسبیتی فرمیون ها (مانند الکترون ها) به ماتریس های گاما برخورد می کنیم که به ماتریس های دیراک هم مشهورند. این ماتریس ها از ماتریس های پائولی ساخته می شوند.
- با ماتریس های پائولی قبلاً آشنا شده ایم:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

همچنین اگر ماتریس کمکی زیر را نیز تعریف کنیم

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

می توان ماتریس های دیراک را به صورت زیر ساخت:

$$\gamma^0 = \sigma_3 \otimes \mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \gamma \otimes \sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

- تمرین: ماتریس های γ^1 ، γ^2 و γ^3 را بسازید.

ماتریس های دیراک (ماتریس های گاما)

تمرین: ماتریس های γ^1 ، γ^2 و γ^3 را بسازید.

پاسخ:

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

توابع ماتریسی

در ریاضی و فیزیک می توان چند جمله ای هایی را تعریف کرد که تابعی از یک و یا چند ماتریس باشند. همچنین می توان سری های توانی از ماتریس ها را تعریف کرد، به شرطی که سری مذکور برای هر درایه ماتریس همگرا شود. برای مثال اگر A یک ماتریس با ابعاد $n \times n$ باشد، آنگاه سری های زیر هم ماتریس هایی $n \times n$ هستند:

$$\exp(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j,$$

$$\sin(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} A^{2j+1},$$

$$\cos(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} A^{2j}$$

مثلا برای ماتریس های پائولی σ_k که پیشتر معرفی شده اند، می توان اتحاد اوایلر را به صورت زیر به دست آورد:

$$\exp(i\sigma_k\theta) = \mathbf{1}_2 \cos \theta + i\sigma_k \sin \theta,$$

مثال

● مثال: ماتریس e^{σ_3} را محاسبه کنید که در آن σ_3 یکی از ماتریس های پائولی است.

پاسخ: توجه می کنیم که

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\sigma_3)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

و بنابراین

$$e^{\sigma_3} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$$

● تمرین: برای یکی از ماتریس های پائولی درستی رابطه زیر را نشان دهید.

$$\exp(i\sigma_k\theta) = \mathbf{1}_2 \cos\theta + i\sigma_k \sin\theta,$$

● یک رابطه بسیار مهم (به ویژه در محاسبات مکانیک کوانتومی) لم بیکر-هاسدورف است که به صورت زیر نوشته می شود (بدون اثبات).

$$\exp(-T)A\exp(T) = A + [A, T] + \frac{1}{2!} [[A, T], T] + \frac{1}{3!} [[[A, T], T], T] + \dots$$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید ضرب مستقیم ماتریس ها و توابع ماتریسی را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ منظور از ضرب مستقیم ماتریس ها چیست؟
- ۲ ماتریس بوجود آمده از ضرب مستقیم دو ماتریس چه ابعادی دارد؟
- ۳ درایه های ماتریس بوجود آمده از ضرب مستقیم دو ماتریس چه رابطه ای با ماتریس های اولیه دارد؟
- ۴ آیا ضرب مستقیم دو ماتریس جابجا پذیر است؟
- ۵ درباره رابطه بین ضرب مستقیم و ضرب تانسوری تحقیق کنید.
- ۶ منظور از تابع ماتریسی چیست؟
- ۷ لم بیکر-هاسدورف را بنویسید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.

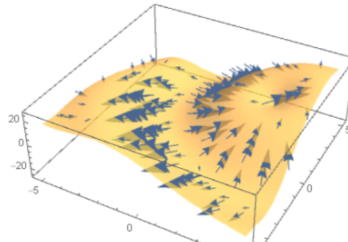
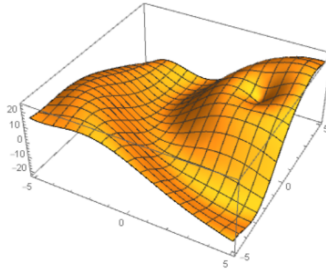


تمرین

- تمرین های موجود در متن درس را پاسخ دهید.
- تمرین های موجود در صفحات ۱۱۴ تا ۱۲۱ از ویرایش هفتم کتاب آرفکن را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: آنالیز برداری

- در فصل بعد آنالیز و حسابان برداری را معرفی خواهیم کرد.



منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ❻ <https://math.libretexts.org/>

با سپاس از توجه شما

