

حسابان برای فیزیک

درس اول: مقدمه ای بر حسابان

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



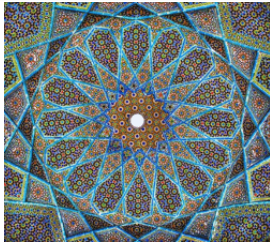
دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس برای آشنایی مقدماتی دانشجویان جدیدالورود، که تاکنون با حساب انتگرال آشنا نشده اند، و به جهت کمک به فهم درس فیزیک مکانیک تهیه شده است. این مجموعه درس، از لحاظ گستردگی و دقت در ارائه مفاهیم، قطعاً جایگزین درس ریاضی عمومی نخواهد بود.
 - این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در پاییز سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
 - خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
- h.shenavar@gmail.com
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که، با تلاش بسیار، امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

۱ درس اول: مقدمه ای بر حسابان

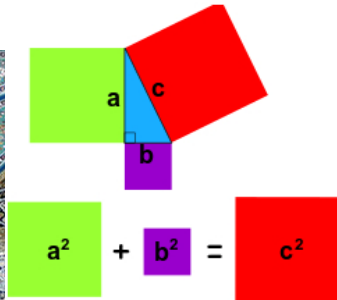
- چرا حسابان؟
- مروری بر دیفرانسیل (حساب مشتقات)

ریاضیات پیش از حسابان

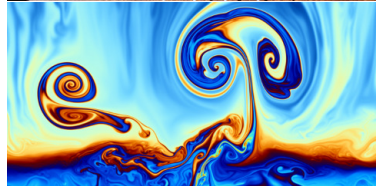
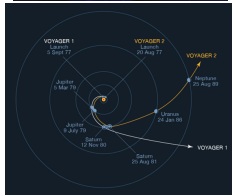
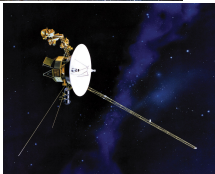
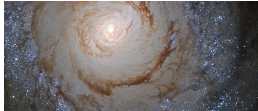


ریاضیات پیش از حسابان کمیت ها و حالت های ایستا را توضیح می داد.

بعضی از مفاهیم و پدیده های روزمره، مانند مساحت یک زمین و یا حجم بتن به کار رفته در یک دیوار، ثابت هستند (با زمان تغییر نمی کنند). بنابراین، هندسه و شاخه های دیگر ریاضیات قدیم، که معمولا چنین پدیده های ایستایی را توصیف می کنند، همچنان می توانند مفید باشند.



بیشتر پدیده های روزمره شامل تغییر هستند.



ولی بیشتر پدیده های روزمره شامل تغییر هستند. برای توصیف این پدیده ها باید از ریاضیاتی استفاده کرد که بتواند تغییرات را محاسبه و لحاظ کند.

حساب دیفرانسیل و انتگرال برای توصیف دقیق پدیده های متغیر ابداع شده است.

شکل ها از نت

نمونه هایی از یک تابع متغیر با زمان در فیزیک (نمودار مکان-زمان)

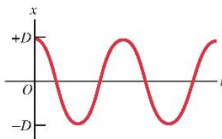
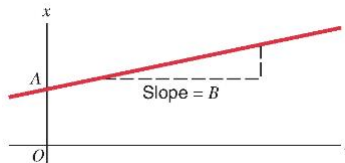
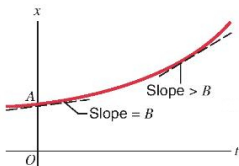
دو شکل پایین به ترتیب حرکت با شتاب ثابت و حرکت هارمونیک ساده را نشان می دهند.

برای فهم دقیق تر این پدیده های متغیر با زمان، نیاز به حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم. در چند درس آینده این حساب را مرور خواهیم کرد.

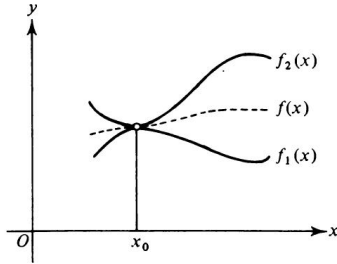
شکل زیر حرکت با سرعت ثابت را نشان می دهد.

بعدا این نوع حرکت را دقیق تر مطالعه کرده و درباره مفهوم شیب نمودار مکان زمان *slope* دقیق تر بحث خواهیم کرد.

توابع دیگری، مانند تابع سرعت-زمان و تابع شتاب-زمان، نیز وجود دارند که با زمان تغییر می کنند.



مفروضات این درس



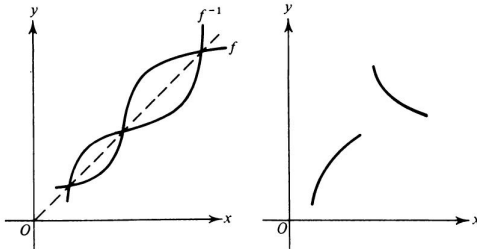
در این درس فرض می‌کنیم که شما مفاهیمی مانند بازه، مختصات، نمودار، رابطه، تابع و حد را می‌دانید. ولی اشاراتی در حد گذرا نیز به این مفاهیم خواهیم داشت.

در فیزیک معمولاً آهنگ تغییر کمیت‌ها برحسب زمان بررسی می‌شود. بنابراین محور افقی، معمولاً پارامتر زمان t را نشان می‌دهد در حالی که محور عمودی پارامتر وابسته به زمان (مانند مکان $x(t)$ ، سرعت $v(t)$ ، شتاب $a(t)$ و ...) را نشان می‌دهد. شکل‌های صفحه قبل را ببینید.

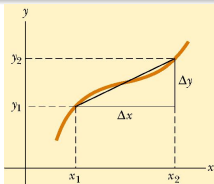
از طرف دیگر در ریاضی معمولاً محور افقی پارامتر مستقل x و محور عمود پارامتر وابسته $y(x)$ را نشان می‌دهد.

در این مقدمه بر حسابان، من از نمادگذاری ریاضی دانان استفاده خواهم کرد. هرچند، در درس فیزیک از نمادگذاری رایج فیزیک بهره خواهیم گرفت (بحث‌های مربوط به فصل‌های دوم و چهارم فیزیک مکانیک را ببینید).

شکل‌ها از سیلورمن.



مشتق: آهنگ تغییرات



فرض کنید که x یک نقطه درونی از دامنه تابع $y(x)$ می باشد. در این صورت، مشتق تابع $y(x)$ نسبت به متغیر x به عنوان حد زیر تعریف می شود:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

به شرطی که این حد موجود باشد. در اینجا $\Delta x = x_2 - x_1$ و $\Delta y = y_2 - y_1$.

هشدار مهم: مقدار مشتق تابع را معمولا با $\frac{dy}{dx}$ نشان می دهیم. این یک نمادگذاری است. d را از صورت و مخرج ساده نکنید!!!

مثال: مشتق تابع $y(x) = x^2$ را در نقطه دلخواه x بیابید.
پاسخ:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + \Delta x^2 + 2x\Delta x) - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 + 2x\Delta x}{\Delta x} \end{aligned}$$

در اینجا Δx عددی بسیار کوچک است؛ مثل $\Delta x = 0.0001$. اعداد نزدیک به صفر وقتی به توان های بزرگ می رسند، باز هم کوچکتر می شوند: $\Delta x^2 = 0.00000001$. پس می توان در اینجا از Δx^2 در مقابل Δx صرف نظر کرد. بنابراین:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x^2} + 2x\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x}{\Delta x} = 2x$$

$$\frac{d}{dx} x^2 = 2x$$

بنابراین:

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

نکته: از توان های بالاتر Δx^n می توان در مقابل Δx صرف نظر کرد؛ به شرطی که Δx بسیار کوچک باشد.

تمرین

۱ با استفاده از تعریف مشتق، ثابت کنید که مشتق تابع ثابت $y(x) = c$ برابر صفر است.

۲ مشتق تابع $y(x) = x^3$ را در نقطه دلخواه x به روش بالا بیابید.

۳ مشتق تابع $y(x) = x^4$ را در نقطه دلخواه x به روش بالا بیابید.

۴ مشتق تابع $y(x) = x^5$ را در نقطه دلخواه x به روش بالا بیابید.

۵ مشتق تابع $y(x) = \sqrt{x}$ را در نقطه دلخواه x به روش بالا بیابید.

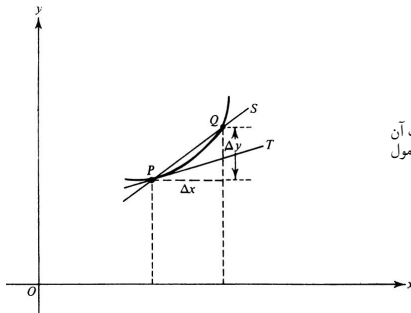
مشتق همان شیب خط مماس بر منحنی است.

تعریف خط مماس: اگر تابع y بر بازه بازی تعریف شده باشد، و حد

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x} = m$$

موجود باشد، آنگاه خطی که از نقطه دلخواه $(x_0, y(x_0))$ می گذرد و شیب آن m می باشد را خط مماس بر تابع y در نقطه $(x_0, y(x_0))$ می نامند. فرمول این خط به صورت زیر است:

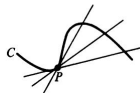
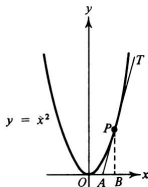
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$



جواب دو سوال زیر را در فصل دوم فیزیک مکانیک بیابید:

الف: خط مماس بر نمودار مکان-زمان در هر لحظه از زمان چه کمیتی است؟
ب: خط مماس بر نمودار سرعت-زمان در هر لحظه از زمان چه کمیتی است؟

اگر دو خط با شیب های m و m' بر هم عمود باشند، آنگاه $mm' = -1$.



شکل ها از سیلورمن.

تمرین

۱ خط مماس بر نمودار $y(x) = x^2 - 2x + 1$ را در نقطه $(1, 0)$ بیابید.

۲ خط مماس بر نمودار $y(x) = x^3 - 4x^2 + 2$ را در نقطه $(1, -1)$ بیابید.

۳ خط مماس بر نمودار $y(x) = \sqrt{x} + x$ را در نقطه $(1, 2)$ بیابید.

ویژگی های اساسی مشتق

قاعده مشتق عدد ثابت در تابع:

$$\frac{d}{dx} [cf(x)] = c \frac{df(x)}{dx}$$

قاعده مشتق جمع و تفریق دو تابع:

$$\frac{d}{dx} [f(x) + g(x)] = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} [f(x) - g(x)] = \frac{df(x)}{dx} - \frac{dg(x)}{dx}$$

تمرین: این قاعده ها را اثبات کنید.

قاعده مشتق حاصلضرب دو تابع:

$$\frac{d}{dx} [f(x)g(x)] = \frac{df(x)}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg(x)}{dx}$$

تمرین: این قاعده را اثبات کنید.

قاعده مشتق تقسیم دو تابع:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\frac{df(x)}{dx} g(x) - f(x) \frac{dg(x)}{dx}}{(g(x))^2}$$

تمرین: این قاعده را (با استفاده از قاعده قبل) اثبات کنید.

قاعده مشتق گیری زنجیره ای: اگر $y = f(x)$ و $x = g(t)$ آنگاه داریم:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

تمرین: این قاعده را اثبات کنید.

مشتق توابع مثلثاتی

۱ مشتق تابع $y = \sin x$ را بیابید.
پاسخ:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x \end{aligned}$$

در اینجا از اتحاد زیر استفاده کرده ایم:

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

۲ تمرین: نشان دهید که $(\cos x)' = -\sin x$

۳ تمرین: با استفاده از دو نتیجه قبل، و مشتق توابع کسری، نشان دهید که

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

جدول مشتق ها

1. $\frac{dx}{dx} = 1$

2. $\frac{d}{dx}(au) = a \frac{du}{dx}$

3. $\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

4. $\frac{d}{dx} x^m = mx^{m-1}$

5. $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$

6. $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$

7. $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

8. $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

9. $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

10. $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$

11. $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$

12. $\frac{d}{dx} \sec x = \tan x \sec x$

13. $\frac{d}{dx} \csc x = -\cot x \csc x$

14. $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$

15. $\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$

16. $\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$

مشتق دوم و مفهوم تقعر

● مشتق دوم یک تابع را با y'' و یا $\frac{d^2y}{dx^2}$ نشان می دهیم و مقدار آن برابر است با

$$\frac{d^2y}{dx^2} \equiv \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

یعنی برای پیدا کردن مشتق دوم باید دوباره از تابع مورد نظر مشتق بگیریم.

● مشتق دوم تقعر منحنی تابع را مشخص می کند.

● نقاط فرینه (اکسترم) تابع: برای پیدا کردن نقاط فرینه باید معادله

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x_1, x_2, \dots = ?$$

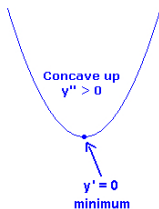
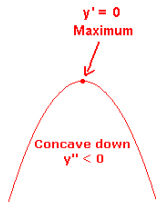
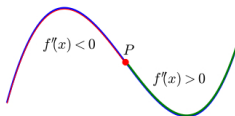
را حل کنیم.

● در نقطه کمینه موضعی، مشتق تابع برابر صفر است و تقعر تابع هم رو به بالاست (یعنی مشتق دوم مثبت است).

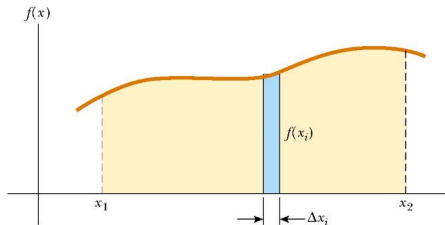
$$y' = 0 \quad \text{and} \quad y'' > 0$$

● در نقطه بیشینه موضعی، مشتق تابع برابر صفر است و تقعر تابع هم رو به پایین است (یعنی مشتق دوم منفی است).

$$y' = 0 \quad \text{and} \quad y'' < 0$$



اهمیت اساسی مشتق گیری برای انتگرال گیری!



قضیه اساسی اول حساب دیفرانسیل و انتگرال: فرض کنید که تابع $f(t)$ تابعی پیوسته در بازه بسته $[a, b]$ باشد. در این صورت تابع $G(x)$ برای هر x در این بازه که به صورت:

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

تعریف می شود یک پادمشتق f است، یعنی:

$$\frac{d}{dx} G(x) = f(x)$$

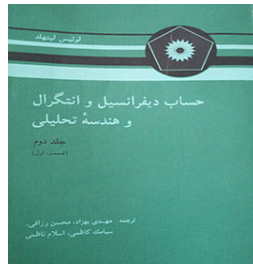
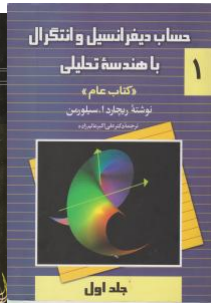
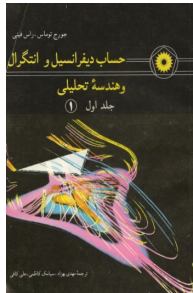
این قضیه را بعداً در بحث حساب انتگرال بحث و اثبات می کنیم.

نکته مهم: برای پیدا کردن انتگرال یک تابع، شما باید مشتق ها را به خوبی بشناسید.

بعداً درباره قضیه اساسی دوم و جمع بندی این دو قضیه بحث خواهیم کرد.

شکل از ویرایش هشتم مبانی فیزیک هالیدی.

کتاب های استاندارد برای یادگیری حسابان: سیلورمن، توماس، لیتلهد، آپوستل.



نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید نکات اساسی حساب مشتقات را بیان کنید. برای اینکار لازم است بتوانید به سوال های زیر پاسخ دهید:

- ۱ مفاهیم بازه، مختصات و نمودار، رابطه، تابع و حد را برای خود یادآوری کنید.
- ۲ حسابان برای توضیح چه نوع پدیده هایی ابداع شده است؟
- ۳ تعریف مشتق را بنویسید.
- ۴ رابطه مشتق تابع و شیب خط مماس بر نمودار تابع را توضیح دهید.
- ۵ چرا برای محاسبه انتگرال نیاز به دانستن مشتق داریم؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.



تمرین

مشتق توابع زیر را بیابید:



$$a(x) = \frac{1}{x}$$

$$b(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$$c(x) = xe^x$$

$$d(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$e(x) = \frac{\sin x}{x^2}$$

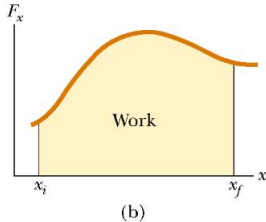
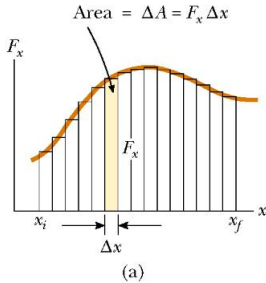
$$f(x) = x \tan x$$

$$g(x) = x \ln(x^2+1)$$

$$h(x) = \sqrt{\tan x + \sin x}$$

$$i(x) = \frac{3x^3 + 5x - 2}{2x^2 - 2x + 1}$$

مبحث بعدی: استفاده از سری ها برای محاسبه مساحت زیر منحنی



در جلسه بعد یاد خواهیم گرفت که چطور می توان با استفاده از سری ها، مساحت زیر یک نمودار را یافت. همچنین خواهیم فهمید که چنین کاری علی الاصول ممکن، ولی معمولاً فوق العاده دشوار است!

در اینجا آقای نیوتن، با قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، به کمک ما می آید و به ما می آموزد که راه ساده تری برای محاسبه مساحت زیر یک منحنی وجود دارد.

شکل از مبانی فیزیک، ویرایش هشتم.

کلاس درس دکتر سیاوش شهشهانی از دانشگاه صنعتی شریف (برای دروس ریاضی عمومی) را می توانید از آپارات دریافت کنید.

ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشانی

دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۱
احسان



۲ ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشانی
دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۲
احسان



۳ ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشانی
دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۴
احسان



۴ ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشانی
دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۵
احسان



۷,۵۰۸ ویدیوهای مشابه

رته برتر کنکور ارشد کامپیوتر (دانشجو ارشد دانشگاه صنعتی شریف)

کنگره ارشد کامپیوت

افزودن دیدنیال + ... ↶ ⬇ ⇅ ♡ ۴۴ Show all

با سپاس از توجه شما

