

مبانی گرانش نیوتنی انرژی پتانسیل گرانشی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

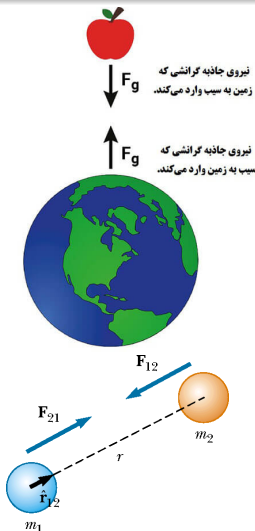
- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ انرژی پتانسیل گرانشی
- پایستاری نیروی گرانش
- پتانسیل سیستم دو جرمی
- پتانسیل گرانشی سیستم چند جرمی

آنچه گذشت!



نیروی گرانش همیشه جاذبه است. از طرفی نیروی الکتریکی می تواند جاذبه و یا دافعه باشد.

نیروی گرانش وارد شده از جسم اول به جسم دوم دقیقا برابر، ولی در جهت مخالف، نیروی گرانش وارد شده از جسم دوم به جسم اول است.

چون دو نیرو با هم برابر هستند، اگر یکی از دو جسم بسیار بزرگتر از جسم دیگر باشد، جسم بزرگ عملا ثابت باقی می ماند و جسم کوچک به سمت آن حرکت می کند.

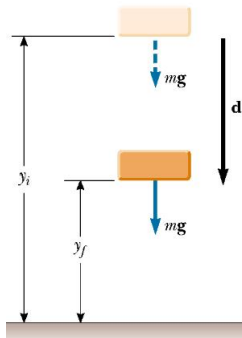
مثلا سیب و زمین به همدیگر نیرویی برابر وارد می کنند. ولی از آنجا که سیب بسیار سبک تر از زمین است، سیب حرکت می کند ولی زمین تقریبا ثابت باقی می ماند.

شکل دقیق ریاضیاتی قانون گرانش نیوتن را در زیر می بینید (حرف G نشان دهنده ثابت نیوتن است.)

$$\mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad \mathbf{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{21}$$

قانون گرانش نیوتن و سه قانون حرکت نیوتن تا حد خوبی همه پدیده های گرانشی در منظومه شمسی، و فراتر از آن، را توصیف می کنند.

نیروهای پایستار، انرژی پتانسیل و پایستگی انرژی مکانیکی



نیروهای پایستار: نیروهایی که کار انجام شده توسط آنها به مسیر ربطی ندارد و فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی ربط دارد را نیروهای پایستار می نامیم. مثال: نیروی گرانش، نیروی فنر، نیروی کولن.

نیروهای ناپایستار: نیروهایی هستند که کار انجام شده توسط آنها به مسیر ربط دارد. برای چنین نیروهایی نمی توان انرژی پتانسیل تعریف کرد زیرا مقدار آن یکتا نخواهد بود (مثلا اصطکاک).

قضیه: کار کل انجام شده توسط یک نیروی پایستار در یک مسیر بسته برابر صفر است.

اگر نیروی پایستار F_x بر یک جسم وارد شود و جسم از موقعیت x_i به نقطه x_f منتقل شود، آنگاه تغییر در انرژی پتانسیل جسم برابر است با منفی کار انجام شده توسط نیروی F_x و یا

$$\Delta U \equiv U_f - U_i = -W = - \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$$

در یک سیستم بسته که فقط نیروهای پایستار باعث تبدیل انرژی می شوند، مجموع انرژی های جنبشی و پتانسیل ثابت است. این مجموع

$$E_{\text{mech}} = K + U = \text{cte}$$

را انرژی مکانیکی می نامند:

دیدگاه اسکالر به مساله گرانش

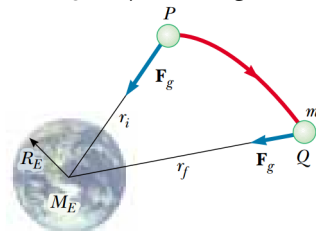
از دیدگاه برداری می توان نیروی گرانش بین دو جرم نقطه ای را به صورت

$$\mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad \mathbf{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{21}$$

نوشت. سپس، برای بررسی اجرام گسترده می توان از انتگرال گیری استفاده کرد و مساله را در حالت کلی (حداقل به صورت عددی) حل کرد.

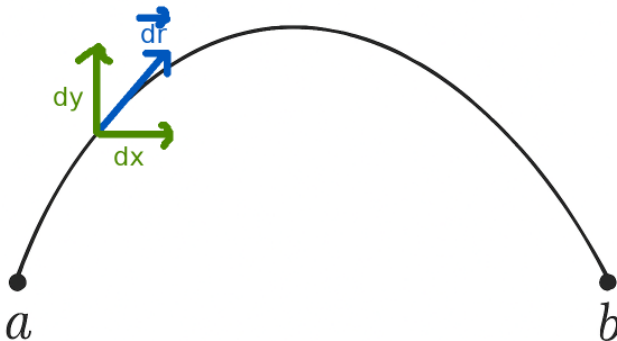
ولی راه های دیگری نیز برای مطالعه گرانش وجود دارد. مثلاً می توان گرانش اجرام را با استفاده از کمیت های اسکالر توصیف کرد. ما در این درس مقدمات این روش را معرفی خواهیم کرد (مکانیک لاگرانژی، هامیلتونی، ژاکوبی و ... در درس های پیشرفته تر معرفی خواهند شد).

در ابتدا پایستاری نیروی گرانش را نشان خواهیم داد. سپس مثال هایی از محاسبه پتانسیل گرانشی و کاربردها را خواهیم دید.



پایستاری نیروی گرانش در حالت کلی

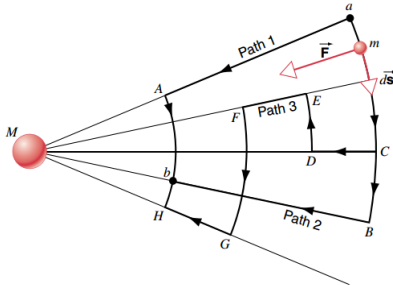
فرض کنید ذره ای در یک مسیر دلخواه در حال حرکت است. مسیر حرکت این ذره در هر لحظه از زمان را می توان در فضای دو بعدی به جابجایی های دیفرانسیلی و متعامد dx و dy تجزیه کرد. بنابراین، اگر بتوانیم پایستگی نیروی گرانش در مسیرهای متعامد را اثبات کنیم، می توانیم پایستگی این نیرو در همه مسیرهای دلخواه را نتیجه بگیریم.



پایستاری نیروی گرانش در حالت کلی

● کار نیروی گرانش در مسیر ۳

$$\begin{aligned}
 W_3 &= W_{aC} + W_{CD} + W_{DE} + W_{EF} + W_{FG} + W_{GH} + W_{Hb} \\
 &= W_{CD} + W_{EF} + W_{GH} \\
 &= \int_{r_C}^{r_D} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{r_E}^{r_F} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{r_G}^{r_H} \vec{F} \cdot d\vec{s} \\
 &= \int_{r_a}^{r_D} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{r_D}^{r_F} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{r_F}^{r_b} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{r_a}^{r_b} \vec{F} \cdot d\vec{s},
 \end{aligned}$$



● در ادامه نشان خواهیم داد که نیروی گرانش در سه مسیر ۱، ۲ و ۳ برابر است. هرچند، این مسیرها کاملاً دلخواه نیستند، از نکته ای که در اسلاید قبل گفته شد نتیجه می گیریم که کار نیروی گرانش مستقل از مسیر است و این نیرو پایستار است.

● کار نیروی گرانش در مسیر ۱

$$W_1 = W_{aA} + W_{Ab} = W_{aA} = \int_{r_a}^{r_A} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{r_a}^{r_b} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

● کار نیروی گرانش در مسیر ۲

$$W_2 = W_{aB} + W_{Bb} = W_{Bb} = \int_{r_B}^{r_b} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{r_a}^{r_b} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

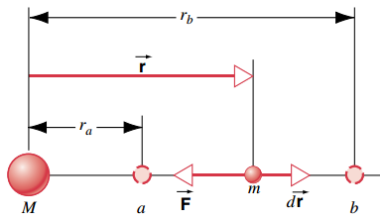
● توجه کنید که کار نیروی گرانش در همه مسیرهای عمود بر این نیرو برابر صفر است.

انرژی پتانسیل گرانشی یک سیستم دو جرمی

- فرض کنید که جرم m که در میدان گرانشی جرم M قرار دارد، از نقطه a به نقطه b حرکت می کند. می خواهیم کار نیروی گرانشی در این مسیر، و آنگاه اختلاف انرژی پتانسیل گرانشی بین این دو وضعیت، را محاسبه کنیم.

دقت کنید که اگر جابجایی بر نیرو عمود باشد، کار انجام شده صفر خواهد بود. در نتیجه برای محاسبه کار نیروهای شعاعی (مانند گرانش، کولن و ...) محاسبه کار در راستای شعاع کافی خواهد بود.

کار انجام شده:



$$\begin{aligned} W_{ab} &= \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_a^b F dr \\ &= - \int_{r_a}^{r_b} \frac{GMm}{r^2} dr = -GMm \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2} \\ &= -GMm \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_a}^{r_b} = GMm \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right). \end{aligned}$$

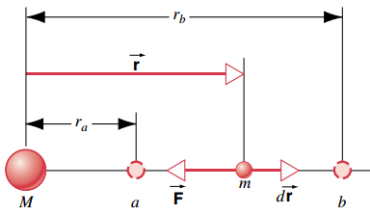
- اختلاف انرژی پتانسیل گرانشی: $\Delta U = U_b - U_a = -W_{ab} = GMm \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$

مفهوم انرژی پتانسیل

- دقت کنید که اگر جرم m از جرم مرکزی M دور شود، انرژی پتانسیل گرانشی سیستم افزایش می یابد (انرژی جنبشی آن کاهش می یابد).

$$r_a < r_b \Rightarrow U_b > U_a$$

- ولی اگر جرم m به جرم مرکزی نزدیک شود، آنگاه انرژی پتانسیل گرانشی سیستم کاهش می یابد (انرژی جنبشی آن افزایش می یابد).



- ثابت انرژی پتانسیل: با توجه به اینکه انرژی پتانسیل یک تابع اولیه است (از انتگرال به دست می آید)، مقدار آن به صورت یکتا به دست نمی آید. به عبارت دقیق تر، می توان مقدار انرژی پتانسیل را با هر ثابت دلخواهی جمع کرد $V = U + C$ ، و فیزیک مساله که به اختلاف انرژی پتانسیل مربوط است بدون تغییر باقی خواهد ماند:

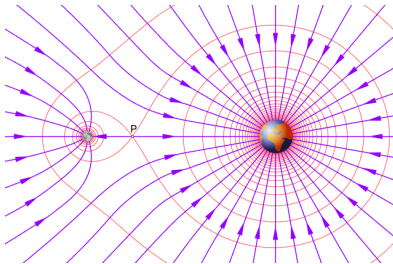
$$\Delta V = V_2 - V_1 = U_2 + C - (U_1 + C) = U_2 - U_1 = \Delta U$$

سطوح انرژی پتانسیل

- می توان به جای مفهوم اختلاف انرژی پتانسیل از مفهوم انرژی پتانسیل استفاده کرد، به شرطی که نقطه مشخصی را به عنوان "صفر انرژی پتانسیل" اختیار کنیم. در فیزیک معمولا بینهایت را به عنوان صفر انرژی پتانسیل انتخاب می کنند. در نتیجه می توان نوشت

$$U(\infty) - U(r) = GMm\left(\frac{1}{r} - 0\right) \Rightarrow U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

- سطوح انرژی پتانسیل: فرض کنید تابع انرژی پتانسیل گرانشی یک سیستم ذره را به دست آورده ایم. در اینصورت، همه نقاطی که انرژی پتانسیل یکسانی دارند، بر روی یک سطح قرار می گیرند. خطوط میدان گرانشی بر این سطوح عمود هستند (چرا؟!). سطوح انرژی پتانسیل در سیستم زمین-ماه را در شکل زیر می بینید.



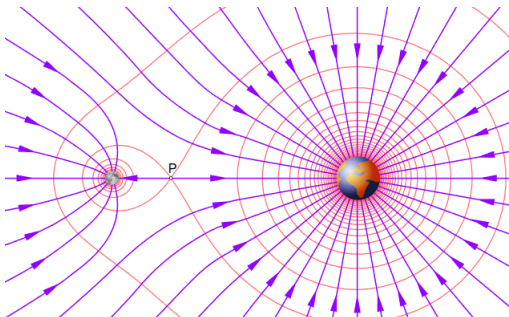
انرژی پتانسیل و نیرو

- همانطور که انرژی پتانسیل با انتگرال گیری از نیرو به دست می آید، می توان نیرو را با مشتق گیری از انرژی پتانسیل یافت. در حالت کلی داریم:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

هرچند، وقتی سیستم تقارن کروی داشته باشد، می توان به سادگی نوشت:

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr} \left(-\frac{GMm}{r} \right) = -\frac{GMm}{r^2}$$



انرژی پتانسیل گرانشی در نزدیکی سطح زمین

• پیشتر انرژی پتانسیل گرانشی در نزدیکی سطح زمین را به صورت $U = mgh$ به دست آوردیم. ولی در بالا انرژی پتانسیل گرانشی به صورت $1/r$ با فاصله تغییر می کرد. دلیل این اختلاف چیست؟

• در واقع می توان اولی را به راحتی از دومی به دست آورد. کره زمین با جرم M_E و شعاع R_E را در نظر بگیرید. در اینصورت اگر جسمی (مثلا یک سیب) به جرم m در فاصله h از سطح زمین قرار داشته باشد، اختلاف انرژی پتانسیل بین این نقطه و سطح زمین برابر است با

$$\Delta U = U(R_E + h) - U(R_E) = GmM_E \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_E + h} \right) = \frac{GmM_E}{R_E} \left(1 - \frac{1}{1 + h/R_E} \right)$$

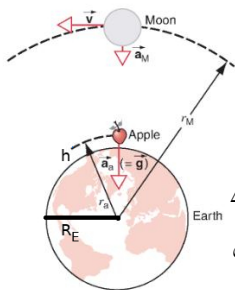
البته ارتفاع h در نزدیکی سطح زمین بسیار کمتر از شعاع زمین است؛ در نتیجه می توان از بسط دوجمله ای

$$(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 + \dots$$

استفاده کرد و عبارت درون پرانتز را بسط داد:

$$\Delta U = \frac{GmM_E}{R_E} (1 - [1 - h/R_E + \dots]) \approx \frac{GmM_E}{R_E^2} h = mgh$$

به این دلیل از رابطه $U = mgh$ برای انرژی پتانسیل گرانشی در نزدیکی سطح زمین استفاده می کنیم.



سقوط ماهواره ها و زباله های فضایی

- آیا تاکنون تصاویر برخورد زباله های فضایی به سطح زمین را دیده اید؟ به نظر شما سرعت این زباله ها در برخورد با زمین چقدر است؟ به مثال زیر دقت کنید.



مثال

● فرض کنید که ماهواره ای در فاصله $۳R_E$ نسبت به مرکز زمین در حال چرخش به دور زمین است. در این حالت محفظه ای که شامل یک سری تجهیزات است (با جرم m) با سرعت $v_i = ۵۲۵ \text{ m/s}$ از ماهواره به سمت زمین پرتاب می شود. سرعت این محفظه در هنگام ورود به اتمسفر (ارتفاع $h = ۱۰۰ \text{ km}$ نسبت به سطح زمین) چقدر است؟

● پاسخ: در این فاصله هیچ نیروی ناپایستاری به محفظه وارد نمی شود. بنابراین، پایستگی انرژی مکانیکی در این فاصله برقرار است. در نتیجه می توان نوشت:

$$E_i = E_f \Rightarrow K_i + U_i = K_f + U_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GmM_E}{r_i} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GmM_E}{r_f}$$

در نتیجه داریم:

$$v_f^2 = v_i^2 - 2GM_E \left(\frac{1}{3R_E} - \frac{1}{R_E + h} \right) = ۸/۱۸ \times ۱۰^۷ \text{ m}^2/\text{s}^2$$

که مطابق با سرعت $v_f = ۹/۰۵ \times ۱۰^۳ \text{ m/s}$ می باشد.

۱- دقت کنید که چطور کاهش انرژی مکانیکی باعث افزایش انرژی جنبشی شده است.

۲- دقت کنید که محاسبه انجام شده مستقل از جرم محفظه است.

پرسش: با در نظر گرفتن مقاومت جو، به نظر شما سرعت برخورد محفظه با سطح زمین نسبت به سرعت ورود آن به اتمسفر بیشتر و یا کمتر است؟

سیستم زمین-ماه

- ذره ای را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید که در یک خط مستقیم بین مراکز زمین و ماه می تواند حرکت کند. انرژی پتانسیل گرانشی این ذره منفی است. وقتی ذره از زمین دور می شود، انرژی پتانسیل آن افزایش می یابد تا اینکه این نوع انرژی به فاصله X به بیشترین مقدار خود می رسد. حال وقتی ذره بیشتر به ماه نزدیک می شود، انرژی پتانسیل کاهش می یابد. الف) فاصله X را بیابید. ب) حداقل انرژی جنبشی اولیه یک جسم چقدر باید باشد تا بتواند از ماه به زمین برسد؟

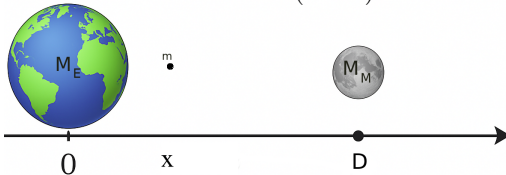
- پاسخ الف: انرژی پتانسیل گرانشی جرم مورد نظر را می توان به صورت زیر نوشت:

$$U(x) = -\frac{GM_E m}{x} - \frac{GM_M m}{D-x}$$

که کمینه آن برابر است با:

$$\frac{d}{dx}U(x) = \frac{GM_E m}{x^2} - \frac{GM_M m}{(D-x)^2} = 0 \Rightarrow X = D/(1 + \sqrt{M_M/M_E}) = 3.44 \times 10^8 \text{ m}$$

نشان دهید که این نقطه کمینه است.



سیستم زمین-ماه

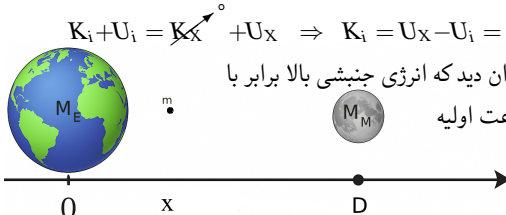
• ذره ای را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید که در یک خط مستقیم بین مراکز زمین و ماه می تواند حرکت کند. انرژی پتانسیل گرانشی این ذره منفی است. وقتی ذره از زمین دور می شود، انرژی پتانسیل آن افزایش می یابد تا اینکه این نوع انرژی به فاصله X به بیشترین مقدار خود می رسد. حال وقتی ذره بیشتر به ماه نزدیک می شود، انرژی پتانسیل کاهش می یابد. الف) فاصله X را بیابید. ب) حداقل انرژی جنبشی اولیه یک جسم چقدر باید باشد تا بتواند از ماه به زمین برسد؟

• پاسخ ب: وقتی پرتابه از ماه پرتاب می شود، انرژی جنبشی جسم مورد نظر تا نقطه X کاهش و سپس افزایش می یابد. کمترین مقدار انرژی جنبشی اولیه وقتی رخ خواهد داد که انرژی جنبشی در نقطه X صفر شود. اگر نقطه پرتاب از سطح ماه $R_M = X$ را با i نشان دهیم، می توان نوشت:

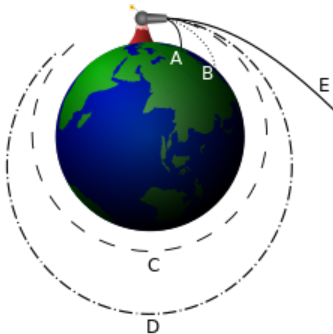
$$K_i + U_i = K_x + U_x \Rightarrow K_i = U_x - U_i = -\frac{GM_E m}{X} - \frac{GM_M m}{D - X} - \left(-\frac{GM_M m}{R_M}\right)$$

برای جسمی به جرم $m = 1 \text{ kg}$ می توان دید که انرژی جنبشی بالا برابر با

$1.53 \times 10^6 \text{ J}$ می باشد که معادل سرعت اولیه 1750 m/s است.



سرعت فرار



اگر توپی را از بالای کوه بلندی شلیک کنیم، با افزایش سرعت پرتاب گلوله ها چه اتفاقی خواهد افتاد؟ نیوتن اولین بار به این سوال پاسخ داد.

اگر جسم را به صورت افقی پرتاب کرده و سرعت پرتاب را افزایش دهیم، جسم در فاصله بیشتری به زمین برخورد می کند. اگر باز هم سرعت پرتاب را افزایش دهیم، به حدی می رسیم که پس از آن جسم دیگر به زمین برنمی گردد بلکه حول یک دایره حرکت می کند. این مقدار سرعت را سرعت حرکت دایروی می نامند. شکل را ببینید. سرعت حرکت دایروی برای سیاره زمین در حدود ۷/۹ کیلومتر بر ثانیه است!

اگر سرعت را باز هم افزایش دهیم، جسم بر روی یک دایره کشیده (بیضی) حرکت خواهد کرد. این مسیری است که ماه به دور زمین دارد و یا سیارات به دور خورشید دارند.

سرعت فرار (گریز)

- اگر سرعت را باز هم افزایش دهیم، جسم برای همیشه زمین را ترک کرده و به فضای بسیار دور می رود. سرعت لازم برای رسیدن به این حد را سرعت فرار (گریز) می نامند. سرعت گریز برای سیاره زمین در حدود

$$K_i + U_i = K_f + U_f = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R_E} = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{R_E}} = 11.2 \text{ km/s}$$

می باشد. سرعت گریز چند جرم دیگر را در جدول زیر ببینید.

- نگاهی دیگر به سرعت گریز: اگر جسمی را در فاصله بسیار دور از زمین رها کنیم، این جسم تحت تاثیر جاذبه زمین قرار گرفته و اندک اندک به سمت زمین حرکت می کند. تحت تاثیر جاذبه زمین، سرعت جسم نیز بیشتر و بیشتر شده و وقتی به زمین می رسد سرعت آن برابر با سرعت

Body	Mass (kg)	Radius (m)	Escape Speed (km/s)
Ceres ^a	1.17×10^{21}	3.8×10^5	0.64
Moon	7.36×10^{22}	1.74×10^6	2.38
Earth	5.98×10^{24}	6.37×10^6	11.2
Jupiter	1.90×10^{27}	7.15×10^7	59.5
Sun	1.99×10^{30}	6.96×10^8	618
Sirius B ^b	2×10^{30}	1×10^7	5200
Neutron star	2×10^{30}	1×10^4	2×10^5

گریز زمین (۱۱/۲ کیلومتر بر ثانیه) است.

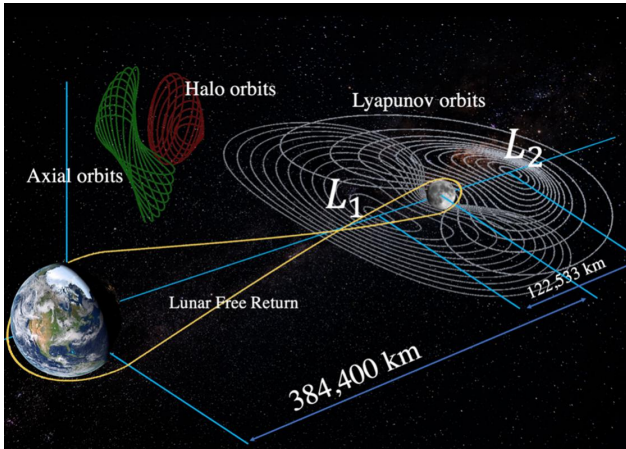
- اگر سرعت را باز هم افزایش دهیم، جسم حتی در بینهایت نیز سرعت خواهد داشت. مسیر حرکت چنین جسمی یک ”هذلولی“ است.

- اگر سرعت فرار برابر با سرعت نور باشد،

شعاع مورد نظر (شعاع شوارتزچیلد) را به دست آورید.

شاهراه های فضایی

بررسی دقیق میدان گرانشی سیستم زمین-ماه اهمیت بسیاری در سفرهای فضایی دارد. در واقع هرگونه ماهواره در مدار زمین و ماه، و نیز هرگونه سفر به خارج این سیستم، در مدارهایی انجام می شود که با مطالعه سیستم زمین-ماه تعیین می شوند.



پتانسیل گرانشی سیستم های بس-ذره ای

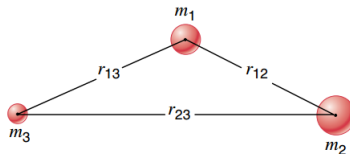
• یک سیستم شامل تعداد بسیار زیادی ذره با جرم های m_i را در نظر بگیرید. انرژی پتانسیل گرانشی این سیستم برابر است با کار لازم برای اینکه ذرات مورد نظر از بی نهایت به نقاط مورد نظر ما منتقل شوند.

• همچنین می توان نشان داد که انرژی پتانسیل سیستم برابر است با مجموع انرژی های پتانسیل زوج ها $-Gm_i m_j / r_{ij}$. دقت کنید که ترتیب انتقال اجرام اصلا مهم نیست.

• مثلا، انرژی پتانسیل گرانشی یک سیستم سه جرمی برابر است با

$$U = -\frac{Gm_1 m_2}{r_{12}} - \frac{Gm_1 m_3}{r_{13}} - \frac{Gm_2 m_3}{r_{23}}$$

مقدار $E = -U$ را انرژی بستگی سیستم نیز می نامند (انرژی که برای انتقال اجرام تا بینهایت لازم است).



• تمرین: انرژی پتانسیل گرانشی یک سیستم چهار جرمی را بنویسید.

اختیاری: انرژی پتانسیل گرانشی یک سیستم بس-ذره ای

استدلال کنید که انرژی پتانسیل گرانشی سیستم بس-ذره ای مقابل از رابطه زیر به دست می آید:

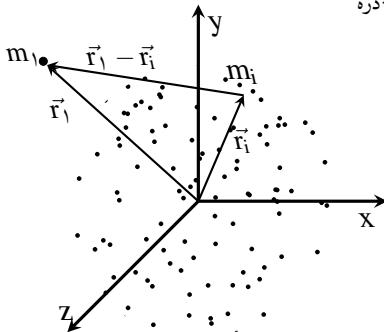
$$U = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}}$$

که در آن $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$

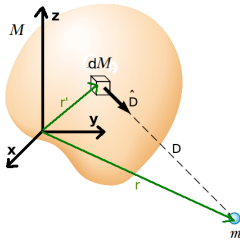
حدود پایین سری ها به صورتی انتخاب شده اند که سهم انرژی هر زوج فقط یکبار محاسبه شود. البته می توان سری دوم را به صورت زیر هم نوشت:

$$U = - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}}$$

دقت کنید که وارد کردن ضریب $\frac{1}{2}$ لازم است تا سهم انرژی هر زوج فقط یکبار محاسبه شود. سری دوم بر روی همه مقادیر $j \in [1, n]$ محاسبه می شود به جز $j = i$. زیرا اگر مقدار $j = i$ را لحاظ کنیم r_{ii} صفر و انرژی پتانسیل بینهایت خواهد شد.



اختیاری: پتانسیل گرانشی یک توزیع جرم پیوسته



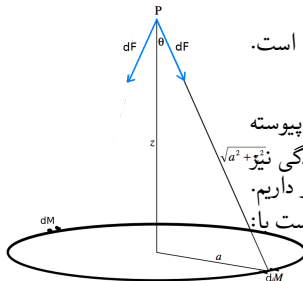
● انرژی پتانسیل گرانشی یک توزیع بار پیوسته با انتگرال گیری به دست می آید؛ هرچند به دلیل برخی جزئیات، این موضوع را به درس گرانش موکول می کنیم. همچنین شما می توانید انرژی پتانسیل الکتریکی را در کتاب ریتس-میلفورد و یا کتب استاندارد دیگر بیابید (کاملاً مشابه).

● هرچند، پتانسیل گرانشی یک جرم نقطه ای در اثر یک توزیع جرم پیوسته را می توان (با توجه به شکل مقابل) به راحتی نوشت:

$$U = -Gm \int \frac{dM}{D}$$

که در آن $D = |\vec{r} - \vec{r}'|$ فاصله بین المان جرم و جرم نقطه ای است. دقت کنید که در عبارت بالا خودگرانش جرم M لحاظ نمی شود.

● محاسبه پتانسیل گرانشی یک جرم نقطه ای در اثر یک توزیع جرم پیوسته معمولاً بسیار ساده تر از محاسبه نیروی گرانشی است. دلیل سادگی نیز $\sqrt{a^2 + z^2}$ این است که ما با یک محاسبه اسکالر (و نه برداری) سر و کار داریم. مثلاً، پتانسیل گرانشی جرم نقطه ای m در اثر حلقه مقابل برابر است با:



$$U = -Gm \int \frac{dM}{D} = \frac{-Gm}{D} \int dM = -\frac{GMm}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید مفهوم انرژی پتانسیل گرانشی و شیوه محاسبه آن را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ مفهوم نیروهای پایستار و ناپایستار را توضیح دهید.
- ۲ درباره تفاوت دیدگاه های برداری و اسکالر در مکانیک تحقیق کنید.
- ۳ توضیح دهید که را نیروی گرانش یک نیروی پایستار است.
- ۴ انرژی پتانسیل گرانشی یک سیستم دو جرمی را بنویسید.
- ۵ انرژی پتانسیل گرانشی یک سیستم چند جرمی را بنویسید.
- ۶ رابطه انرژی پتانسیل و نیرو را توضیح دهید.
- ۷ مفهوم سرعت فرار را توضیح دهید.
- ۸ درباره شعاع شوارتزشیلد سیاهچاله ها و رابطه آن با سرعت فرار تحقیق کنید.

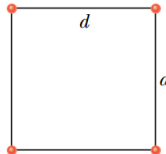
اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراغوش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.

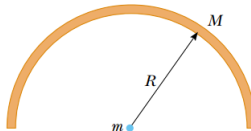


تمرین

- شکل زیر چهار جسم هرکدام با جرم $m = 20\text{ g}$ را نشان می دهد که در گوشه های یک مربع به ضلع $d_1 = 0.60\text{ m}$ قرار گرفته اند. الف) انرژی پتانسیل گرانشی سیستم را بیابید. اگر اضلاع مربع به $d_2 = 0.20\text{ m}$ کاهش یابند، و اجرام همچنان ساکن باشند، انرژی پتانسیل گرانشی سیستم را بیابید. پ) چقدر کار باید صرف شود تا سیستم در وضعیت جدید قرار بگیرد؟

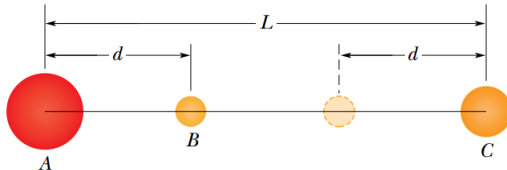


- انرژی پتانسیل گرانشی یک جرم نقطه ای m در مرکز یک کمان نیم دایره به جرم M و شعاع R را بیابید.



تمرین

- در شکل مقابل، سه جسم به جرم های $m_A = 80\text{g}$ ، $m_B = 10\text{g}$ و $m_C = 20\text{g}$ را می بینید که بر روی یک خط مشترک قرار دارند. همچنین داریم $L = 12\text{ cm}$ و $d = 4\text{ cm}$. ما گلوله B را جابجا می کنیم به صورتی که فاصله اش تا گلوله C به $d = 4\text{ cm}$ می رسد (و ساکن باقی می ماند). چقدر کار بر روی گلوله B الف) توسط ما، توسط نیروی گرانش اجرام A و C انجام می شود؟



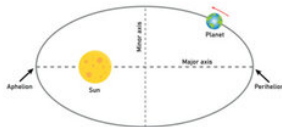
مبحث بعدی: قوانین کپلر و حرکت سیارات و ماهواره ها

● قوانین حرکت سیاره ای کپلر بدون شک یکی از اصلی ترین سرخ های نیوتن برای کشف قوانین دینامیک و گرانش بوده اند. این قوانین بر اساس بیش از سی سال مشاهدات تیکو براهه و کپلر به دست آمده اند. در جلسه بعد نشان خواهیم دید که چطور قوانین مکانیک این مشاهدات را به راحتی توضیح خواهند داد.

Kepler's Laws

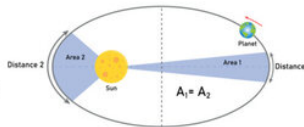
First Law

All planets move around the sun in elliptical orbits with the sun at one of the foci



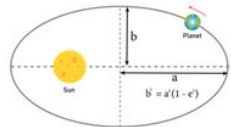
Second Law

A planet sweeps out equal areas in equal intervals of time



Third Law

The square of the orbital period of a planet is proportional to the cube of the orbit's semi-major axis



$$T^2 \propto a^3$$

T = Time to complete orbit
 a = Length of semi-major axis

منابع

- ❶ Halliday, David, Robert Resnick, and Jearl Walker; Fundamentals of physics, 10th edn. John Wiley & Sons, 2014.
- ❷ Halliday, D., R. Resnick, and K. S. Krane. "Physics, 5th edn." (2002).
- ❸ Ohanian, Hans C., and John T. Markert. Physics for engineers and scientists, 3th edn. 2007.
- ❹ Young, Hugh D., Roger A. Freedman, and Albert Lewis Ford. Sears and Zeman-sky's university physics, 13th edn. Pearson education, 2006.

با سپاس از توجه شما