

دینامیک سیستم های کوانتومی

معادله حرکت هایزنبرگ و قضیه اهرنفت

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ معادله حرکت هایزنبرگ و قضیه اهرنفت
- معادله حرکت هایزنبرگ
- قضیه اهرنفت

معادله حرکت هایزنبرگ

- در درس اول از این مجموعه معادله حاکم بر عملگر تحول زمانی را به صورت زیر به دست آوردیم:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}(t, t_0) = H \mathcal{U}(t, t_0) \quad \Leftrightarrow \quad -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}^\dagger(t, t_0) = \mathcal{U}^\dagger(t, t_0) H$$

همچنین در درس قبل دیدیم که عملگر دلخواهی مانند A در تصویر هایزنبرگ (H) با استفاده از رابطه زیر به همان عملگر در تصویر شرودینگر (S) مربوط می شود:

$$A^{(H)}(t) = \mathcal{U}^\dagger(t) A^{(S)} \mathcal{U}(t)$$

حالا می خواهیم معادله حاکم بر دینامیک عملگر $A^{(H)}(t)$ را بیابیم. این معادله را معادله حرکت هایزنبرگ می نامند.

- محاسبه سرراست است. فرض کنید $A^{(S)}$ حتی به زمان هم وابسته است. در این صورت می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A^{(H)}(t) &= \frac{d}{dt} \left(\mathcal{U}^\dagger(t) A^{(S)} \mathcal{U}(t) \right) \\ &= \frac{\partial \mathcal{U}^\dagger(t)}{\partial t} A^{(S)} \mathcal{U}(t) + \mathcal{U}^\dagger(t) \frac{\partial A^{(S)}}{\partial t} \mathcal{U}(t) + \mathcal{U}^\dagger A^{(S)} \frac{\partial \mathcal{U}(t)}{\partial t} \\ &= -\frac{i}{\hbar} \mathcal{U}^\dagger(t) H A^{(S)} \mathcal{U}(t) + \mathcal{U}^\dagger(t) \frac{\partial A^{(S)}}{\partial t} \mathcal{U}(t) + \frac{i}{\hbar} \mathcal{U}^\dagger A^{(S)} H \mathcal{U}(t) \\ &= \frac{i}{\hbar} \left[A^{(H)}, \mathcal{U}^\dagger(t) H \mathcal{U}(t) \right] + \mathcal{U}^\dagger(t) \frac{\partial A^{(S)}}{\partial t} \mathcal{U}(t) = \frac{i}{\hbar} \left[A^{(H)}, H^{(H)} \right] + \left(\frac{\partial A^{(S)}}{\partial t} \right)^{(H)} \end{aligned}$$

معادله حرکت هایزنبرگ

● رابطه اخیر کلی ترین شکل معادله حرکت هایزنبرگ است:

$$\frac{d}{dt} A^{(H)}(t) = \frac{1}{i\hbar} [A^{(H)}, H^{(H)}] + \left(\frac{\partial A^{(S)}}{\partial t} \right)^{(H)}$$

هرچند، در کتاب های مختلف صورت های متفاوتی از این معادله حرکت ارائه شده است. مثلاً در موارد ساده تر که هامیلتونی مستقل از زمان است و عملگر تحول زمانی با رابطه

$$U(t, t_0 = 0) = U(t) = \exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right)$$

داده می شود، هامیلتونی و $U(t)$ به وضوح جابجا می شوند. در نتیجه

$$H^{(H)} = U^\dagger(t) H U(t) = H$$

و معادله حرکت هایزنبرگ به صورت ساده تر زیر بازنویسی می شود:

$$\frac{d}{dt} A^{(H)}(t) = \frac{1}{i\hbar} [A^{(H)}, H]$$

این صورت معرفی شده معادله هایزنبرگ در کتاب ساکورایی است.

● معادله حرکت هایزنبرگ را اولین بار دیراک به دست آورده است!



تشابه با فیزیک کلاسیک

- معادله حرکت هایزنبرگ از لحاظ ساختار بسیار شبیه به معادله براکت پواسون در مکانیک کلاسیک است:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}$$

که در آن جابجاگر کلاسیک (براکت پواسون) به صورت زیر تعریف می شود:

$$\{F, G\}_{qp} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right)$$

- می توان نشان داد که معادلات کلاسیک حرکت را می توان با جایگذاری زیر از مشابه کوانتومی آنها به دست آورد:

$$\left[\cdot, \cdot \right]_{i\hbar} \rightarrow \{ \cdot, \cdot \}$$

هرچند، بنیانگذاران مکانیک کوانتومی معمولاً به صورت معکوس عمل می کردند. مثلاً دیراک از تناظر زیر برای یافتن معادلات در مکانیک کوانتومی استفاده می کرد:

$$\{ \cdot, \cdot \} \rightarrow \left[\cdot, \cdot \right]_{i\hbar}$$

- توجه کنیم که معادله هایزنبرگ حتی برای اسپین که مشابه کلاسیک ندارد نیز درست است. به عبارت دیگر، به دست آوردن مشابه کلاسیکی یک معادله از معادله کوانتومی همیشه می تواند اتفاق بیفتد؛ هرچند عکس این فرایند لزوماً همیشه درست نیست.

تحول زمانی نوسانگر هماهنگ ساده

• به عنوان اولین مثال از بررسی تحول زمانی با استفاده از معادله حرکت هایزنبرگ، هامیلتونی نوسانگر هارمونیک ساده را در نظر بگیرید.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

حالا معادله حرکت هایزنبرگ را برای دو مشاهده پذیر موجود به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{i}{\hbar}[H, x(t)] = \frac{p}{m} \quad \frac{d}{dt}p(t) = \frac{i}{\hbar}[H, p(t)] = -m\omega^2 x$$

اگر از طرفین دو معادله بالا نسبت به زمان انتگرال بگیریم، و برای حل دستگاه معادلات از شرایط اولیه زیر استفاده کنیم:

$$\dot{x}(0) = \frac{p_0}{m}$$

$$\dot{p}(0) = -m\omega^2 x_0$$

به جواب های زیر می رسم: $x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega} \sin(\omega t)$

$$p(t) = p_0 \cos(\omega t) - m\omega x_0 \sin(\omega t)$$

$$[x(t_1), x(t_2)] = \frac{i\hbar}{m\omega} \sin(\omega t_2 - \omega t_1) \quad \text{تمرین. اثبات کنید:}$$

$$[p(t_1), p(t_2)] = i\hbar m\omega \sin(\omega t_2 - \omega t_1)$$

$$[x(t_1), p(t_2)] = i\hbar \cos(\omega t_2 - \omega t_1)$$

معادله حرکت هایزنبرگ: اسپین در میدان مغناطیسی

• حالا مساله تقدم اسپین در میدان مغناطیسی را با استفاده از معادله حرکت هایزنبرگ حل می کنیم. هامیلتونی این سیستم به صورت $H = \frac{-ge}{\hbar mc} \vec{S} \cdot \vec{B} = \frac{-geB}{\hbar mc} S_z$ نوشته می شود. برای یک اسپین در میدان مغناطیسی، معادله حرکت هایزنبرگ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{dS_i^{(H)}}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [S_i^{(H)}, H] = \frac{1}{i\hbar} [U^\dagger S_i U, H] = \frac{1}{i\hbar} (U^\dagger S_i U H - H U^\dagger S_i U) \\ &= \frac{1}{i\hbar} (U^\dagger S_i H U - U^\dagger H S_i U) = \frac{1}{i\hbar} U^\dagger (S_i H - H S_i) U = \frac{\omega}{i\hbar} U^\dagger [S_i, S_z] U \end{aligned}$$

که در آن $\omega = \frac{geB}{\hbar mc}$ درستی این محاسبه را نشان دهید. در نتیجه برای هر سه اسپین داریم:

$$\frac{dS_x^{(H)}}{dt} = -\omega U^\dagger S_y U \quad \frac{dS_y^{(H)}}{dt} = \omega U^\dagger S_x U \quad \frac{dS_z^{(H)}}{dt} = 0$$

از طرفی عملگر تحول زمانی برابر است با

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar} = e^{-i\omega S_z t/\hbar} = e^{-i\omega \sigma_z t/2} = \cos(\omega t/2) - i\sigma_z \sin(\omega t/2)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\omega t/2) - i \sin(\omega t/2) & 0 \\ 0 & \cos(\omega t/2) + i \sin(\omega t/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2} \end{bmatrix}$$

همچنین سمت راست معادله دیفرانسیل اول به صورت زیر به دست می آید:

$$U^\dagger S_y U = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} e^{i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2} \end{bmatrix} = \frac{i\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & -e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{bmatrix}$$

معادله حرکت هایزنبرگ: اسپین در میدان مغناطیسی

- به علاوه سمت راست معادله دیفرانسیل دوم به صورت زیر به دست می آید:

$$U^\dagger S_x U = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} e^{i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2} \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه سه معادله یاد شده به صورت زیر تبدیل می شوند:

$$\frac{dS_x^{(H)}}{dt} = -\frac{i\hbar\omega}{2} \begin{bmatrix} 0 & -e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{dS_y^{(H)}}{dt} = \frac{\hbar\omega}{2} \begin{bmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{dS_z^{(H)}}{dt} = 0$$

جواب این سه معادله به صورت زیر است:

$$S_x^{(H)} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{bmatrix} + C_1 \quad S_y^{(H)} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & -ie^{i\omega t} \\ ie^{-i\omega t} & 0 \end{bmatrix} + C_2 \quad S_z^{(H)} = C_3$$

حال با توجه به اینکه مشاهده پذیرها در تصویر شرودینگر و تصویر هایزنبرگ در زمان اولیه با هم توافق دارند، یعنی $S_i^{(H)}(0) = S_i$ می توان نوشت:

$$S_x^{(H)} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{bmatrix} \quad S_y^{(H)} = \frac{i\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & -e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{bmatrix} \quad S_z^{(H)} = S_z$$

حرکت ذره در یک پتانسیل پایستار

- هامیلتونی حرکت ذره در یک پتانسیل دلخواه ناشی از یک نیروی پایستار را در نظر بگیرید:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

با استفاده از معادله حرکت هایزنبرگ می توان برای این هامیلتونی نوشت:

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \quad \dot{p} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad *$$

در اینجا از دو رابطه جابجایی زیر استفاده کرده ایم:

$$[\hat{x}^n, \hat{p}] = i \hbar n \hat{x}^{n-1} \quad [\hat{x}, \hat{p}^n] = i \hbar n \hat{p}^{n-1}$$

دقت کنید که معادلات * در ظاهر به $\hbar$ بستگی ندارند و شکل این معادلات عملاً شبیه به معادلات حرکت مکانیک هامیلتونی در فیزیک کلاسیک است. معنی این چیست؟

- اگر از طرفین معادله اول برحسب زمان انتگرال بگیریم و مقدار چشمداشتی طرفین معادله را محاسبه کنیم، آنگاه می بینیم که مقدار چشمداشتی مشاهده پذیر موقعیت با زمان به صورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$\langle x(t) \rangle = \frac{\langle p \rangle t}{m} + \langle x(0) \rangle$$

همچنین با جایگذاری معادله اول در معادله دوم و محاسبه مقدار چشمداشتی طرفین معادله به نتیجه زیر می رسیم:

$$m \frac{\partial^2 \langle x \rangle}{\partial t^2} = -\langle \nabla V \rangle$$

قضیه اهرنفست

• دو رابطه

$$\langle x(t) \rangle = \frac{\langle p \rangle t}{m} + \langle x(0) \rangle$$

و

$$m \frac{\partial^2 \langle x \rangle}{\partial t^2} = -\langle \nabla V \rangle \quad *$$

نشان می دهند که مقدار چشمداشتی مشاهده پذیرهای موقعیت و تکانه مشابه با روابط متناظر در مکانیک کلاسیک هستند.

• رابطه * را قضیه اهرنفست می نامند که توافق (تطابق) مکانیک کلاسیک با مکانیک کوانتومی در حد درست، یعنی حد $\hbar \rightarrow 0$ ، را نشان می دهد.

• تمرین مهم: قضیه اهرنفست را در سه بعد اثبات کنید. پاسخ در کتاب ساکورایی آمده است.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید مفهوم معادله حرکت هاینبرگ و قضیه اهرنفت را به درستی توضیح داده و برخی کاربردهای آنها را بیان کنید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ گوید:

- روش اثبات معادله حرکت هاینبرگ را توضیح دهید.
- معادله حرکت هاینبرگ در کلی ترین حالت را بنویسید.
- معادله حرکت هاینبرگ، وقتی هامیلتونی مستقل از زمان است، را بنویسید.
- رابطه بین معادله حرکت هاینبرگ و براکت پواسون در مکانیک کلاسیک را توضیح دهید.
- چطور می توان از روابط کلاسیک حرکت به روابط کوانتومی حرکت رسید؟
- چطور می توان از روابط کوانتومی حرکت به روابط کلاسیک حرکت رسید؟
- درباره اصل تطابق بوهر تحقیق کنید.
- قضیه اهرنفت را بنویسید و مفهوم آن را توضیح دهید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.

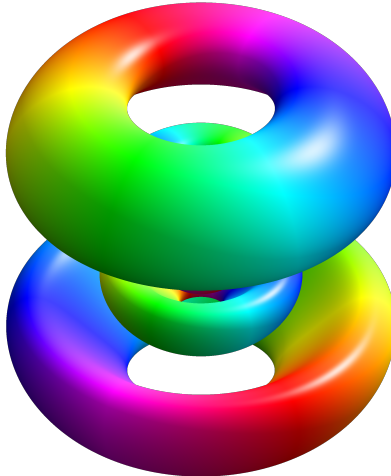
↓↓↓↓ ↑↑↑↑

تمرین

- مسائل شماره ۵ تا ۱۰ فصل دوم از کتاب ساکورایی را حل کنید.
- آیا هامیلتونی در تصویر شرودینگر و هایزنبرگ همیشه با هم برابرند؟ $H^{(H)} = H^{(S)}$

مبحث بعدی: کت های پایه و دامنه گذار در مکانیک کوانتومی

- در جلسه بعد درباره تحول کت های پایه و دامنه گذار در مکانیک کوانتومی بحث خواهیم کرد.



منابع

- ۱ Modern Quantum Mechanics, 3rd Edition, by J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge University Pr.
- ۲ Principles of Quantum Mechanics by Ramamurti Shankar, Plenum Press
- ۳ Quantum Mechanics: Concepts and Applications, 2nd Edition by Nouredine Zettili
- ۴ Introduction to Quantum Mechanics by David J. Griffiths
- ۵ Quantum Mechanics: An Introduction by Walter Greiner
- ۶ Quantum Physics I by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>
- ۷ Quantum Physics II by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/>
- ۸ Professor M does Science,
<https://www.youtube.com/@ProfessorMdoesScience>

با سپاس از توجه شما

