

# دینامیک سیستم های کوانتومی

## ویژه کت های انرژی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:  
[h.shenavar@gmail.com](mailto:h.shenavar@gmail.com)
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ ویژه کت های انرژی
- ویژه کت های انرژی
- تحول زمانی مقدار چشمداشتی

## ویژه کت های انرژی

• برای محاسبه تاثیر عملگر تحول زمانی بر یک کت دلخواه، یعنی

$$|\alpha, t_0; t\rangle = \mathcal{U}(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle$$

باید در ابتدا تاثیر این عملگر بر روی پایه های فضایی که در آن فضا کت  $|\alpha, t_0\rangle$  بسط داده شده است را بفهمیم. فرض کنید که کت حالت اولیه سیستم را با استفاده از ویژه کت های یک عملگر مانند A بسط می دهیم.

$$|\alpha, t_0 = 0\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle \langle a' | \alpha \rangle = \sum_{a'} c_{a'} |a'\rangle$$

حال با توجه به اینکه عملگر تحول زمانی عملاً توسط هامیلتونی تعیین می شود، اگر A و H سازگار باشند، یعنی

$$[A, H] = 0$$

آنگاه ویژه کت های A ویژه کت های H نیز هستند:

$$H|a'\rangle = E_{a'}|a'\rangle$$

• حال عملگر تحول زمانی در ساده ترین صورت هامیلتونی مستقل از زمان

$$\mathcal{U}(t) = \exp(-iHt/\hbar)$$

با فرض  $t_0 = 0$ ، را در نظر بگیرید. در این صورت می توان عملگر تحول زمانی را به راحتی، با استفاده از رابطه بستار، در پایه های  $|a'\rangle$  بسط داد:

$$\mathcal{U}(t) = \exp(-iHt/\hbar) = \sum_{a'} \sum_{a''} |a''\rangle \langle a'' | \exp(-iHt/\hbar) |a'\rangle \langle a'|$$

## ویژه کت های انرژی

- رابطه اخیر به سادگی نتیجه زیر را به دست می دهد:

$$\mathcal{U}(t) = \exp(-iHt/\hbar) = \sum_{a'} |a'\rangle \exp(-iE_{a'}t/\hbar) \langle a'|$$

حال که عملگر تحول زمانی را در پایه های انرژی نوشته ایم، عملاً توانایی حل تحول هر مساله ای را خواهیم داشت، به شرطی که بتوانیم حالت اولیه سیستم را در پایه های  $|a'\rangle$  بسط دهیم.

- مثلاً فرض کنید کت اولیه سیستم به صورت زیر بسط داده شده است:

$$|\alpha, t_0 = 0\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle \langle a' | \alpha \rangle = \sum_{a'} c_{a'} |a'\rangle$$

در این حالت، کت سیستم در هر لحظه از زمان به سادگی به صورت زیر به دست می آید:

$$|\alpha, t_0 = 0; t\rangle = \mathcal{U}(t) |\alpha, t_0 = 0\rangle = \exp(-iHt/\hbar) |\alpha, t_0 = 0\rangle$$

$$|\alpha, t_0 = 0; t\rangle = \sum \exp(-iHt/\hbar) |a'\rangle \langle a' | \alpha \rangle = \sum \exp(-iE_{a'}t/\hbar) c_{a'} |a'\rangle$$

به عبارت دیگر، ضرایب بسط در اثر تحول زمانی به صورت زیر تبدیل می شوند:

$$c_{a'}(t=0) \xrightarrow{\text{time evolution}} c_{a'}(t) = c_{a'}(t=0) \times e^{-\frac{iE_{a'}t}{\hbar}}$$

این رابطه گزاره مطرح شده در جلسه قبل را اثبات می کند:  $|c_{a'}(t)| = |c_{a'}(t=0)|$ .

دقت کنید که در حالی که دامنه بدون تغییر مانده است، فاز نسبی بین ویژه کت ها به صورت نوسانی با زمان تغییر می کند.

## تحول زمانی و ثوابت حرکت

● به عنوان یک مثال ساده، فرض کنید سیستم در ابتدا در یکی از ویژه حالت های انرژی  $|a'\rangle$  قرار دارد:

$$|\alpha, t_0 = 0\rangle = |a'\rangle$$

در نتیجه سیستم به صورت مقابل تحول زمانی می یابد:

$$|\alpha, t_0 = 0; t\rangle = e^{-\frac{iE_{a'}t}{\hbar}} |a'\rangle$$

پس اگر سیستم در ابتدا در یکی از ویژه حالت های مشترک  $A$  و  $H$  قرار داشته باشد، در اثر تحول زمانی همیشه در همان حالت باقی خواهد ماند. به یاد داشته باشید که ضرب شدن یک فاز در کت حالت هیچ تغییری در نتایج فیزیکی به بار نخواهد آورد.

● با توجه به این نکته می گوییم که هر مشاهده پذیر مانند  $A$  که با  $H$  سازگار باشد، یعنی  $[A, H] = 0$ ، آن مشاهده پذیر ثابت حرکت است.

● در هنگام بررسی "معادله حرکت هایزنبرگ" دوباره به مساله ثوابت حرکت برمی گردیم.

● با توجه به نکته اخیر، کار اصلی ما در ادامه بررسی تحول سیستم های کوانتومی این خواهد بود که مشاهده پذیرهایی را بیابیم که با هامیلتونی جابجا می شوند و سپس ویژه مقادیر و ویژه کت های این مشاهده پذیرها را بیابیم. وقتی اینکار را انجام دادیم، کت حالت اولیه سیستم را با استفاده از ویژه کت های آن مشاهده پذیر بسط می دهیم و سپس عملگر تحول زمانی را بر روی این بسط اثر می دهیم (مانند بالا). در اثر اینکار فاز نسبی ضرایب بسط تغییر خواهد کرد و ما نیز در اکثر اوقات با همین تغییر فاز نسبی سر و کار داریم.

## مجموعه‌ای از مشاهده پذیرهای سازگار

- تاکنون حالتی را در نظر گرفته ایم که فقط یک مشاهده پذیر سازگار با هامیلتونی وجود دارد. ولی حتی وقتی تعداد زیادی مشاهده پذیر داشته باشیم که دو به دو با خودشان و با هامیلتونی جابجا می شوند،

$$[A, B] = [B, C] = [A, C] = \dots = 0,$$

$$[A, H] = [B, H] = [C, H] = \dots = 0.$$

باز هم روند استدلال بالا برقرار خواهد بود. در این حالت می توان نوشت

$$\exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right) = \sum_{K'} |K'\rangle \exp\left(\frac{-iE_{K'}t}{\hbar}\right) \langle K'|,$$

که در آن  $E_{K'}$  فقط وقتی به صورت یکتا معلوم می شود که مقادیر  $a', b', c', \dots$  تعیین شده باشند.

- توجه، توجه: بنا به استدلال بالا، در هر سیستم کوانتومی تعیین همه مشاهده پذیرهای دو به دو سازگار که به صورت همزمان با هامیلتونی هم سازگاری دارند، اهمیت اساسی دارد زیرا این مجموعه از مشاهده پذیرها عملاً تحول سیستم را معین می کنند.

- وقتی مجموعه مشاهده پذیرهای سازگار بالا را یافتیم، حالت اولیه سیستم را با استفاده از ویژه کت های همزمان  $A, B, C, \dots$  بسط می دهیم و آنگاه می توانیم کلی ترین مساله برای هامیلتونی مستقل از زمان را حل کنیم.

## مقدار چشمداشتی یک مشاهده پذیر و تحول زمانی آن: حالت های پایا

- در ادامه می خواهیم ببینیم مقدار چشمداشتی یک مشاهده پذیر چطور با زمان تغییر می کند. فرض کنید که سیستم در ابتدا ( یعنی  $t = 0$  ) در یکی از ویژه کت های عملگر  $A$  قرار دارد و این عملگر با هامیلتونی سازگار است ( یعنی  $[A, H] = 0$  ). در این حالت می خواهیم تحول زمانی عملگر دلخواه  $B$  را در نظر بگیریم که لزوماً با  $A$  و  $H$  جا به جا نمی شود.
- توجه کنید که حالت سیستم به صورت  $|\alpha, t_0 = 0\rangle = \mathcal{U}(t, 0)|\alpha'\rangle$  با زمان تغییر می کند. در نتیجه تحول زمانی مقدار چشمداشتی  $B$  به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned}\langle B \rangle &= (\langle \alpha' | \mathcal{U}^\dagger(t, 0)) \cdot B \cdot (\mathcal{U}(t, 0) | \alpha' \rangle) \\ &= \langle \alpha' | \exp\left(\frac{iE_{\alpha'} t}{\hbar}\right) B \exp\left(\frac{-iE_{\alpha'} t}{\hbar}\right) | \alpha' \rangle \\ &= \langle \alpha' | B | \alpha' \rangle,\end{aligned}$$

که مستقل از زمان است!

- بنابراین، مقدار چشمداشتی یک مشاهده پذیر بر روی ویژه حالت های انرژی ( هامیلتونی ) با زمان تغییر نمی کند. به همین دلیل، ویژه حالت های انرژی را ”حالت های پایا ( stationary – states )“ می نامند.



مقدار چشمداشتی یک مشاهده پذیر و تحول زمانی آن: حالت های غیرپایا

- حالا فرض کنید که سیستم در ابتدا در یک برهمنهی از ویژه کت های انرژی قرار دارد. به عبارت دیگر حالت اولیه سیستم عبارت است از

$$|\alpha, t_0 = 0\rangle = \sum_{a'} c_{a'} |a'\rangle$$

چنین وضعیتی را حالت غیرپایا می نامند.

- برای حالت های غیرپایا می توان نشان داد که مقدار چشمداشتی عملگر  $B$  به صورت زیر با زمان تغییر می کند:

$$\begin{aligned} \langle B \rangle &= \left[ \sum_{a'} c_{a'}^* \langle a' | \exp \left( \frac{iE_{a'} t}{\hbar} \right) \right] \cdot B \cdot \left[ \sum_{a''} c_{a''} \exp \left( \frac{-iE_{a''} t}{\hbar} \right) |a''\rangle \right] \\ &= \sum_{a'} \sum_{a''} c_{a'}^* c_{a''} \langle a' | B | a'' \rangle \exp \left[ \frac{-i(E_{a''} - E_{a'}) t}{\hbar} \right]. \end{aligned}$$

دقت کنید که ضرایب بسط بالا با فرکانس بوهر در حال نوسان هستند:

$$\omega_{a''a'} = \frac{(E_{a''} - E_{a'})}{\hbar}$$

# نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید مفهوم ویژه کت های انرژی و تحول زمانی مقدار چشمداشتی را به درستی توضیح داده و برخی کاربردهای آنها را بیان کنید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ گوید:

● منظور از ویژه کت انرژی چیست؟

● ویژه کت و ویژه مقادیر انرژی چطور تحول زمانی یک سیستم کوانتومی را برای ما معین می کنند؟

● منظور از ثابت حرکت در مکانیک کوانتومی چیست؟

● چرا تعیین همه مشاهده پذیرهای سازگار با هامیلتونی اهمیت دارد؟

● منظور از حالت های پایا و غیر پایا را توضیح دهید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.

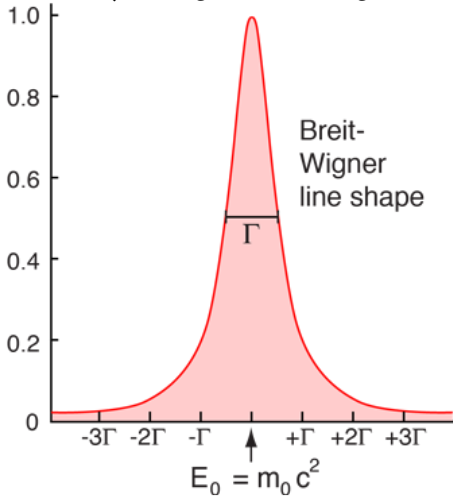
↓↓↓↓    ↑↑↑

## تمرین

● در مساله اتم هیدروژن همه مشاهده پذیرهای دو به دو سازگار و همچنین سازگار با هامیلتونی کدامند؟

## مبحث بعدی: دامنه همبستگی و رابطه عدم قطعیت انرژی-زمان

- در جلسه بعد درباره دامنه همبستگی و رابطه عدم قطعیت انرژی-زمان بحث خواهیم کرد. در واقع می خواهیم به این سوال مهم پاسخ دهیم که کت های حالت در زمان های مختلف چقدر به هم نزدیکند.



## منابع

- ❶ Modern Quantum Mechanics, 3rd Edition, by J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge University Pr.
- ❷ Principles of Quantum Mechanics by Ramamurti Shankar, Plenum Press
- ❸ Quantum Mechanics: Concepts and Applications, 2nd Edition by Nouredine Zettili
- ❹ Introduction to Quantum Mechanics by David J.Griffiths
- ❺ Quantum Mechanics: An Introduction by Walter Greiner
- ❻ Quantum Physics I by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare  
<https://ocw.mit.edu/courses/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>
- ❼ Quantum Physics II by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare  
<https://ocw.mit.edu/courses/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/>
- ❽ Professor M does Science,  
<https://www.youtube.com/@ProfessorMdoesScience>

با سپاس از توجه شما