

مقدمه ای بر دترمینان و ماتریس

قضیه ضرب دترمینان ها

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱. قضیه ضرب دترمینان ها
- قضیه ضرب دترمینان ها
- دترمینان ماتریس وارون

ادامه بررسی رابطه بین ماتریس ها و دترمینان ها

- تاکنون آموخته ایم که ماتریس ها آرایه های دوبعدی از اعداد، توابع و ... هستند در حالی که دترمینان ها اسکالرند. با این وجود یک رابطه اساسی نیز بین این دو وجود دارد، به این معنی که برای هر ماتریس مربعی می توان مقدار دترمینان را به صورت یکتا تعریف کرد. رابطه عمیق دیگری نیز بین دترمینان ها و ماتریس ها وجود دارد که به قضیه ضرب دترمینان ها مشهور است.
- قضیه ضرب دترمینان ها: فرض کنید A و B دو ماتریس با ابعاد $n \times n$ هستند. در اینصورت دترمینان حاصلضرب این دو ماتریس برابر است با حاصلضرب دترمینان های این دو ماتریس:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

اثبات: توجه می کنیم که درایه های دترمینان حاصلضرب، همان درایه های ماتریس حاصلضرب هستند:

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{n2} & \cdots \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \cdots + a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + \cdots + a_{nn}b_{n2} & \cdots \end{vmatrix}$$

اثبات

• ادامه اثبات: دقت کنید که عناصر دترمینان خود شامل ضرب داخلی تعدادی بردارند:

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{n2} & \cdots \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \cdots + a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + \cdots + a_{nn}b_{n2} & \cdots \end{vmatrix}$$

حال اگر بردار ستونی زیر را فرض کنیم

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

آنگاه می توانیم دترمینان بالا را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} \sum_{j_1} \mathbf{a}_{j_1} b_{j_1,1} & \sum_{j_2} \mathbf{a}_{j_2} b_{j_2,2} & \cdots \end{vmatrix}$$

دقت کنید که شمارنده های j_1 ، j_2 و ... خود از ۱ تا n تغییر می کنند. همچنین، جمع بندی های بالا مستقل از هم هستند. برای ادامه اثبات باید ویژگی های اصلی دترمینان را یادآوری کنیم.

یادآوری ویژگی های اصلی دترمینان

- ۱. تعویض دو سطر و یا دو ستون باعث تغییر علامت دترمینان می شود.
- ۲. مقدار دترمینان ترانهاده برابر است با مقدار دترمینان.
- ۳. ضرب عناصر یک سطر و یا یک ستون از دترمینان در یک عدد ثابت مانند k باعث می شود که مقدار دترمینان k برابر شود.

$$k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- ۴. اگر عناصر یک سطر و یا یک ستون مجموع دو گروه از عناصر باشند، آنگاه دترمینان را می توان به صورت مجموع دو دترمینان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- ویژگی های شماره ۳ و ۴ را در ادامه اثبات نیاز داریم.

ادامه اثبات

• ادامه اثبات: با توجه به ویژگی های شماره ۳ و ۴ بالا، می توانیم در عبارت زیر

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} \sum_{j_1} \mathbf{a}_{j_1} b_{j_1,1} & \sum_{j_2} \mathbf{a}_{j_2} b_{j_2,2} & \cdots \end{vmatrix}$$

جمع بندی و فاکتورهای $\mathbf{b}$ را به خارج دترمینان منتقل کنیم و به نتیجه زیر برسیم:

$$\det(AB) = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_n} b_{j_1,1} b_{j_2,2} \cdots b_{j_n,n} \det(\mathbf{a}_{j_1} \mathbf{a}_{j_2} \cdots \mathbf{a}_{j_n})$$

توجه کنید که اگر حتی یکی از اندیس های j_μ در عبارت $\det(\mathbf{a}_{j_1} \mathbf{a}_{j_2} \cdots \mathbf{a}_{j_n})$ با هم برابر باشند، آنگاه مقدار این دترمینان صفر خواهد شد (دترمینان یک ماتریس با دو ستون مشابه صفر است). ولی اگر همه اندیس های j_μ نابرابر باشند، آنگاه داریم:

$$\det(\mathbf{a}_{j_1} \mathbf{a}_{j_2} \cdots \mathbf{a}_{j_n}) = \pm \det(A)$$

علامت $\pm$ بستگی به پاریته (زوجیت) ترتیب قرار گرفتن ستون ها در عبارت مورد نظر دارد. این دو شرط را می توان با وارد کردن نماد لوی-چویتا به صورت زیر برآورده کرد:

$$\det(\mathbf{a}_{j_1} \mathbf{a}_{j_2} \cdots \mathbf{a}_{j_n}) = \epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} \det(A)$$

ادامه اثبات

- ادامه اثبات: با وارد کردن عبارت اخیر در دترمینان حاصلضرب می توان حاصلضرب دترمینان ها را یافت:

$$\det(AB) = \det(A) \sum_{j_1 \dots j_n} \varepsilon_{j_1 \dots j_n} b_{j_1,1} b_{j_2,2} \dots b_{j_n,n} = \det(A) \det(B)$$

در اینجا از تعریف دترمینان ها برای معرفی دترمینان ماتریس B استفاده کرده ایم. پایان اثبات!

- تمرین: برای دو ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

الف) AB را بیابید.

ب) $\det(AB)$ را بیابید.

پ) $\det(A)$ و $\det(B)$ را بیابید.

ت) درستی قضیه ضرب دترمینان ها را نشان دهید.

- تعمیم قضیه ضرب دترمینان ها برای چند ماتریس به صورت زیر است:

$$\det(A_1 A_2 \dots A_n) = \det(A_1) \det(A_2) \dots \det(A_n)$$

راه های دیگر برای اثبات

- آیا به جز این اثبات طولانی، راه دیگری نیز برای اثبات این رابطه هست؟
- بله! در بخش ”فضاهای برداری“ که بر ریاضیات مورد نیاز برای مکانیک کوانتومی متمرکز است، رابطه بستار را معرفی خواهیم کرد. سپس راه دیگری برای اثبات قضیه ضرب دترمینان ها را معرفی می کنیم که عملاً در یک سطر نوشته می شود. شما می توانید این اثبات را در درس زیر نیز ببینید.

تغییر پایه های فضا در مکانیک کوانتومی

مفاهیم بنیادی مکانیک کوانتومی
تغییر پایه های فضا در مکانیک کوانتومی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

یکی از نتایج مهم قضیه ضرب دترمینان

- توجه کنید که با استفاده از قضیه ضرب دترمینان می توان به رابطه بین دترمینان یک ماتریس و دترمینان وارون آن ماتریس به سادگی پی برد:

$$\det(AA^{-1}) = \det(\mathbf{1}) = 1 = \det(A) \det(A^{-1})$$

و یا

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

این رابطه اساسی را به یاد داشته باشید.

- از این رابطه واضح است که اگر $\det(A) = 0$ ، آنگاه $\det(A^{-1})$ و همچنین A^{-1} نمی توانند وجود داشته باشد. بنابراین نتیجه زیر اثبات می شود:

- قضیه: یک ماتریس تکین است اگر و فقط اگر دترمینان آن صفر باشد.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید قضیه ضرب دترمینان ها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

۱. قضیه ضرب دترمینان ها را بیان کنید.
۲. کاربرد قضیه ضرب دترمینان ها را بیان کنید.
۳. تعمیم قضیه ضرب دترمینان ها را بیان کنید.
۴. رابطه بین دترمینان یک ماتریس و دترمینان وارون آن ماتریس چیست؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.

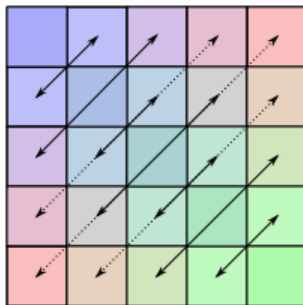


تمرین

- تمرین های موجود در متن درس را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: ترانهاد و الحاقی یک ماتریس

در جلسه بعد درباره رتبه، ترانهاد، الحاقی و رد ماتریس ها بحث خواهیم کرد.



منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ❻ <https://math.libretexts.org/>

با سپاس از توجه شما

