

حسابان برای فیزیک

درس پنجم: آشنایی با انتگرال های چندگانه

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم

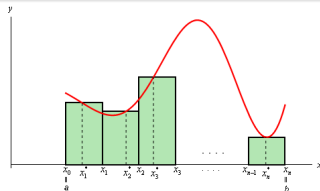


دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس برای آشنایی مقدماتی دانشجویان جدیدالورود، که تاکنون با حساب انتگرال آشنا نشده اند، و به جهت کمک به فهم دروس فیزیک مکانیک و فیزیک الکتریسیته و مغناطیس تهیه شده است. این مجموعه درس، از لحاظ گستردگی و دقت در ارائه مفاهیم، قطعاً جایگزین درس ریاضی عمومی نخواهد بود.
 - این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در پاییز و زمستان سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
 - خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
- h.shenavar@gmail.com
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که، با تلاش بسیار، امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

- ۱ درس پنجم: آشنایی با انتگرال های چندگانه
- انتگرال دوگانه
 - انتگرال سه گانه

یادآوری انتگرال یگانه و قضایای اساسی حسابان



مفهوم هندسی انتگرال: انتگرال یک تابع برابر است با مساحت زیر نمودار آن تابع (شکل بالا را ببینید). این مساحت را می توان با جمع بندی به دست آورد:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

قضیه اساسی اول: فرض کنید تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد. در این صورت تابع $F(x)$ برای هر مقدار x در این بازه که به صورت:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

تعریف می شود یک پادمشتق تابع f است؛ یعنی:

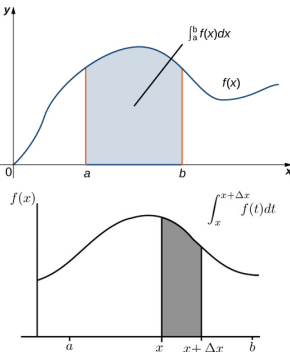
$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

قضیه اساسی دوم: فرض کنید تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد و تابع $F(x)$ برای هر مقدار x در این بازه پادمشتق تابع f باشد؛ آنگاه

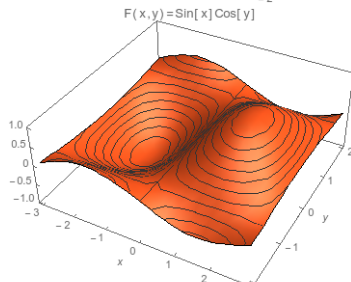
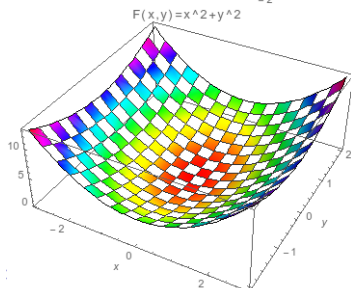
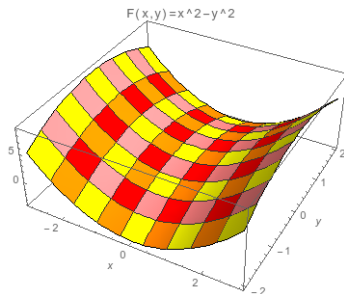
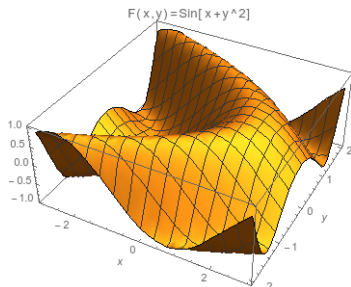
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

ولی همه توابع تک متغیره نیستند! سوالی که می خواهیم امروز پاسخ دهیم این است که با توابع چند متغیره چگونه برخورد کنیم؟ یعنی، انتگرال این توابع را چگونه محاسبه کنیم؟

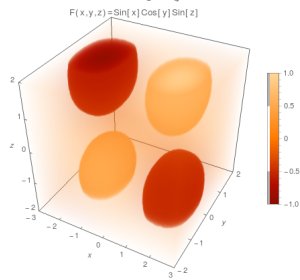
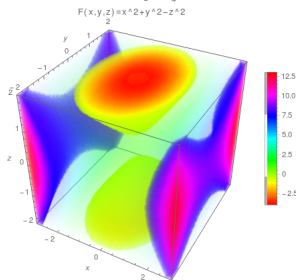
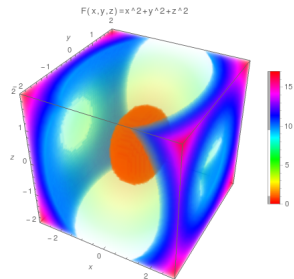
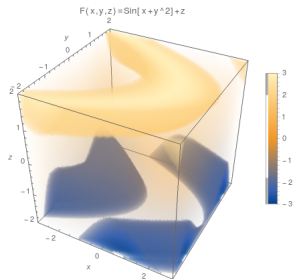
شکل ها از ویکی و <https://tutorial.math.lamar.edu/>



مثال هایی از توابع دو متغیره



مثال هایی از توابع سه متغیره



مفهوم انتگرال دوگانه

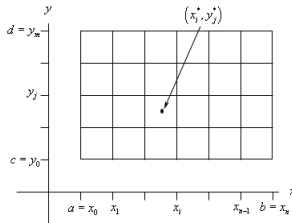
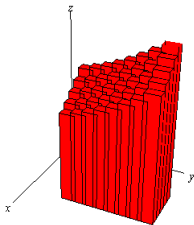
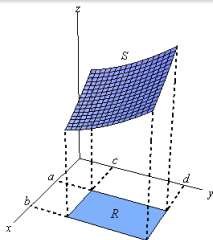
انتگرال دوگانه تابع دومتغیره $f(x, y)$ روی ناحیه مستطیلی $R = [a, b] \times [c, d]$ برابر است با حجم زیر این تابع دو متغیره:

$$\iint_R f(x, y) dA = f(x_1^*, y_1^*) \Delta x_1 \Delta y_1 + f(x_1^*, y_2^*) \Delta x_1 \Delta y_2 + \dots$$

کمیت $\Delta A_i = \Delta x_i \Delta y_i$ از جنس مساحت است و آن را المان (جزء) سطح می نامند. شکل زیر را ببینید. در حالت حدی، باید مقدار این المان های سطح بسیار کوچک باشد تا مقدار انتگرال هرچه دقیق تر محاسبه شود؛ به عبارت دیگر، باید تعداد المان های سطح بسیار زیاد باشد:

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_i$$

در اینجا بازه $[a, b]$ در جهت افقی را به n قسمت و بازه $[c, d]$ در راستای عمود را به m بخش تقسیم کرده ایم.



شکل ها از

<https://tutorial.math.lamar.edu/>

چطور انتگرال های دوگانه را محاسبه کنیم؟



قضیه فابینی (و یا فوبینی؛ ۱۸۷۹ - ۱۹۴۳): اگر تابع $f(x, y)$ بر روی ناحیه مستطیلی

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

پیوسته باشد، آنگاه مقدار انتگرال دوگانه را می توان با محاسبه پشت سر هم انتگرال های یگانه به دست آورد:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

لطفا دقت کنید که ترتیب انتگرال گیری اهمیتی ندارد (مثال های بعد را ببینید).

تفسیر قضیه فابینی: برای محاسبه انتگرال دوگانه، می توان انتگرال یگانه $\int_a^b f(x, y) dx$ را روی یک بازه بسیار کوچک dy محاسبه کرد. از آنجا که تغییر در y بسیار اندک است، می توان این متغیر را ثابت فرض کرده و مقدار انتگرال $\int_a^b f(x, y) dx$ را با این فرض به دست آورد. در این صورت، مقدار $\int_a^b f(x, y) dx$ برابر است با حجم بسیار کوچک یک رشته در شکل روبرو. با جمع بندی روی این رشته ها، یعنی با پیدا کردن انتگرال

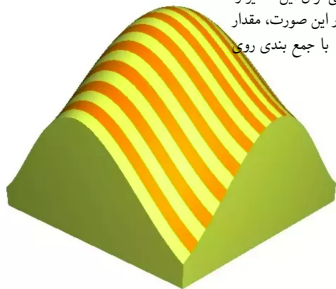
$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

می توان مقدار انتگرال دوگانه مورد نظر را یافت.

شکل روبرو را ببینید.

به مثال های زیر دقت کنید.

منبع شکل ها: ویکی.



مثال هایی از محاسبه انتگرال دوگانه

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 \left[\int_0^2 (1 + (x-1)^2 + 4y^2) dy \right] dx &= \int_0^3 \left(y + (x-1)^2 y + \frac{4}{3} y^3 \Big|_0^2 \right) dx \\
 &= \int_0^3 \left(2 + 2(x-1)^2 + \frac{32}{3} \right) dx \\
 &= 2x + \frac{2}{3}(x-1)^3 + \frac{32}{3}x \Big|_0^3 \\
 &= 6 + \frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{32}{3} \cdot 3 - (0 - 1 \cdot \frac{2}{3} + 0) \\
 &= 44.
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \left[\int_0^3 (1 + (x-1)^2 + 4y^2) dx \right] dy &= \int_0^2 \left(x + \frac{(x-1)^2}{2} + 4y^2 x \Big|_0^3 \right) dy \\
 &= \int_0^2 \left(3 + \frac{1}{2} + 12y^2 + \frac{1}{2} \right) dy \\
 &= 3y + \frac{1}{2}y + 4y^3 + \frac{1}{2}y \Big|_0^2 \\
 &= 6 + \frac{16}{3} + 32 + \frac{1}{3} \\
 &= 44.
 \end{aligned} \tag{2}$$

مثال هایی از محاسبه انتگرال دوگانه

فرض کنید $R = [0, 2] \times [0, 1]$. انتگرال تابع $f(x, y) = xe^y$ را روی ناحیه R محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}\iint_R xe^y dA &= \int_0^1 \left(\int_0^2 xe^y dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} e^y \Big|_{x=0}^2 \right) dy \\ &= \int_0^1 2e^y dy = 2e - 2\end{aligned}$$

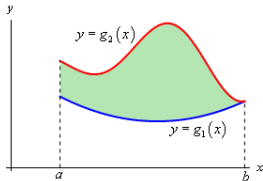
$$\begin{aligned}\iint_R xe^y dA &= \int_0^2 \left(\int_0^1 xe^y dy \right) dx \\ &= \int_0^2 (xe^y \Big|_{y=0}^1) dx \\ &= \int_0^2 (e - 1)x dx \\ &= \frac{(e - 1)x^2}{2} \Big|_0^2 = 2e - 2.\end{aligned}$$

اگر تابع $f(x, y)$ جداپذیر باشد، یعنی $f(x, y) = g(x)h(y)$ ، آنگاه وضعیت حتی ساده تر هم می شود:

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_R g(x) h(y) dA = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right)$$

اگر ناحیه انتگرال گیری مستطیلی نباشد؟

Case 1



در صورتی که تابع دومتغیره $f(x, y)$ بر روی ناحیه

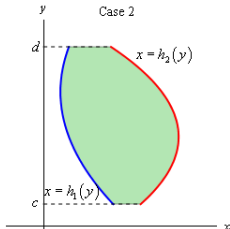
$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

پیوسته باشد، داریم:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

شکل بالا را ببینید.

Case 2



در صورتی که تابع دومتغیره $f(x, y)$ بر روی ناحیه

$$D = \{(x, y) | h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d\}$$

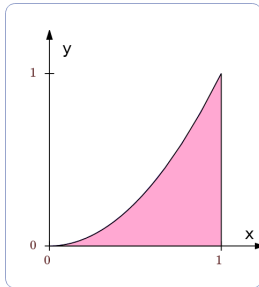
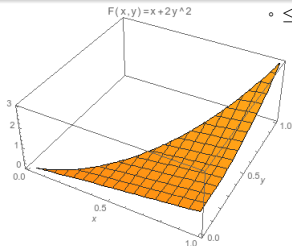
پیوسته باشد، داریم:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

شکل پایین را ببینید.

منبع شکل ها: <https://tutorial.math.lamar.edu/>

مثال از ناحیه غیر مستطیلی



• انتگرال تابع $f(x, y) = x + 2y^2$ (شکل بالا) بر روی ناحیه $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq \sqrt{x}$ (شکل پایین) را بیابید.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} (x + 2y^2) dy dx &= \int_0^1 \left(xy + \frac{2}{3} y^3 \Big|_0^{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) dx \\ &= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{29}{15}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 (x + 2y^2) dx dy &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + 2y^2 x \Big|_{\sqrt{y}}^1 \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + 2y^2 - \frac{y}{2} - 2y^2 \sqrt{y} \right) dy \\ &= \frac{y}{2} + \frac{2}{3} y^3 - \frac{y^2}{4} - \frac{4}{5} y^{5/2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{4}{5} = \frac{29}{15}. \end{aligned}$$

منبع: <https://www.whitman.edu/>

انتگرال سه گانه

برای پیدا کردن نتیجه انتگرال های سه گانه، و انتگرال های چندگانه، عملاً نتایج به دست آمده برای انتگرال دوگانه را تعمیم می دهیم.

می خواهیم انتگرال تابع سه متغیره $f(x, y, z)$ بر روی بازه مکعبی $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ را محاسبه کنیم. یعنی

$$\iiint_B f(x, y, z) dV$$

می خواهیم نتیجه انتگرال زیر را بیابیم:

دقت کنید که $dV = dx dy dz$ همان المان حجم است. با تعمیم قضیه فوبینی می توان دریافت که:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_r^s \left(\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y, z) dx \right] dy \right) dz$$

می خواهیم انتگرال تابع سه متغیره زیر بر بازه نشان داده شده را بیابیم:

$$\iiint_B \lambda xyz dV \quad B = [2, 3] \times [1, 2] \times [0, 1]$$

$$\iiint_B \lambda xyz dV = \int_1^2 \int_2^3 \int_0^1 \lambda xyz dz dx dy$$

پاسخ:

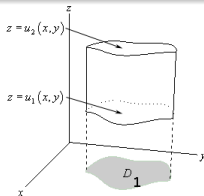
$$= \int_1^2 \int_2^3 \lambda xyz^2 \Big|_{z=0}^{z=1} dx dy$$

$$= \int_1^2 \int_2^3 \lambda xy dx dy \quad (3)$$

$$= \int_1^2 \lambda x^2 y \Big|_{x=2}^{x=3} dy$$

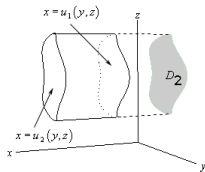
$$= \int_1^2 \lambda 5y dy = 15$$

محاسبه انتگرال های سه گانه روی ناحیه های کلی

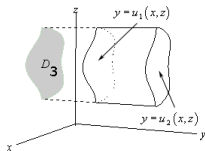


برای پیدا کردن نتیجه یک انتگرال سه گانه، می توان این انتگرال را به یکی از سه روش زیر محاسبه کرد. اساس این روش بر تجزیه ناحیه انتگرال گیری (E) به زیرفضاها (D_1, D_2, D_3) و محاسبه پشت سر هم انتگرال هاست. این محاسبات علی الاصول ممکن (حداقل از نظر عددی)، ولی در عمل بسیار مشکل هستند. چالش اصلی در این محاسبات، همانطور که در اسلایدهای بعد خواهیم دید، وارد کردن صحیح حدود هر انتگرال (مرز) است.

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_{D_1} \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$



$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_{D_2} \left[\int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dA$$



$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_{D_3} \left[\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dA$$

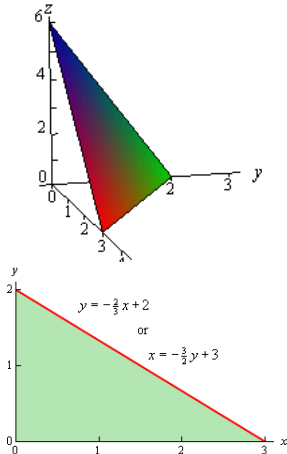
منبع: <https://tutorial.math.lamar.edu/>

مثال: محاسبه انتگرال های سه گانه روی ناحیه های کلی

انتگرال تابع $F(x, y, z) = 2x$ بر روی حجم زیر صفحه $2x + 3y + z = 6$ را بیابید.

پاسخ:

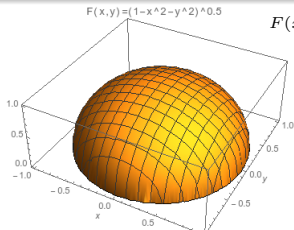
$$\begin{aligned} \iiint_E 2x \, dx \, dy \, dz &= \iint_D \left[\int_0^{6-2x-3y} 2x \, dz \right] dx \, dy \\ &= \iint_D 2xz \Big|_0^{6-2x-3y} dx \, dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{6-2x} 2x(6-2x-3y) \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 \left(12xy - 4x^2y - 3xy^2 \right) \Big|_0^{6-2x} dx \\ &= \int_0^2 \left(\frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 12x \right) dx \\ &= \left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 6x^2 \right) \Big|_0^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$



به قرار گرفتن حدود در هر انتگرال دقت کنید و دلیل هر حد را برای خود توجیه کنید. همچنین، با جابجایی دو انتگرال در خط سوم به بعد، نشان دهید که مقدار نهایی انتگرال سه گانه تغییر نخواهد کرد.

منبع: <https://tutorial.math.lamar.edu/>

حجم



حجم را می توان به دو روش (بسته به مساله) محاسبه کرد. اگر حجم زیر یک تابع دو متغیره $F(x, y)$ را بخواهیم، آنگاه می توان با محاسبه انتگرال دو گانه زیر، حجم را به دست آورد:

$$\iint_R F(x, y) \, dx \, dy$$

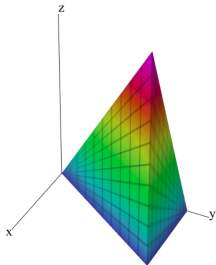
در اینجا R ناحیه ای است که تابع بر روی آن تعریف شده است. مثلاً، حجم یک نیمکره برابر است با

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$$

در اینجا R یک دایره در صفحه xy به شعاع یک می باشد. شکل بالا را ببینید.

همچنین می توان حجم یک ناحیه مشخص از فضا (ناحیه ای که مرزهای آن تعریف شده اند) را با محاسبه انتگرال سه گانه زیر به دست آورد:

$$V = \iiint_E dV = \iiint_E dx \, dy \, dz$$

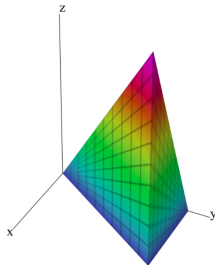


در اینجا E ناحیه ای است که درون مرزهای تعریف شده قرار دارد. شکل پایین و مثال اسلاید بعدی را ببینید.

روش اول در واقع حالت خاصی از روش دوم است. چرا؟

منبع شکل پایین: <https://www.whitman.edu/>

مثال: حجم یک چهار وجهی



حجم چهار وجهی که بین نقاط $(0, 0, 0)$ ، $(0, 3, 0)$ ، $(2, 3, 0)$ و $(2, 3, 5)$ محصور شده است را به دست آورید.

پاسخ این انتگرال در زیر آورده شده است ولی توجه مرزهای مساله (که در هر انتگرال وارد شده است) را بر عهده شما قرار می دهم.

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{x/2}^3 \int_0^{5x/2} dz \, dy \, dx &= \int_0^2 \int_{x/2}^3 z \Big|_0^{5x/2} dy \, dx \\ &= \int_0^2 \int_{x/2}^3 \frac{5x}{2} dy \, dx \\ &= \int_0^2 \frac{5x}{2} y \Big|_{x/2}^3 dx \\ &= \int_0^2 \left(\frac{15x}{2} - \frac{15x^2}{4} \right) dx \\ &= \left(\frac{15x^2}{4} - \frac{15x^3}{12} \right) \Big|_0^2 \\ &= 15 - 10 = 5 \end{aligned}$$

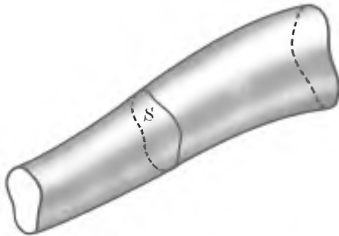
منبع: <https://www.whitman.edu/>

لطفا دقت کنید که چالش اصلی در تعیین اینگونه انتگرال ها تعیین مرز است و وضعیت برای توابع پیشرفته تر، و مرزهای پیچیده، بسیار چالش برانگیز خواهد شد.

انتگرال های چندگانه همه جا هستند!

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dV = - \iint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\rho \mathbf{v}) \, dS.$$

$$\iint_S \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p - \rho \mathbf{g} + \rho \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} \, dS = \text{a constant}.$$



$$\oiint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \, dV$$

$$\oiint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(\iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} + \epsilon_0 \iint_A \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \right)$$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید نکات اصلی انتگرال های دوگانه و سه گانه اشاره شده در اینجا را بیان کنید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ گوئید:

چند مثال از توابع دو متغیره، سه متغیره، چهار متغیره و ... بنویسید.

مفهوم هندسی انتگرال دوگانه را بیان کنید.

قضیه فوبینی و تفسیر هندسی آن را بیان کنید.

چطور انتگرال های دوگانه روی ناحیه های مستطیل شکل را محاسبه می کنیم؟

چطور انتگرال های دوگانه روی ناحیه های کلی را محاسبه می کنیم؟

چطور انتگرال های سه گانه را روی ناحیه های مکعب شکل محاسبه می کنیم؟

چطور انتگرال های سه گانه روی ناحیه های کلی را محاسبه می کنیم؟

دو روش اصلی محاسبه حجم را بیان کنید.

چالش اصلی در تعیین انتگرال های چندگانه چیست؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید. هرچند، پیشنهاد بهتر آن است که فصل های مربوط به انتگرال های دوگانه و سه گانه در یک کتاب استاندارد حساب دیفرانسیل و انتگرال را مطالعه کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.



تمرین: نتایج زیر را اثبات کنید.

منبع تمرین ها: <https://www.whitman.edu/>

$$\int_0^2 \int_0^4 (1+x) dy dx = 16$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^2 (x+y) dy dx = 4$$

$$\int_1^2 \int_0^y xy dx dy = 15/8$$

$$\int_0^1 \int_{y^2/2}^{\sqrt{y}} dx dy = 1/2$$

$$\int_1^2 \int_1^x \frac{x^2}{y^2} dy dx = 5/6$$

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{y}{e^x} dy dx = 12 - 65/(2e)$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^{x^2} x \cos y dy dx = 1/2$$

تمرین: نتایج زیر را اثبات کنید.

منبع تمرین ها: <https://www.whitman.edu/>

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x+y} (2x + y - 1) dz dy dx = 11/24$$

$$\int_0^2 \int_{-1}^x \int_1^y xyz dz dy dx = 623/60$$

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{\ln y} e^{x+y+z} dz dy dx = -3e^2/4 + 2e - 3/4$$

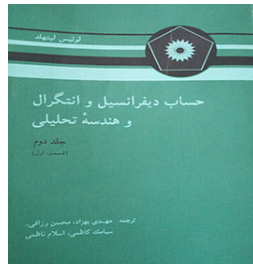
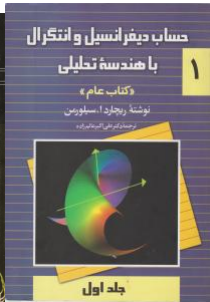
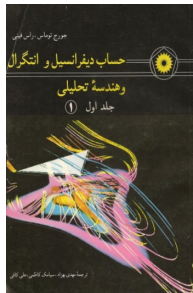
$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin \theta} \int_0^{r \cos \theta} r^2 dz dr d\theta = 1/20$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\sin \theta} \int_0^{r \sin \theta} r \cos^2 \theta dz dr d\theta = \pi/48$$

$$\int_0^1 \int_0^y \int_0^{x+y} x dz dx dy = 11/84$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^{x^2} x \cos y dy dx = 1/2$$

از منابع اصلی برای یادگیری حسابان استفاده کنید: سیلورمن، توماس، لیتلهد، آپوستل.



کلاس درس بسیار جذاب دکتر سیاوش شهشهانی را حتما ببینید!

کلاس درس دکتر سیاوش شهشهانی از دانشگاه صنعتی شریف (برای دروس ریاضی عمومی) را می توانید از آپارات و همچنین مرکز آموزش های آزاد دانشگاه صنعتی شریف دریافت کنید.
<http://ocw.sharif.edu/courses>



+ بارگذاری ویدیو



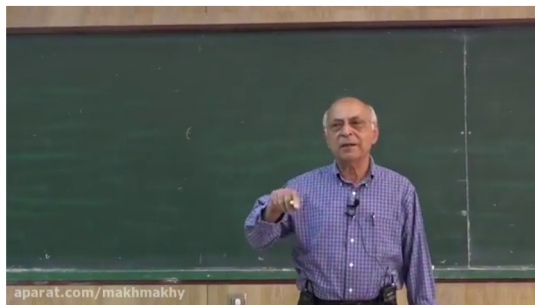
جستجوی ویدیوهای رویدادها، شخصیتها و ...

۶۶



ریاضی ۱
احسان ۱۸/۱

- ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشهانی - دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۱
احسان
- ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشهانی - دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۲
احسان
- ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشهانی - دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۴
احسان
- ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشهانی - دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۵
احسان
- ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشهانی



پخش خودکار

ویدیوهای مشابه

۷,۵۰۸

ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشهانی - دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۱

رتبه برتر کنکور ارشد کامپیوتر (دانشجو ارشد دانشگاه صنعتی شریف)



+ دنبال کردن



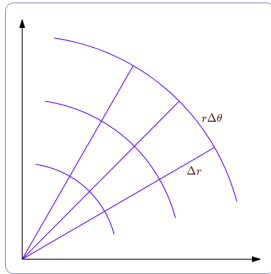
۶۳

احسان

۶۳ دنبال کننده

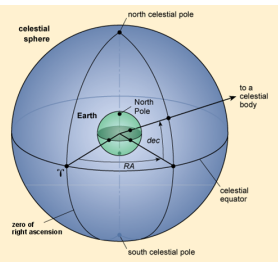
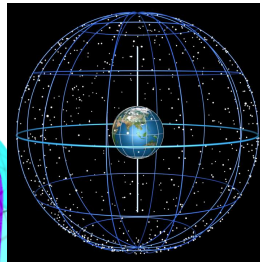
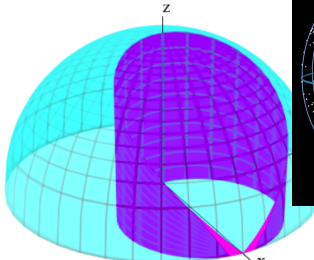


مبحث بعدی: انتگرال های چند گانه در مختصات قطبی استوانه ای و کروی



برخی از مسائل ذاتا تقارن کروی و یا استوانه ای دارند و مرز انتگرال ها در چنین مسائلی شامل توابع پیچیده در مختصات دکارتی است. هرچند، اگر به جای مختصات دکارتی از مختصات کروی و یا استوانه ای استفاده کنیم، حل انتگرال های مربوطه بسیار راحت تر خواهد بود. در جلسه بعد این روش را مطالعه خواهیم کرد.

شکل ها از <https://www.whitman.edu/>



منابع درس

 <https://tutorial.math.lamar.edu/>

 https://www.whitman.edu/mathematics/calculus_online/

با سپاس از توجه شما

