

حسابان برای فیزیک

درس سوم: انتگرال معین و قضیه های اساسی حسابان

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس برای آشنایی مقدماتی دانشجویان جدیدالورود، که تاکنون با حساب انتگرال آشنا نشده اند، و به جهت کمک به فهم درس فیزیک مکانیک تهیه شده است. این مجموعه درس، از لحاظ گستردگی و دقت در ارائه مفاهیم، قطعاً جایگزین درس ریاضی عمومی نخواهد بود.
 - این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در پاییز سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
 - خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
- h.shenavar@gmail.com
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که، با تلاش بسیار، امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

درس سوم: انتگرال معین و قضیه های اساسی حسابان

- ویژگی های اصلی عمل انتگرال گیری
- قضیه های اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

آنچه گذشت ...

نیوتن و لایبنیتس نشان داده اند (با اثبات قضایای اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال) که لازم نیست برای محاسبه مساحت لزوماً از سری ها استفاده کنیم.
روشی که این دو ابداع کرده اند بر این اساس استوار است که عملی بسیار نزدیک به مشتق گیری، به نام انتگرال گیری، به صورت زیر تعریف می شود:

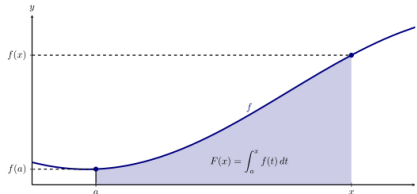
$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta t_i$$

و با استفاده از خواص صرف این عمل، که در این جلسه اثبات خواهند شد، مساحت زیر نمودار به دست خواهد آمد.

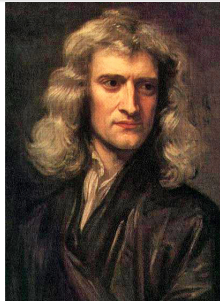
در اینجا F را تابع اولیه تابع f می نامند. تابع F برابر است با مساحت زیر نمودار تابع f از نقطه a تا نقطه x .

تعریف بالا را با تعریف مشتق مقایسه کنید:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$



شکل ها از ویکی و
[://ximera.osu.edu/](http://ximera.osu.edu/)



تفاوت انتگرال معین و نامعین

در انتگرال معین حدود انتگرال معلوم است؛ مانند

$$\int_1^3 (x^2 - 3) dx \qquad \int_5^{-1} \frac{dx}{x^3 + 2}$$

$$\int_x^y (\tan t + 3t - 2) dt$$

وقتی از انتگرال معین صحبت می کنیم، یعنی می خواهیم مساحت زیر نمودار را در یک بازه "معین" بیابیم.

در انتگرال نامعین حدود انتگرال معلوم نیست؛ مانند

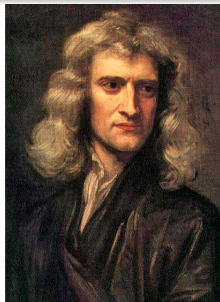
$$\int (-x + 5x^{-1}) dx \qquad \int \frac{dy}{\tan y + 2 \sin y}$$

مساله انتگرال نامعین، یافتن تابعی است (مانند F) که مشتق آن (فرض کنید تابع f) معلوم باشد:

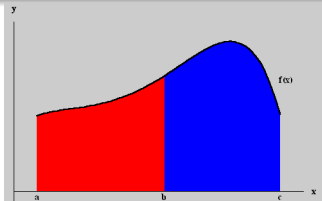
$$F(x) = \int f(x) dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

مساله انتگرال نامعین را در جلسه بعد بیشتر بررسی خواهیم کرد.

شکل ها از ویکی.



ویژگی های اصلی عمل انتگرال گیری



این ویژگی ها را می توان صرفا با استفاده از تعریف انتگرال اثبات کرد:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta t_i$$

همچنین، معنی اکثر این ویژگی ها از لحاظ هندسی واضح می باشد.

جمع پذیری (معنی هندسی: مساحت کل برابر است با مجموع مساحت ها):

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

مساحت زیر یک نقطه صفر است: $\int_a^a f(x)dx = 0$

جابجایی حدود: $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$

ضرب یک ثابت در انتگرال: $\int_a^b c f(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$

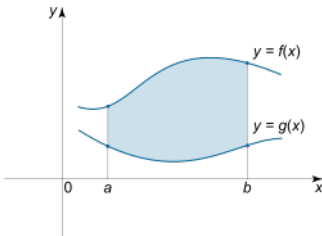
انتگرال جمع و تفریق دو تابع:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

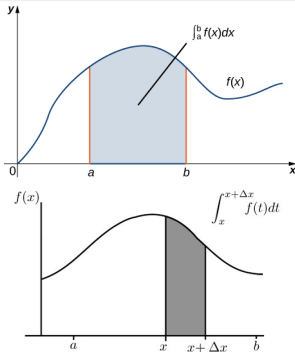
اگر بر روی بازه $[a, b]$ داشته باشیم $f(x) \geq g(x)$ آنگاه:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

شکل ها از www.math24.net/ و www.sosmath.com/



قضیه اساسی اول حساب دیفرانسیل و انتگرال



بیان قضیه اساسی اول: فرض کنید تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد. در این صورت تابع $F(x)$ برای هر مقدار x در این بازه که به صورت:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

تعریف می شود یک پادمشتق تابع f است؛ یعنی:

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

اثبات (نه چندان دقیق!): برای اثبات قضیه اول، باید نشان دهیم که مشتق تابع $F(x)$ در بازه $[a, b]$ برابر تابع $f(x)$ است. پس در ابتدا مقدار $\Delta F(x)$ را می یابیم:

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x) - F(x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \simeq f(x) \Delta x \end{aligned}$$

بنابراین، با توجه به تعریف مشتق داریم:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{dF(x)}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) \Delta x}{\Delta x} = f(x) \end{aligned}$$

پایان اثبات (شکل ها از ویکی بوکر و www.jobilize.com/).

مثال هایی از قضیه اساسی اول حساب دیفرانسیل و انتگرال

بیان قضیه اساسی اول: فرض کنید تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد. در این صورت تابع $F(x)$ برای هر مقدار x در این بازه که به صورت:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

تعریف می شود یک پادمشتق تابع f است؛ یعنی: $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$

مثال ۱: اگر $F(x) = \int_a^x t^2 dt$ آنگاه $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ زیرا

$$F'(x) = x^2$$

ثابت C را ثابت انتگرال گیری می نامند (رجوع کنید به فصل هشتم فیزیک مکانیک). پادمشتق $F(x)$ یکتا نیست زیرا هر تابع $H(x) = F(x) + C_1$ نیز در شرط پادمشتق بودن صدق می کند.

مثال ۲: اگر $F(x) = \int_a^x \cos t dt$ آنگاه $F(x) = \sin x + C$ زیرا

$$F'(x) = \cos x$$

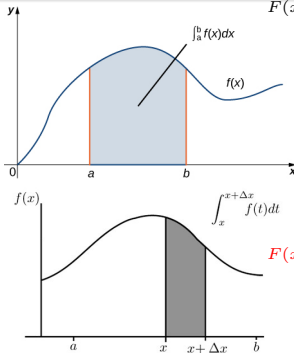
مثال ۳: اگر $F(x) = \int_a^x \frac{dt}{t}$ آنگاه $F(x) = \ln x + C$ زیرا

$$F'(x) = \frac{1}{x}$$

مثال ۴: اگر $F(x) = \int_a^x e^x dx$ آنگاه $F(x) = e^x + C$ زیرا

$$F'(x) = e^x$$

بنابراین سوال اساسی انتگرال این است که چگونه پادمشتق آن برابر تابع f شود؟



تمرین

اگر داشته باشیم

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

آنگاه برای توابع $f(t)$ که در زیر آمده اند، تابع اولیه $F(x)$ را حدس بزنید:

$$f(t) = t$$

$$f(t) = t^3$$

$$f(t) = t^n \quad \text{for} \quad n \neq -1$$

$$f(t) = \sec^2 t$$

$$f(t) = \frac{1}{t+1}$$

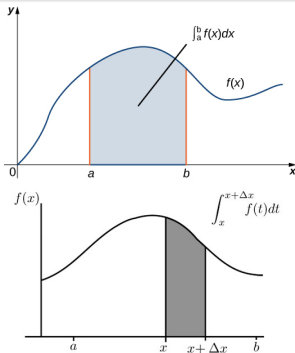
$$f(t) = \sqrt{t}$$

$$f(t) = \sqrt{t+5}$$

$$f(t) = \frac{2t}{t^2+3}$$

$$f(t) = \frac{2t}{\sqrt{t^2+4}}$$

قضیه اساسی دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال



بیان قضیه اساسی دوم: فرض کنید تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد و تابع $F(x)$ برای هر مقدار x در این بازه پادمشتق تابع f باشد؛ آنگاه

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

اثبات: فرض کنید $H(x) = \int_a^x f(t) dt$ و $H(x) = F(x) + C$ ؛ یعنی این دو تابع در یک ثابت انتگرال گیری با هم اختلاف دارند. بنابراین، هردو تابع، تابع اولیه $f(t)$ هستند.

حال با توجه به ویژگی های عمل انتگرال گیری داریم:

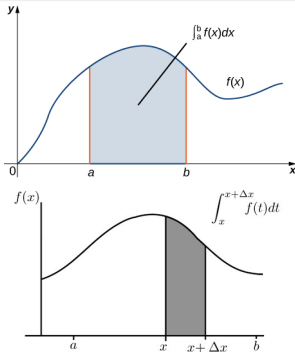
$$H(a) = F(a) + C = \int_a^a f(t) dt = 0 \Rightarrow C = -F(a)$$

$$H(b) = F(b) + C = \int_a^b f(t) dt \Rightarrow F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$$

پایان اثبات.

اهمیت قضیه های اساسی حسابان: لازم نیست برای محاسبه مساحت زیر منحنی از روش سری ها استفاده کنیم بلکه کافی است بتوانیم پادمشتق تابع مورد نظر خود را بیابیم!

قضیه اساسی دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال



بیان قضیه اساسی دوم: فرض کنید تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد و تابع $F(x)$ برای هر مقدار x در این بازه پادمشتق تابع f باشد؛ آنگاه

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

مثال ۱:

$$\int_0^2 t^2 dt = F(2) - F(0) = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

مقایسه کنید با یافتن مساحت زیر نمودار t^2 در جلسه قبل (اسلاید بعد).

مثال ۲:

$$\int_0^\pi \cos y dy = [\sin y]_0^\pi = \sin \pi - \sin 0 = 0$$

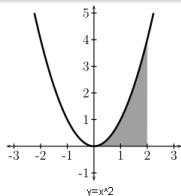
مثال ۳:

$$\int_1^2 \frac{dz}{z} = [\ln z]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 = 0.6931$$

مثال ۴:

$$\int_4^3 e^x dx = [e^x]_4^3 = e^3 - e^4 = -34.51$$

مقایسه کنید با پیدا کردن مساحت زیر نمودار x^2 از طریق جمع بندی مستقیم که در جلسه قبل بحث شد.



مساحت زیر نمودار $f(x) = x^2$ را در بازه $[0, 2]$ بیابید.

باید مساحت قسمت خاکستری رنگ شکل بالا را بیابیم. برای اینکار، این ناحیه را به n قسمت مساوی تقسیم کرده (مانند شکل پایین) و مساحت هر قسمت را می یابیم. عرض هر قسمت برابر $\Delta x_i = \frac{2}{n}$ و طول آن برابر $(\frac{2i}{n})^2$ می باشد. در اینجا i شماره بازه است. بنابراین، مساحت هر مستطیل برابر است با

$$\Delta S_i = \frac{2}{n} \left(\frac{2i}{n} \right)^2$$

از اینجا می توان مساحت کل تقریبی زیر نمودار را به دست آورد:

$$S \simeq \Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots + \Delta S_n$$

$$S \simeq \sum_{i=1}^n \frac{2}{n} \left(\frac{2i}{n} \right)^2 = \frac{2}{n} \left(\frac{2}{n} \right)^2 \sum_{i=1}^n i^2$$

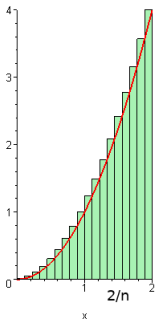
$$S \simeq \frac{8}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$$

$$S \simeq \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

در حدی که تعداد تعداد مستطیل ها بینهایت زیاد باشد، و یا به عبارتی Δx_i بسیار کوچک

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right) = \frac{8}{3}$$

شکل ها از ویکی.



جدول مشتق ها و انتگرال های مورد نیاز در فیزیک هالیدی – دقت کنید که به ازای هر مشتق، یک انتگرال نیز وجود دارد.

Derivatives and Integrals

In what follows, the letters u and v stand for any functions of x , and a and m are constants. To each of the indefinite integrals should be added an arbitrary constant of integration. The *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press Inc.) gives a more extensive tabulation.

$$1. \frac{dx}{dx} = 1$$

$$2. \frac{d}{dx}(au) = a \frac{du}{dx}$$

$$3. \frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$4. \frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$$

$$5. \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$6. \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$7. \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$8. \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$9. \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$10. \frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

$$11. \frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$$

$$12. \frac{d}{dx} \sec x = \tan x \sec x$$

$$13. \frac{d}{dx} \csc x = -\cot x \csc x$$

$$1. \int dx = x$$

$$2. \int au \, dx = a \int u \, dx$$

$$3. \int (u+v) \, dx = \int u \, dx + \int v \, dx$$

$$4. \int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$$

$$5. \int \frac{dx}{x} = \ln |x|$$

$$6. \int u \frac{dv}{dx} \, dx = uv - \int v \frac{du}{dx} \, dx$$

$$7. \int e^x \, dx = e^x$$

$$8. \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$9. \int \cos x \, dx = \sin x$$

$$10. \int \tan x \, dx = \ln |\sec x|$$

$$11. \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$12. \int e^{-ax} \, dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$$

$$13. \int xe^{-ax} \, dx = -\frac{1}{a^2}(ax+1)e^{-ax}$$

$$14. \int x^2e^{-ax} \, dx = -\frac{1}{a^3}(a^2x^2+2ax+2)e^{-ax}$$

$$15. \int_0^\infty x^n e^{-ax} \, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید نکات اصلی قضایای اساسی حسابان و ارتباط آن با مساحت را بیان کنید. برای اینکار لازم است بتوانید به سوال های زیر پاسخ دهید:

۱. قضیه اساسی اول حسابان را بیان و اثبات کنید.

۲. قضیه اساسی دوم حسابان را بیان و اثبات کنید.

۳. تابع اولیه چیست؟

۴. دو روش گفته شده تا اینجا برای محاسبه مساحت زیر یک منحنی را نام برده و مقایسه کنید.

۵. ویژگی های اصلی عمل انتگرال گیری را نام ببرید.

۶. رابطه مشتق گیری و انتگرال گیری را توضیح دهید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.



تمرین

با استفاده از جدول معرفی شده در بالا، مقادیر انتگرال های معین زیر را بیابید:

$$\int_0^{\pi} |\sin x| dx$$

$$\int_{-2}^3 (x^2 + 3x - 2) dx$$

$$\int_0^4 \sqrt{x+1} dx$$

$$\int_6^{10} (5\sqrt{x} - 2) dx$$

نتیجه انتگرال های معین زیر را بیابید (منع، سیلورمن).

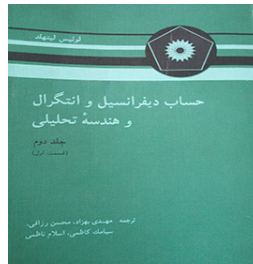
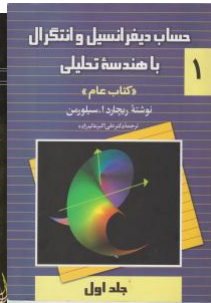
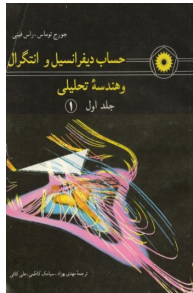
$$(a) \int_1^4 \sqrt{x} dx; \quad (b) \int_1^{27} x^{-2/3} dx; \quad (c) \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx;$$

$$(d) \int_0^2 |1 - x| dx.$$

مبحث بعدی: روش های انتگرال گیری

برخی انتگرال ها آنچنان پیچیده اند که نمی توان جواب آنها را حدس زد. بنابراین، ریاضی دانان تاکنون تکنیک های بسیار متنوعی برای تبدیل انتگرال های پیچیده به انتگرال های ساده تر (با جواب قابل حدس) ابداع کرده اند. این تکنیک ها را روش های انتگرال گیری می نامند. در جلسه بعد با برخی از این روش های انتگرال گیری آشنا خواهیم شد.

از منابع اصلی برای یادگیری حسابان استفاده کنید: سیلورمن، توماس، لیتهد، آپوستل.



کلاس درس دکتر سیاوش شهشهانی از دانشگاه صنعتی شریف (برای دروس ریاضی عمومی) را می توانید از آپارات دریافت کنید.

... جستجوی ویدیوهای رویدادها، شخصیت‌ها و ...

۶۶ آپارات

بارگذاری ویدیو +

ریاضی ۱
احسان ۱۸/۱

- ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشانی -
دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۱
احسان
- ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشانی -
دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۲
احسان
- ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشانی -
دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۴
احسان
- ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشانی -
دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۵
احسان
- ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشانی -
دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۶
احسان

بخش خودکار

رتبه برتر کنکور ارشد کامپیوتر (دانشجو ارشد دانشگاه صنعتی شریف)

کنکور ارشد کامپیوتر

مشاریه ویدیوهای

۷,۵۰۸

۶۳

دنیال کردن +

دنیال کننده ۴۲

Show all

با سپاس از توجه شما

