

سینماتیک و دینامیک نسبی

سرعت ویژه و پایداری تکان نسبی

حسین شاور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ سرعت ویژه و پایداری تکانه نسبیتی
- سرعت ویژه
- قانون نسبیتی پایداری تکانه

آنچه تاکنون آموخته ایم: جبر تبدیلات لورنتس و نمادگذاری چاربردار

- بردار چهار بعدی زیر را در نظر بگیرید که مولفه اول آن (در نمادگذاری ما) همیشه زمانی و سه مولفه دیگر مکانی اند:

$$X^\mu = (ct, x, y, z)$$

دوگان چاربردار بالا به صورت چاربرداری با اندیس پایین نمایش داده می شود:

$$X_\mu = (ct, -x, -y, -z)$$

برای چاربردارها هم می توانیم ضرب داخلی در فضای چهار بعدی را تعریف کنیم:

$$\sum_{\mu=0}^3 M_\mu N^\mu = M_0 N_0 - M_1 N_1 - M_2 N_2 - M_3 N_3$$

- با استفاده از ماتریس زیر که آن را تانسور متریک می نامیم

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

می توانیم چاربردارهای فضازمانی را از یک فضا (مثلا X^μ) به فضای دوگان آن ببریم:

$$X_\mu = \eta_{\mu\nu} X^\nu$$

$$X^\mu = \eta^{\mu\nu} X_\nu$$

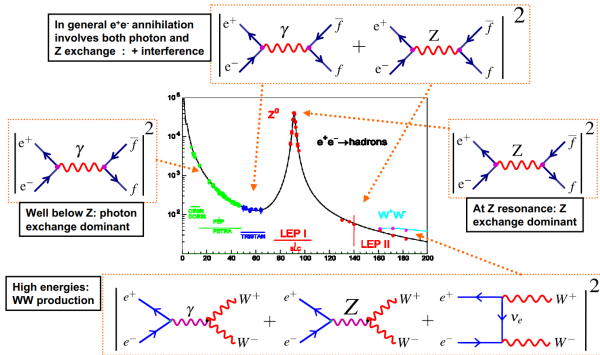
$$U_\mu V^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 U_\mu V^\mu$$

- نمادگذاری اینشتین:

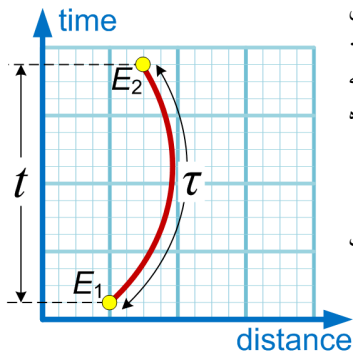
اهداف این جلسه: سرعت ویژه و پاستگی تکانه نسبیتی

در این جلسه در ابتدا مفهوم سرعت ویژه را معرفی خواهیم کرد. سپس خواهیم دید که مفهوم معمول تکانه به عنوان حاصلضرب جرم در سرعت تحت تبدیلات لورنتس پایسته نیست. بنابراین به سراغ بازتعریف این مفهوم خواهیم رفت و در نتیجه قانون نسبیتی پاستگی تکانه را خواهیم یافت.

e^+e^- Annihilation in Feynman Diagrams



سرعت ویژه



در نسبیت چارچوبی را که در آن جسم مشاهده شده ساکن است (چارچوب همراه با جسم) چارچوب ویژه می نامند. پیشتر با مفهوم زمان ویژه و طول ویژه آشنا شده ایم. دیدیم که زمان ویژه در واقع زمانی است که ساعت همراه با ذره اندازه گیری می کند. این زمان را با $d\tau$ نشان می دهند و داریم

$$d\tau = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

به همین ترتیب می توان چارچوبدار سرعت ویژه را به صورت زیر تعریف کرد:

$$w^\mu \equiv \frac{dX^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (ct, x, y, z)$$

که البته با تغییر متغیر به زمان معمول به صورت زیر نوشته می شود:

$$w^\mu = \frac{dt}{d\tau} \frac{dX^\mu}{dt} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} (ct, x, y, z)$$

$$w^\mu = \gamma (c, u_x, u_y, u_z)$$

تمرین: تبدیل سرعت ویژه چگونه است؟

تمرین

تمرین: با استفاده از تبدیلات لورنتس، تبدیلات سرعت ویژه را بیابید.

پاسخ:

$$w'_t = \gamma(w_t - \beta w_x)$$

$$w'_x = \gamma(w_x - \beta w_t)$$

$$w'_y = w_y$$

$$w'_z = w_z$$

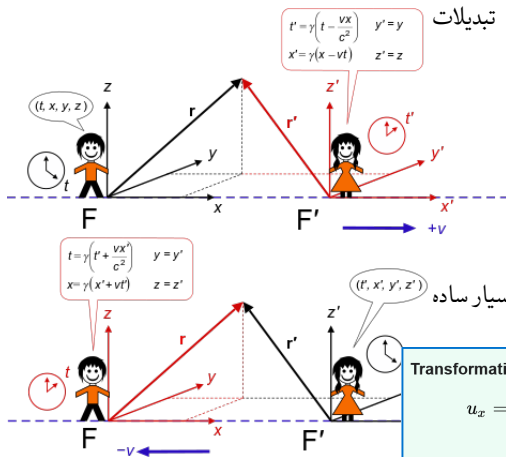
لطفا دقت کنید که تبدیلات سرعت ویژه بسیار ساده تر از تبدیلات سرعت هستند.

Transformation of velocity (Cartesian components)

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, \quad u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x},$$

$$u_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} u'_y}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, \quad u'_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} u_y}{1 - \frac{v}{c^2} u_x},$$

$$u_z = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} u'_z}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, \quad u'_z = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} u_z}{1 - \frac{v}{c^2} u_x},$$



تمرین

تمرین: با استفاده از تبدیلات لورنتس، تبدیلات سرعت ویژه را بیابید.

پاسخ: مثلاً مولفه های اول و دوم را در نظر بگیرید:

$$w'_t = c \frac{dt'}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} \frac{dt'}{dt} = c \gamma^2 \left(\frac{dt}{dt} - v \frac{dx}{dt} / c^2 \right) = \gamma (w_x - \beta w_t)$$

$$w'_x = \frac{dx'}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx'}{dt} = \gamma^2 \left(\frac{dx}{dt} - v \right) = \gamma (w_t - \beta w_x)$$

دقت کنید که در رابطه تعریف کننده سرعت ویژه، یعنی $w^\mu = \gamma (c, u_x, u_y, u_z)$ داریم:

$$w_t = \gamma c$$

$$w_x = \gamma u_x$$

از این نکته در محاسبه بالا استفاده کرده ایم.

پایدگی تکانه در فیزیک کلاسیک تحت تبدیلات گاللیه

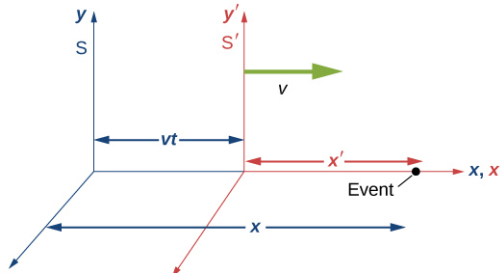
- در فیزیک کلاسیک اگر تکانه در یک دستگاه لخت مانند S' ، پایدگی باشد، $\vec{P}_i = \vec{P}_f$ ، آنگاه تکانه در هر دستگاه لخت دیگری نیز برقرار خواهد بود. مثلاً یک برخورد سه بعدی بین دو ذره را در نظر بگیرید. پایدگی تکانه در دستگاه S' به این معنی است که

$$\vec{p}'_{1i} + \vec{p}'_{2i} = \vec{p}'_{1f} + \vec{p}'_{2f} \quad \Rightarrow \quad m_1 \vec{u}'_{1i} + m_2 \vec{u}'_{2i} = m_1 \vec{u}'_{1f} + m_2 \vec{u}'_{2f}$$

ولی بنا به قضیه کلاسیک جمع سرعت ها، بردارهای سرعت در دستگاه های S و S' به صورت زیر به هم مربوط می شوند:

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$$

تمرین: ثابت کنید از این دو معادله می توان به پایدگی سرعت در دستگاه S دست یافت.



پایداری تکانه در فیزیک کلاسیک تحت تبدیلات گالیه

- در فیزیک کلاسیک اگر تکانه در یک دستگاه لخت مانند S' ، برقرار باشد، $\vec{P}_i' = \vec{P}_f'$ ، آنگاه تکانه در هر دستگاه لخت دیگری نیز برقرار خواهد بود. مثلاً یک برخورد سه بعدی بین دو ذره را در نظر بگیرید. پایداری تکانه در دستگاه S' به این معنی است که

$$\vec{p}_{1i}' + \vec{p}_{2i}' = \vec{p}_{1f}' + \vec{p}_{2f}' \quad \Rightarrow \quad m_1 \vec{u}_{1i}' + m_2 \vec{u}_{2i}' = m_1 \vec{u}_{1f}' + m_2 \vec{u}_{2f}'$$

ولی بنا به قضیه کلاسیک جمع سرعت ها، بردارهای سرعت در دستگاه های S و S' به صورت زیر به هم مربوط می شوند:

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$$

تمرین: ثابت کنید از این دو معادله می توان به پایداری سرعت در دستگاه S دست یافت.
پاسخ:

$$m_1 (\vec{u}_{1i} - \vec{v}) + m_2 (\vec{u}_{2i} - \vec{v}) = m_1 (\vec{u}_{1f} - \vec{v}) + m_2 (\vec{u}_{2f} - \vec{v})$$

$$m_1 \vec{u}_{1i} + m_2 \vec{u}_{2i} = m_1 \vec{u}_{1f} + m_2 \vec{u}_{2f} \quad \Rightarrow \quad \vec{P}_i = \vec{P}_f \quad \text{و یا}$$

که همان پایداری تکانه در دستگاه S است.

- تمرین: اگر دو ذره پس از برخورد تغییر جرم داده (با فرض پایداری جرم) و دو ذره جدید ۳ و ۴ را تشکیل دهند، آیا باز هم پایداری تکانه برقرار است؟ پاسخ: بله! اثبات کنید.

آیا تکانه نسبیتی پایداری است؟!

تمرین: برخورد دو ذره A و B را در نظر بگیرید. این دو ذره در طی برخورد تبدیل به ذرات جدید C و D می شوند. با استفاده از تبدیلات نسبیتی سرعت استدلال کنید که تکانه پایداری است و یا خیر؟

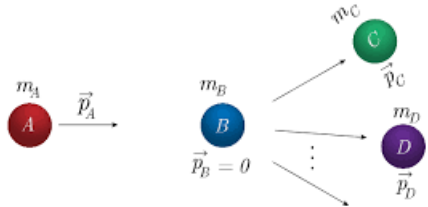
راهنمایی: مثلاً سمت چپ و یا سمت راست را برابر با صفر قرار داده (یعنی برخورد را در دستگاه مرکز جرم بررسی کنید) و نتایج لازم (امکان پایداری تکانه) را بررسی کنید.

Transformation of velocity (Cartesian components)

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}, \quad u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x},$$

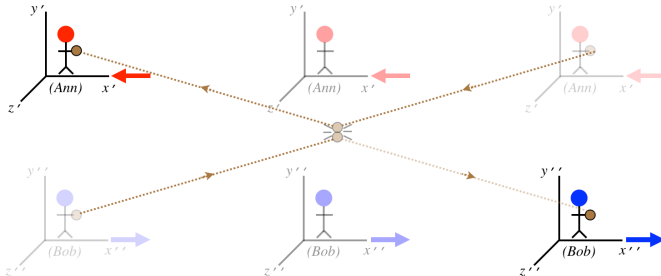
$$u_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}u'_y}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}, \quad u'_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}u_y}{1 - \frac{v}{c^2}u_x},$$

$$u_z = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}u'_z}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}, \quad u'_z = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}u_z}{1 - \frac{v}{c^2}u_x},$$

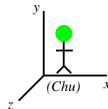


یک آزمایش ذهنی

- آزمایش ذهنی زیر را در نظر بگیرید. سه نفر با نام های آن، باب و چو سه ناظر هستند. آن و باب به موازات هم در راستای محور x (مثلا در طبقات اول و دوم ساختمان) حرکت می کنند و دو توپ را در راستای محور y پرتاب می کنند. این دو توپ با هم برخورد کرده و سپس با همان سرعت اولیه برمی گردند. آیا تکانه در این برخورد از دید ناظرهای آن، باب و چو پایسته است؟



phys.libretexts.org



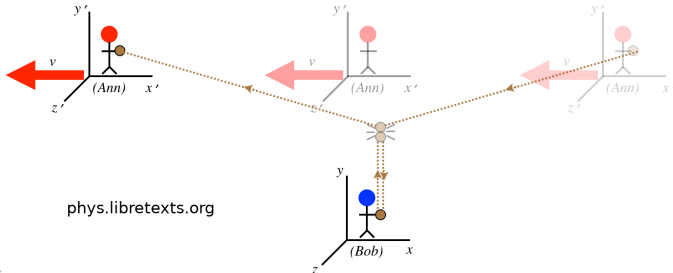
یک آزمایش ذهنی

• چو یک ناظر ساکن است و از دید او همه چیز متقارن است. در نتیجه از دید او تکانه پایسته است.

• ولی باب می بیند که توپ پرتاب شده توسط آلیس علاوه بر یک مولفه در جهت y یک مولفه در جهت x نیز دارد. مولفه y سرعت توپ از دید باب نیز برابر است با

$$u'_y (\text{Ann's ball}) = \frac{u_y}{\gamma (1 - \frac{u_x v}{c^2})} = \frac{u_y}{\gamma (1 - 0)} = \frac{u_y}{\gamma}$$

ولی باب همچنین می بیند که توپ خودش دقیقاً در همان جهت پرتاب شده و با همان سرعت برگشته است و برخورد هم کشسان است! بنابراین باب می تواند نتیجه گیری کند که تکانه کل پایسته نیست و یا اینکه تعریف تکانه باید تغییر کند.



پایدگی تکان نسبیتی

● در حالت کلی می بینیم که تکان (با تعریف بالا) تحت تبدیلات لورنتس پایسته نیست. چکار باید کرد؟!

● تمرین: در بخش اول این درس با سرعت ویژه و تبدیل آن تحت تبدیلات لورنتس آشنا شدیم. اگر چاربردار تکان را به صورت $p^\mu = mw^\mu$ تعریف کنیم، آیا تکان تحت تبدیلات لورنتس پایسته است؟ یعنی آیا پایدگی تکان در دستگاه S'

$$m_A w_A'^\mu + m_B w_B'^\mu = m_C w_C'^\mu + m_D w_D'^\mu$$

منجر به پایدگی تکان در دستگاه S خواهد شد؟

$$m_A w_A^\mu + m_B w_B^\mu = m_C w_C^\mu + m_D w_D^\mu$$

پاسخ: بله!

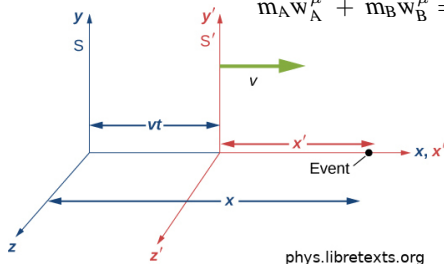
یادآوری:

$$w_t' = \gamma(w_t - \beta w_x)$$

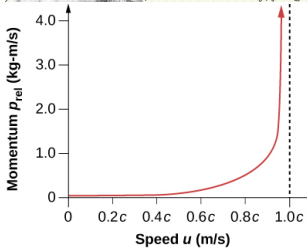
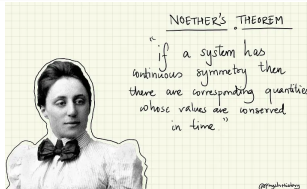
$$w_x' = \gamma(w_x - \beta w_t)$$

$$w_y' = w_y$$

$$w_z' = w_z$$



پایداری تکان نسبیتی



پس اگر چاربردار تکان نسبیتی را به صورت $p^\mu = m w^\mu$ تعریف کنیم، آنگاه پایداری تکان نسبیتی را می توانیم از آن نتیجه بگیریم. به ویژه توجه کنید که بخش فضایی این بردار به صورت زیر نوشته می شود:

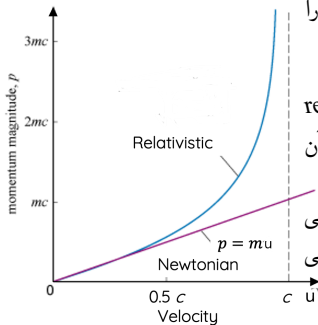
$$\vec{p} = m \frac{d\vec{x}}{d\tau} = m \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = m \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$\vec{p} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma m\vec{u}$$

توجه: قوانین پایداری (از جمله پایداری تکان) از تقارن های بنیادین فضا زمان نتیجه می شوند. مثلاً از نظر فیزیکی هیچ تفاوت بنیادینی بین فضای این کلاس و فضای بین ستاره ای که صدها کیلو پارسک از ما فاصله دارد، وجود ندارد. از این تقارن به نظر بدیهی می توان قانون پایداری تکان را به دست آورد. این موضوع در نظریه میدان های کلاسیک نشان داده می شود. نظریه امی نوتر در میدان ها نظریه ای است که رابطه بین تقارن های پیوسته و قوانین پایداری را توضیح می دهد.

پرسش: چه نتیجه ای از نمودار تغییر تکان با سرعت می توان گرفت؟

جرم نسبیتی



• راه دیگر برای معرفی تکانه نسبیتی این است که جرم نسبیتی را به صورت

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

تعریف کنیم. در اینجا m_0 را جرم ویژه و یا جرم سکون rest mass می نامند. این مقدار جرمی است که ناظر همراه با ذره برای آن اندازه گیری می کند.

• پرسش: به تغییرات جرم نسبیتی با سرعت ذره دقت کنید. وقتی سرعت ذره به سرعت نور نزدیک می شود، لختی آن افزایش می یابد. از این پدیده چه نتایجی می توان گرفت؟

• حالا می توان تکانه را به صورت

$$\vec{p} = m\vec{u} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

تعریف کرد.

• توجه، توجه: در اسلایدهای قبل جرم سکون را با m نشان دادیم. ولی (فقط) در این اسلاید برای تاکید، جرم سکون را با m_0 و جرم نسبیتی را با m نشان می دهیم. به این تفاوت دقت کنید.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید سرعت ویژه و پایداری تکانه نسبیتی و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

۱. مفاهیم زمان ویژه و طول ویژه را توضیح دهید.
۲. تعریف سرعت ویژه را بنویسید.
۳. توضیح دهید که چرا تعریف تکانه به صورت معمول در نسبیت خاص نمی تواند به پایداری تکانه منجر شود.
۴. توضیح دهید که چرا اگر از سرعت ویژه برای تعریف تکانه استفاده کنیم، آنگاه پایداری تکانه را خواهیم داشت.
۵. تبدیل سرعت ویژه تحت تبدیلات لورنتس چگونه است؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.



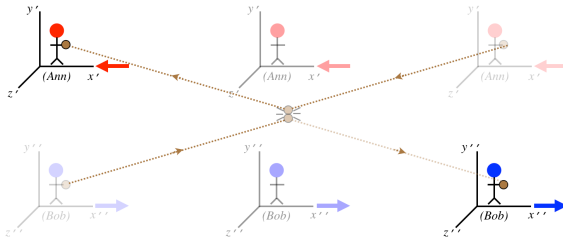
تمرین ها: زمان تحویل ۲۳ آذر ماه

- لطفا پرسش ها و تمرینات بالا را پاسخ دهید.
- اختیاری: درباره نظریه امی نوتر درباره رابطه تقارن ها و قوانین پایداری تحقیق کنید.

تمرین

- حالا با استفاده از تعریف جدید تکانه آزمایش ذهنی آن، باب و چو را توضیح دهید. آن و باب به موازات هم در راستای محور x (مثلا در طبقات اول و دوم ساختمان) حرکت می کنند و دو توپ را در راستای محور y پرتاب می کنند. این دو توپ با هم برخورد کرده و سپس با همان سرعت اولیه برمی گردند. آیا تکانه در این برخورد از دید ناظرهای آن، باب و چو پایسته است؟ پاسخ را می توانید در <https://phys.libretexts.org/> تحت عنوان زیر بیابید.

Momentum Conservation : Another Thought Experiment

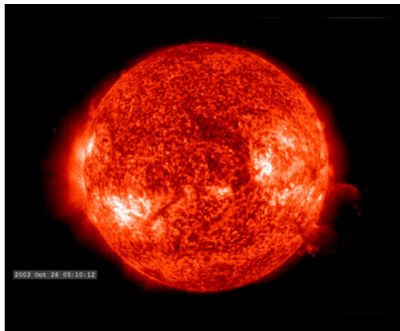


phys.libretexts.org



مبحث بعدی: دینامیک و انرژی در نسبیت خاص

- در جلسه بعد شکل نسبیتی قانون دوم نیوتن را خواهیم نوشت و با کاربردهای آن نیز آشنا خواهیم شد. همچنین مفاهیم انرژی و انرژی جنبشی را بازنویسی می کنیم و با معنای انرژی سکون ذره آشنا می شویم.



(a)



(b)

مراجع

- ➊ Introduction to Special Relativity; Robert Resnick
- ➋ Relativity: Special, General, and Cosmological; Wolfgang Rindler
- ➌ General Relativity: An Introduction for Physicists; M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, A. N. Lasenby
- ➍ Introduction To Special Relativity; Markus Klute
<https://ocw.mit.edu/courses/8-20-introduction-to-special-relativity-january-ia>
- ➎ Leonard Susskind's Special Relativity, Find in YouTube

با سپاس از توجه شما