

فیزیک مکانیک

جلسه پنجم رفع اشکال و حل تمرین

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در تابستان و پاییز سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که، با تلاش بسیار، امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

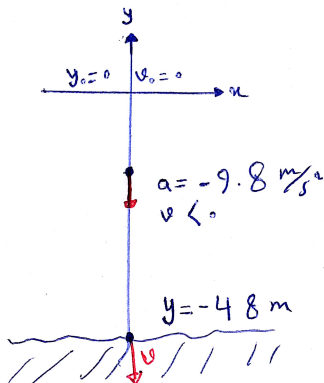
جلسه پنجم رفع اشکال و حل تمرین ۱

مثال از سقوط آزاد و انتخاب جهت محور

پاسخ ب)

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -9.8 \times 3.1 = -31 \text{ m/s}$$

علامت سرعت نهایی منفی به دست می آید که با توجه به جهت محور کاملاً قابل درک است.
تمرین: سرعت نهایی را با استفاده از معادله مستقل از زمان به دست آورید.



فرض کنید که شناگری از ارتفاع 48 m به درون آب می پرد. چه مدت زمان طول می کشد تا شناگر به سطح آب برسد؟ (ب) سرعت برخورد او به سطح آب چقدر است؟

پاسخ الف) جهت محور عمود را به سمت بالا فرض می کنیم (هیچ حرکتی در جهت محور افق نیست؛ بنابراین جهت آن هم اهمیتی ندارد). حال مقدار و علامت همه کمیت ها را با استفاده از جهت قراردادی محور افق تعیین می کنیم:

$$a = -9.8 \text{ m/s}^2 \quad y = -48 \text{ m}$$

$$v < 0 \quad v_0 = 0 \text{ m/s}$$

بنابراین از معادله حرکت

$$y - y_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

داریم:

$$-48 = \frac{1}{2}(-9.8)t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{48}{4.9} \text{ s}^2$$

$$t = 3.1 \text{ s} \text{ یا } t = -3.1 \text{ s}$$

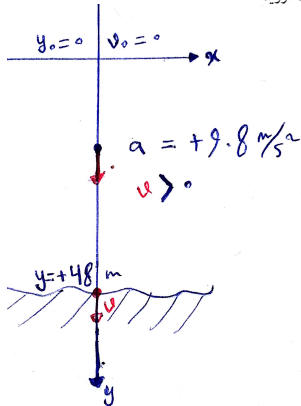
چرا $t = -3.1 \text{ s}$ جواب قابل قبولی نیست؟

مثال از سقوط آزاد و انتخاب جهت محور- تغییر جهت محور عمود

پاسخ ب)

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 9.8 \times 3.1 = +31 \text{ m/s}$$

علامت سرعت نهایی مثبت به دست می آید که با توجه به جهت محور کاملاً قابل درک است.
تمرین: سرعت نهایی را با استفاده از معادله مستقل از زمان به دست آورید.



فرض کنید که شناگری از ارتفاع 48 m به درون آب می پرد. چه مدت زمان طول می کشد تا شناگر به سطح آب برسد؟ (ب) سرعت برخورد او به سطح آب چقدر است؟

پاسخ الف) جهت محور عمود را به سمت پایین فرض می کنیم (باز هم جهت محور افق اهمیتی ندارد). حال مقدار و علامت همه کمیت ها را با استفاده از جهت قراردادی محور افق تعیین می کنیم:

$$a = +9.8 \text{ m/s}^2 \quad y = +48 \text{ m}$$

$$v > 0 \quad v_0 = 0 \text{ m/s}$$

بنابراین از معادله حرکت

$$y - y_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

داریم:

$$+48 = \frac{1}{2}(9.8)t^2 \Rightarrow t = 3.1 \text{ s}$$

نکته اخلاقی!



مقادیر به دست آمده برای کمیت های فیزیکی هیچگاه به جهت محور های انتخابی ربط نخواهند داشت. برخی جهت ها ممکن است حل مساله را آسانتر کنند، ولی انتخاب دستگاه مختصات تاثیری در فیزیک مساله نخواهد داشت.

بنابراین جهت مشخصی را برای محورهای خود انتخاب کرده و تا آخر مساله به آن وفادار بمانید. یعنی، علامت همه کمیت های ورودی را با توجه به جهت انتخابی خود مشخص کنید و علامت به دست آمده برای کمیت های مورد سوال را نیز با توجه این جهت قراردادی تفسیر کنید.

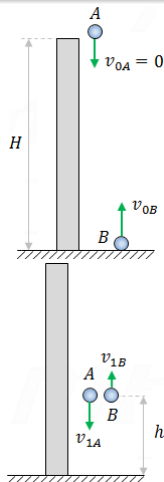


تمرین

سقوط آزاد ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$):

توپ A از بالای برجی به ارتفاع 200 m رها شده است (یعنی سرعت اولیه اش صفر است). همزمان، توپ B با سرعت اولیه 8 m/s به سمت بالا پرتاب شده است. الف: زمان و ارتفاعی که این دو توپ به هم می‌رسند را بیابید. ب: کمترین سرعت اولیه توپ B را برای هم ارتفاع شدن دو توپ بیابید.

پاسخ الف: جهت محور عمودی را به سمت بالا فرض می‌کنیم و فرض می‌کنیم که مبدا مختصات در مکان اولیه پرتاب توپ B باشد.



$$y_A = -\frac{1}{2}gt^2 + \cancel{v_A t} + y_{0A} = -\frac{1}{2}gt^2 + H$$

$$y_B = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0B}t + \cancel{y_B} = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0B}t$$

فرض کنید که این دو جسم در لحظه t به ارتفاع یکسان h می‌رسند. در این صورت داریم:

$$h = -\frac{1}{2}gt^2 + H$$

$$h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0B}t$$

و یا

$$-\frac{1}{2}gt_a^2 + H = -\frac{1}{2}gt_a^2 + v_{0B}t_a \Rightarrow t_a = \frac{H}{v_{0B}} = \frac{200}{8} = 25 \text{ s}$$

همچنین، نقطه هم ارتفاع شدن دو توپ در ارتفاع زیر قرار دارد:

$$h = -\frac{1}{2}gt_a^2 + v_{0B}t_a = 8 \times 25 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times (25)^2 = 169.4 \text{ m}$$

شکل از

<http://www.ambrsoft.com/>

تمرین: روشی دیگر

سقوط آزاد ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$):

توپ A از بالای برجی به ارتفاع 200 m رها شده است (یعنی سرعت اولیه اش صفر است). همزمان، توپ B با سرعت اولیه 80 m/s به سمت بالا پرتاب شده است. الف: زمان و ارتفاعی که این دو توپ به هم می‌رسند را بیابید. ب: کمترین سرعت اولیه توپ B را برای هم ارتفاع شدن دو توپ بیابید.

پاسخ الف: جهت محور عمودی را به سمت بالا فرض می‌کنیم و فرض می‌کنیم که مبدأ مختصات در مکان اولیه پرتاب توپ B باشد.

$$y_A = -\frac{1}{2}gt^2 + \cancel{v_A t} + y_{0A} = -\frac{1}{2}gt^2 + H$$

$$y_B = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0B}t + \cancel{y_B} = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0B}t$$

فرض کنید که این دو جسم در لحظه t به ارتفاع یکسان h می‌رسند. در این صورت داریم:

$$h = -\frac{1}{2}gt^2 + H$$

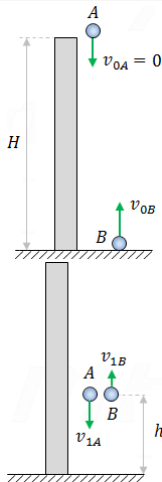
$$h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0B}t$$

از طرفی می‌توان نوشت:

$$H = H - h + h = H - \left(-\frac{1}{2}gt^2 + H\right) + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_{0B}t\right) \Rightarrow t_a = \frac{H}{v_{0B}} = \frac{200}{80} = 2.5 \text{ s}$$

همچنین، نقطه هم ارتفاع شدن دو توپ در ارتفاع زیر قرار دارد:

$$h = -\frac{1}{2}gt_a^2 + v_{0B}t_a = 80 \times 2.5 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times (2.5)^2 = 169.4 \text{ m}$$



شکل
از

http:

//

www

تمرین: باز هم روشی دیگر (دو دستگاه مختصات متفاوت)

سقوط آزاد ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$):

توپ A از بالای برجی به ارتفاع 200 m رها شده است (یعنی سرعت اولیه اش صفر است). همزمان، توپ B با سرعت اولیه 8 m/s به سمت بالا پرتاب شده است. الف: زمان و ارتفاعی که این دو توپ به هم می رسند را بیابید. ب: کمترین سرعت اولیه توپ B را برای هم ارتفاع شدن دو توپ بیابید.

پاسخ الف: می توانیم دو دستگاه مختصات متفاوت انتخاب کنیم. برای ذره A جهت دستگاه مختصات را به سمت پایین فرض کرده و مبدأ آن را در بالای برج فرض می کنیم:

$$y_A = \frac{1}{2}gt^2 + \cancel{v_A t} + \cancel{y_A} = \frac{1}{2}gt^2$$

برای ذره B، جهت محور عمودی را به سمت بالا فرض می کنیم و فرض می کنیم که مبدأ مختصات در مکان اولیه پرتاب توپ B باشد.

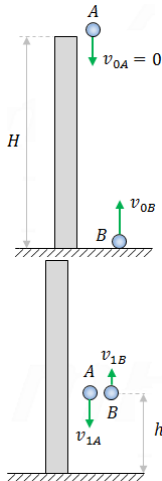
$$y_B = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0B}t + \cancel{y_B} = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0B}t$$

لطفا دقت کنید که معنی عبارت y_A در این اسلاید متفاوت از اسلایدهای قبلی است (به دلیل انتخاب متفاوت محورها). در نقطه تلاقی دو توپ داریم:

$$H = y_A + y_B = \left(\frac{1}{2}gt^2\right) + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_{0B}t\right) \Rightarrow t_a = \frac{H}{v_{0B}} = \frac{200}{8} = 25 \text{ s}$$

همچنین، نقطه هم ارتفاع شدن دو توپ در ارتفاع زیر قرار دارد:

$$h = -\frac{1}{2}gt_a^2 + v_{0B}t_a = 8 \times 25 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times (25)^2 = 169.4 \text{ m}$$



شکل

از

http:

http://www.ck12.org/

تمرین: انتگرال گیری از مسیر حرکت

جسمی بر روی یک خط مستقیم با شتاب

$$a(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt[3]{t^2} + t + 1$$

حرکت میکند.

الف) اگر سرعت اولیه $v(t=0) = +2 \text{ m/s}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $dv = a(t)dt$ سرعت را به عنوان تابعی از زمان $v(t)$ تعیین کنید.

ب) اگر مکان اولیه $x(t=0) = -3 \text{ m}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $dx = v(t)dt$ مکان را به عنوان تابعی از زمان $x(t)$ تعیین کنید.

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$$

راهنمایی:

تمرین: انتگرال گیری از مسیر حرکت

جسمی بر روی یک خط مستقیم با شتاب $a(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt[3]{t} + t + 1$ حرکت میکند. الف) اگر سرعت اولیه $v(t=0) = 2 \text{ m/s}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $dv = a(t)dt$ سرعت را به عنوان تابعی از زمان $v(t)$ تعیین کنید.

ب) اگر مکان اولیه $x(t=0) = -3 \text{ m}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $dx = v(t)dt$ مکان را به عنوان تابعی از زمان $x(t)$ تعیین کنید.

پاسخ الف) برای راحتی در انتگرال گیری، شتاب را با استفاده از توان های کسری بازنویسی می کنیم: $a(t) = -t^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{3}} + t + 1$ حال می توانیم با انتگرال گیری از تابع شتاب، تابع سرعت را به دست آوریم

$$dv = a(t)dt \Rightarrow \int_{+2}^{v(t)} dv = \int_0^t a(t)dt = \int_0^t \left(-t^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{3}} + t + 1 \right) dt$$

در نتیجه (فراموش نکنیم که $n \neq -1$) $\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$

$$[v]_{+2}^{v(t)} = \left[-\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \frac{t^2}{2} + t \right]_0^t = \left[-2t^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{5}t^{\frac{4}{3}} + \frac{t^2}{2} + t \right]_0^t$$

$$v(t) - 2 = \left[-2t^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{5}t^{\frac{4}{3}} + \frac{t^2}{2} + t \right] - \left[-2 \times 0^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{5} \times 0^{\frac{4}{3}} + \frac{0^2}{2} + 0 \right]$$

$$v(t) - 2 = -2t^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{5}t^{\frac{4}{3}} + \frac{t^2}{2} + t \Rightarrow v(t) = -2t^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{5}t^{\frac{4}{3}} + \frac{t^2}{2} + t + 2$$

بنابراین دو چک جواب را پیگیری کنید (شرط اولیه، مشتق گیری).

تمرین: انتگرال گیری از مسیر حرکت

جسمی بر روی یک خط مستقیم با شتاب $a(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt[3]{t^2} + t + 1$ حرکت میکند. (الف) اگر سرعت اولیه $v(t=0) = +2 \text{ m/s}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $dv = a(t)dt$ سرعت را به عنوان تابعی از زمان $v(t)$ تعیین کنید.

(ب) اگر مکان اولیه $x(t=0) = -3 \text{ m}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $dx = v(t)dt$ مکان را به عنوان تابعی از زمان $x(t)$ تعیین کنید.

پاسخ (ب) از تابع سرعت به دست آمده در اسلاید قبل انتگرال میگیریم تا موقعیت به دست آید:

$$dx = v(t)dt \Rightarrow \int_{-3}^{x(t)} dx = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t \left(-2t^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} + \frac{t^2}{2} + t + 2 \right) dt$$

بنابراین

$$[x]_{-3}^{x(t)} = \left[-2 \times \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{3}{5} \times \frac{t^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} + \frac{1}{2} \times \frac{t^{2+1}}{2+1} + \frac{t^2}{2} + 2t \right]_0^t$$

$$x(t) - (-3) = \left[-\frac{4}{3} \times t^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{40} \times t^{\frac{8}{3}} + \frac{1}{6} \times t^3 + \frac{t^2}{2} + 2t \right]_0^t = \dots$$

و یا

$$x(t) = -\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{40}t^{\frac{8}{3}} + \frac{1}{6}t^3 + \frac{t^2}{2} + 2t - 3$$

دو چک جواب را پیگیری کنید (شرط اولیه، مشتق گیری).

تمرین

۱ دو بردار $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ و $\vec{b} = -4\hat{i} + 5\hat{j}$ را در نظر بگیرید. حاصلضرب داخلی $\vec{a} \cdot \vec{b}$ و خارجی $\vec{a} \times \vec{b}$ این دو بردار را بیابید.

۲ حاصلضرب داخلی:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 2 \times (-4) - 3 \times 5 + 0 \times 0 = -23$$

دقت کنید که حاصل ضرب داخلی، یک عدد است.

۳ حاصلضرب خارجی:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= [-3 \times 0 - 0 \times 5] \hat{i} - [2 \times 0 - 0 \times (-4)] \hat{j} + [2 \times 5 - (-3) \times (-4)] \hat{k} = -2\hat{k}$$

دقت کنید که نتیجه ضرب خارجی یک بردار است.

با سیاست از توجه شما،
مراقب سلامت خود و اطرافیان خود
باشید.