

فیزیک الکتریسته و مغناطیس

دومین جلسه حل تمرین

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



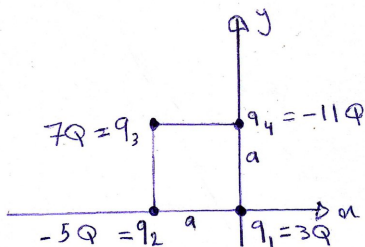
دانشگاه هرمزگان

دومین جلسه حل تمرین ۱

پرسش اول: نیروی ناشی از توزیع بار گسسته

قانون کولن:

چهار بار $q_1 = 3Q$ ، $q_2 = -5Q$ ، $q_3 = 7Q$ و $q_4 = -11Q$ را در نظر بگیرید. به علامت های بارها به دقت توجه کنید. این بارها در جای خود ثابت شده اند.



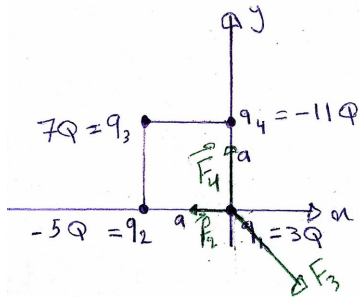
الف) نیروهای $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_4$ به ترتیب از طرف بارهای q_2 ، q_3 و q_4 به بار q_1 وارد می شوند. جهت نیروهای $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_4$ را به صورت برداری بر روی شکل نشان دهید.

ب) اندازه هرکدام از نیروهای $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_4$ را با استفاده از قانون کولن بنویسید.

پ) مولفه های x و y نیروی کل وارد شده به بار q_1 ، یعنی $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_4$ را بیابید.

پاسخ پرسش اول: نیروی ناشی از توزیع بار گسسته

پاسخ قسمت الف در شکل آمده است.



(پاسخ ب)

$$|\vec{F}_1| = \frac{Kq_1q_2}{r_{12}^2} = 15 \frac{KQ^2}{a^2}$$

$$|\vec{F}_2| = \frac{Kq_1q_3}{r_{13}^2} = 21 \frac{KQ^2}{2a^2}$$

$$|\vec{F}_4| = \frac{Kq_1q_4}{r_{14}^2} = 33 \frac{KQ^2}{a^2}$$

زیرا $r_3 = \sqrt{2}a$ و $r_2 = r_4 = a$

پاسخ پ) مولفه های افقی و عمودی نیروی کل، یعنی $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_4$ را به صورت زیر می یابیم:

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{4y} = 0 - F_1 \cos 45^\circ + F_4$$

$$F_y = -21 \frac{KQ^2}{2a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} + 33 \frac{KQ^2}{a^2}$$

$$F_y = \frac{KQ^2}{a^2} \left(33 - \frac{21\sqrt{2}}{4} \right)$$

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{4x} = -F_1 + F_2 \cos 45^\circ + 0$$

$$F_x = 21 \frac{KQ^2}{2a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} - 15 \frac{KQ^2}{a^2} = \frac{KQ^2}{a^2} \left(\frac{21\sqrt{2}}{4} - 15 \right)$$

نکته:

نوشتن مجموع نیروها به صورت

$$F = F_2 + F_3 + F_4 = 15 \frac{KQ^2}{a^2} + 21 \frac{KQ^2}{2a^2} + 33 \frac{KQ^2}{a^2}$$

کاملاً غلط است چون مفهوم برداری نیروها اصلاً در آن لحاظ نشده است. نتیجه نهایی حاصل چنین محاسبه‌ای هم غلط است.

جمع بندی روش المان ها

این روش برای حل نیرو (و یا میدان، پتانسیل و ...) ناشی از بارهای پیوسته به کار می رود.

۱ بار پیوسته اولیه را به تعدادی بسیار زیادی بارهای کوچک، که نیروی ناشی از هرکدام را می دانید، تبدیل کنید.

۲ نیروی ناشی از هر بار کوچک را بنویسید.

۳ اگر مساله مورد نظر یک بعدی نیست، نیروی یاد شده را در جهت های عمود بر هم تجزیه کنید (مانند مساله بعد). معمولا نیرو در یکی از جهت ها (بنا به تقارن) صفر است.

۴ از نیروی دیفرانسیلی به دست آمده انتگرال بگیرید تا نیروی کل به دست آید.

۵ اگر در انتگرال خود دو متغیر داشتید، با استفاده از تناسب یکی از متغیرها را حذف کنید.

۶ نتیجه نهایی به دست آمده را با استفاده از شکل نقطه ای قانون کولن چک کنید (فواصل زیاد).

اهمیت روش المان ها در اینجاست که با حل مسائل کوچکتر و ساده تر، می توان از نتایج آنها استفاده کرده و مسائل بزرگتری را حل کرد. مثلا اگر جواب مربوط به یک حلقه را به دست آوریم، می توانیم از آن استفاده کرده و جواب مربوط به یک دیسک (قرص) را بیابیم. در فصل بعد به تفصیل در این زمینه بحث خواهیم کرد.

پرسش دوم: نیروی ناشی از یک میله باردار

قانون کولن:

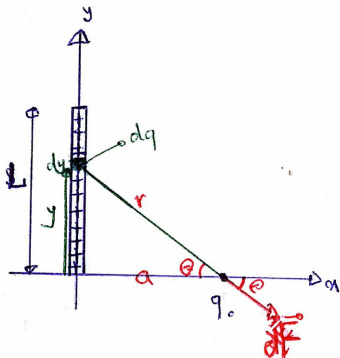
می خواهیم نیروی کل وارد شده بر بار آزمون q_0 ، از طرف میله ای که به صورت یکنواخت باردار شده است، را بیابیم. فرض کنید که بار کل میله برابر Q می باشد.

الف) اندازه المان نیروی $d\vec{F}$ که از طرف بار جزئی dq به بار آزمون q_0 وارد می شود را بیابید.

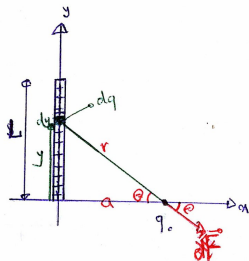
ب) المان نیروی $d\vec{F}$ را در جهت های x و y تجزیه کرده و نتیجه (یعنی dF_x و dF_y) را بنویسید.

پ) المان بار dq چه ارتباطی با بار کل Q ، طول میله L و طول المان dy دارد؟ این رابطه را با استفاده از تناسب به دست آورید.

ت) با انتگرالگیری از مولفه های x و y ، یعنی dF_x و dF_y ، نیروی کل در این جهت ها را بیابید.



پاسخ پرسش دوم: نیروی ناشی از یک میله باردار



پاسخ الف)

$$|d\vec{F}| = \frac{Kq_0 dq}{r^2} = \frac{Kq_0 dq}{y^2 + a^2}$$

پاسخ ب)

$$dF_x = dF \cos \theta = \frac{Kq_0 dq}{y^2 + a^2} \frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}}$$

$$dF_y = dF \sin \theta = \frac{Kq_0 dq}{y^2 + a^2} \frac{y}{\sqrt{y^2 + a^2}}$$

پاسخ پ)

$$dq = Q \frac{dy}{L}$$

پاسخ ت)

$$F_x = \int dF_x = \int \frac{Kq_0 dq}{y^2 + a^2} \frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}} = \frac{Kq_0 Qa}{L} \int_0^L \frac{dy}{(y^2 + a^2)^{3/2}}$$

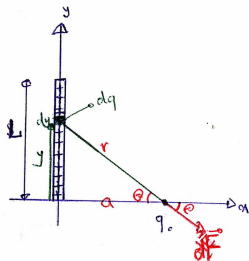
انتگرال اخیر را می توان با تغییر متغیر

$$y = a \tan \theta \quad \Rightarrow \quad dy = a (1 + \tan^2 \theta) d\theta$$

حل کرد:

$$F_x = \frac{Kq_0 Qa}{L} \left[\frac{y}{a^2 (y^2 + a^2)^{1/2}} \right]_0^L = \frac{Kq_0 Q}{a (L^2 + a^2)^{1/2}}$$

پاسخ پرسش دوم: نیروی ناشی از یک میله باردار



ادامه پاسخ (ت) پیدا کردن F_y

$$F_y = \int dF_y = \int \frac{Kq_0 dq}{y^2 + a^2} \frac{y}{\sqrt{y^2 + a^2}} = \frac{Kq_0 Q}{L} \int_0^L \frac{y dy}{(y^2 + a^2)^{3/2}}$$

انتگرال اخیر را می توان با تغییر متغیر

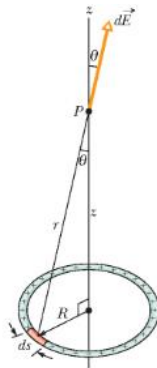
$$u = y^2 + a^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2y dy$$

حل کرد:

$$F_y = \frac{Kq_0 Q}{L} \left[-\frac{1}{(y^2 + a^2)^{1/2}} \right]_0^L$$

$$F_y = \frac{Kq_0 Q}{L} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + a^2}} \right)$$

پرسش سوم: پیدا کردن میدان یک حلقه باردار



حلقه باردار مقابل، که بار به صورت همگن روی آن توزیع شده است، را در نظر بگیرید.
 الف) اگر چگالی خطی بار این حلقه λ باشد، بار جزء بسیار کوچک به طول ds چقدر است؟
 ب) میدان بسیار کوچک dE که این بار بسیار کوچک در فاصله z از مرکز حلقه ایجاد میکند چقدر است؟
 پ) میدان کل را با انتگرال گیری بیابید.

پاسخ الف)

$$\lambda = \frac{dq}{ds} \Rightarrow dq = \lambda ds$$

شکل از فیزیک هالیدی.

$$|d\vec{E}| = \frac{K dq}{r^2} \quad \text{پاسخ ب)}$$

پرسش سوم: پیدا کردن میدان یک حلقه باردار- پاسخ

پاسخ پ)



با توجه به تقارن شکل مقابل واضح است که فقط مولفه میدان در راستای محور z غیر صفر خواهد بود و مولفه های میدان عمود بر محور z صفرند. برای درک این نکته کافی است دقت کنیم که به ازای هر المان به طول ds که در شکل نشان داده شده است، المان دیگری با همان طول در طرف مقابل وجود دارد. میدان المان اخیر مولفه ای در جهت مثبت محور z دارد و بنابراین میدان کل را در این راستا تقویت می کند؛ هرچند، مولفه عمود بر محور z آن دقیقاً در جهت عکس المان اول خواهد بود. برای پیدا کردن dE_z توجه می کنیم که

$$dE_z = dE \cos \theta = K \frac{dq}{R^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

و یا

$$dE_z = K \frac{\lambda ds}{R^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

برای پیدا کردن میدان کل توجه می کنیم که تنها متغیر در این دیفرانسیل ds می باشد (چرا؟).

شکل از فیزیک هالیدی.

پرسش سوم: پیدا کردن میدان یک حلقه باردار- پاسخ



پاسخ پ)

بنابراین، با انتگرال گیری از طرفین رابطه اخیر داریم:

$$\int_0^s dE_z = \frac{K\lambda z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^s ds$$

و یا

$$E_z = \frac{K\lambda z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} s.$$

در اینجا s به معنی مجموع (انتگرال) تک تک المان های بسیار کوچک ds است؛ یعنی محیط دایره $s = 2\pi R$.
از طرفی بار کل حلقه برابر است با $Q = 2\pi R\lambda = s\lambda$. بنابراین

$$E_z = \frac{KQz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

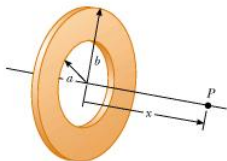
سوال: رفتار میدان در $z \rightarrow 0$ و $z \rightarrow \infty$ ؟

شکل از فیزیک هالیدی.

حال با استفاده نتیجه این مساله یک بعدی، یک مساله دو بعدی را حل خواهیم کرد .

پرسش چهارم: میدان یک قرص توخالی

انتگرال گیری مستقیم میدان برای یک توزیع بار پیوسته:



برای پیدا کردن میدان الکتریکی قرص توخالی مقابل در نقطه P ، فرض می‌کنیم که این قرص به تعداد بسیار زیادی حلقه باردار با بار dq ، شعاع r و ضخامت dr تقسیم شده است. بار کل دیسک برابر Q و چگالی سطحی بار این دیسک برابر $\sigma = \frac{Q}{\pi(b^2 - a^2)}$ می‌باشد. K ثابت کولن است.

راهنمایی: می‌دانیم که میدان الکتریکی یک حلقه باردار با بار dq ، شعاع r و در فاصله x از مرکز حلقه از رابطه

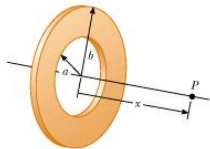
$$dE = \frac{Kxdq}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

بدست می‌آید.

الف) با استفاده از تناسب، مقدار بار dq همان حلقوی به ضخامت dr را بیابید.

ب) میدان الکتریکی کل قرص توخالی را با انتگرال گیری بدست آورید.

پاسخ پرسش چهارم: میدان یک قرص توخالی



پاسخ الف) روش اول:

$$\sigma = \frac{dq}{dA} \Rightarrow dq = \sigma dA = \frac{Q}{\pi(b^2 - a^2)} 2\pi r dr$$

روش دوم: تناسب.

پاسخ ب)

$$E = \int dE = \int_0^Q \frac{K x dq}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{2\pi K Q x}{\pi(b^2 - a^2)} \int_a^b \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

انتگرال اخیر را می توان با تغییر متغیر

$$u = r^2 + x^2 \Rightarrow du = 2r dr$$

حل کرد:

$$E = \frac{2\pi K Q x}{\pi(b^2 - a^2)} \left[-\frac{1}{(x^2 + r^2)^{1/2}} \right]_a^b$$

$$E = \frac{2\pi K Q x}{\pi(b^2 - a^2)} \left(\frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}} - \frac{1}{(x^2 + b^2)^{1/2}} \right)$$

سوال: آیا این جواب در حد $a = 0$ به جوابی که قبلاً به دست آورده ایم تبدیل می شود؟

پیروز باشید.