

حسابان برای فیزیک

درس هفتم: مقدمه ای بر معادلات دیفرانسیل در فیزیک

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس برای آشنایی مقدماتی دانشجویان جدیدالورود، که تاکنون با حساب انتگرال آشنا نشده اند، و به جهت کمک به فهم دروس فیزیک مکانیک و فیزیک الکتریسیته و مغناطیس تهیه شده است. این مجموعه درس، از لحاظ گستردگی و دقت در ارائه مفاهیم، قطعاً جایگزین درس ریاضی عمومی نخواهد بود.
- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در پاییز و زمستان سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که، با تلاش بسیار، امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

● درس هفتم: مقدمه ای بر معادلات دیفرانسیل در فیزیک

● تعاريف

● معادلات مرتبه اول

● معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

چپستی معادلات دیفرانسیل

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{\nabla p}{\rho} = \mathbf{g} \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla e + \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

تاکنون آموخته ایم که معادله $f = \frac{dy}{dx}$ را می توان به صورت $y(x) = \int_0^x f(t) dt$ حل کرد. ولی بسیاری از معادلات در فیزیک و ریاضی ساختاری بسیار پیچیده تر دارند. مثلا معادله نیوتن را در نظر بگیرید که شامل مشتق دوم است:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F(x, t)$$

یک مورد ساده از این معادله، معادله حاکم بر فنر است:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -kx(t)$$

و یا معادله حاکم بر مدار RLC را در نظر بگیرید:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0$$

البته معادلات دیفرانسیل می توانند صورت های بسیار پیچیده تر نیز به خود بگیرند (مانند شکل دیفرانسیلی معادلات ماکسول و معادلات حاکم بر سیال که در سمت چپ می بینید). ما این موارد پیشرفته (که شامل مشتقات جزئی هستند) را در درس مقدماتی حاضر بررسی نخواهیم کرد.

برخی تعاریف مفید: مرتبه و خطی بودن معادلات دیفرانسیل

● مرتبه یک معادله دیفرانسیل برابر با بالاترین مشتقی است که در آن معادله حضور دارد. نمونه معادله دیفرانسیل مرتبه اول:

$$m \frac{dv}{dt} = F(t, v)$$

نمونه معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$$

$$ay'' + by' + cy = g(t)$$

$$\sin(y) \frac{d^2 y}{dx^2} = (1 - y) \frac{dy}{dx} + y^2 e^{-5y}$$

نمونه معادلات دیفرانسیل مرتبه چهارم:

$$y^{(4)} + 10y''' - 4y' + 2y = \cos(t)$$

● معادلات دیفرانسیل خطی معادلاتی هستند که می توان آنها را به صورت زیر نوشت:

$$a_n(t) y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t) y'(t) + a_0(t) y(t) = g(t)$$

یعنی در معادلات دیفرانسیل خطی، تابع y در خودش و یا مشتقاتش ضرب نمی شود. نمونه معادلات دیفرانسیل غیر خطی:

$$\sin(y) \frac{d^2 y}{dx^2} = (1 - y) \frac{dy}{dx} + y^2 e^{-5y}$$

معمولا حل معادلات دیفرانسیل خطی بسیار ساده تر از معادلات دیفرانسیل غیرخطی است.

برخی تعاریف مفید: معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی؛ جواب معادلات

اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر شامل مشتقات جزئی هم باشد، آنگاه آن را معادله دیفرانسیل جزئی می نامند. مثال:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 1 + \frac{\partial u}{\partial y}$$

ما فعلا فقط با معادلات دیفرانسیل معمولی کار خواهیم کرد.

جواب معادله دیفرانسیل، در یک بازه معین، تابعی است که در آن بازه در معادله مورد نظر صدق می کند.

مثلا نشان می دهیم که تابع $y(x) = x^{-\frac{3}{4}}$ برای مقادیر مثبت x ، جواب معادله دیفرانسیل $4x^2 y'' + 12xy' + 3y = 0$ باشد. ابتدا، مشتقات اول و دوم تابع را محاسبه می کنیم:

$$y'(x) = -\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}} \quad y''(x) = \frac{15}{4}x^{-\frac{11}{4}}$$

حال این مشتقات را در معادله دیفرانسیل مورد نظر قرار می دهیم:

$$4x^2 \left(\frac{15}{4}x^{-\frac{11}{4}} \right) + 12x \left(-\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}} \right) + 3 \left(x^{-\frac{3}{4}} \right) = 0$$

$$15x^{-\frac{3}{4}} - 18x^{-\frac{3}{4}} + 3x^{-\frac{3}{4}} = 0$$

$$0 = 0$$

لطفا دقت کنید که تابع مورد نظر در بازه $x < 0$ اصلا جواب قابل قبولی نیست. چرا؟

برخی تعاریف مفید: شرایط اولیه؛ مساله مقدار اولیه

تمرین: نشان دهید که توابع زیر

$$y(x) = x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y(x) = -9x^{-\frac{2}{3}}$$

$$y(x) = 7x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y(x) = -9x^{-\frac{2}{3}} + 7x^{-\frac{1}{3}}$$

همگی جواب معادله دیفرانسیل $4x^2 y'' + 12xy' + 3y = 0$ می باشند.
دقت کنید که جهان فیزیکی نمی تواند بینهایت جواب را به عنوان راه حل بپذیرد! بنابراین باید جواب های معادلات دیفرانسیل را، با توجه به شرایط فیزیک مساله، محدود کنیم.

شرط (شرایط) اولیه: شرط و یا مجموعه ای از شرایط که بر جواب های معادلات دیفرانسیل تحمیل می شود تا "جواب یکتای" معادله دیفرانسیل مورد نظر پیدا شود. این شرایط معمولاً به صورت مقادیر تابع و یا مشتقات آن معرفی می شوند.

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{and/or} \quad y^{(k)}(t_0) = y_k$$

مساله مقدار اولیه: یک معادله دیفرانسیل با تعداد مناسبی شرایط اولیه (که منجر به جواب یکتا می شوند) را مساله مقدار اولیه می نامند.
مثال اول:

$$4x^2 y'' + 12xy' + 3y = 0 \quad y(4) = \frac{1}{8}, \quad y'(4) = -\frac{3}{64}$$

$$2ty' + 4y = 3 \quad y(1) = -4 \quad \text{مثال دوم:}$$

برخی تعاریف مفید: جواب عمومی؛ درجه معادله

● جواب عمومی: جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل کلی ترین جواب ممکن (بدون اعمال شرایط اولیه مساله) است. مثلاً تابع

$$y(t) = \frac{3}{4} + \frac{c}{t^2}$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل

می باشد. مقدار کمیت c با استفاده از شرط اولیه تعیین می شود.

● درجه معادله دیفرانسیل: درجه معادله دیفرانسیل، توان بزرگترین مشتق موجود در آن محسوب می شود. مثلاً معادله

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^4 - \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + 6y = 5x^5$$

از مرتبه دوم است (زیرا بالاترین مشتق آن مرتبه یک دارد) ولی از درجه چهارم محسوب می شود.

معادلات مرتبه اول جداپذیر

اگر بتوان معادله ای را به صورت $N(y) \frac{dy}{dx} = M(x)$ نوشت، آنگاه آن را جدا پذیر می نامند. دقت کنید که این یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول غیرخطی است. جواب چنین معادله ای، با انتگرال گیری از طرفین، به راحتی به صورت زیر به دست می آید:

$$N(y) dy = M(x) dx \Rightarrow \int N(y) dy = \int M(x) dx + c$$

ثابت c را ثابت انتگرال گیری می نامند. این ثابت با توجه به شرایط اولیه مساله تعیین می شود.
معادله دیفرانسیل زیر را، با توجه به شرط اولیه تعیین شده، حل کنید:

$$\frac{dy}{dx} = 6y^2 x \quad y(1) = \frac{1}{25}$$

پاسخ: جواب عمومی به صورت زیر به دست می آید:

$$\int y^{-2} dy = \int 6x dx$$

$$-\frac{1}{y} = 3x^2 + c$$

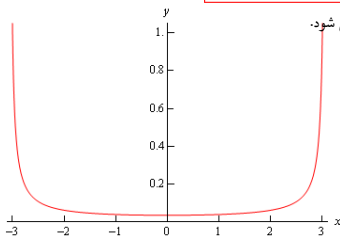
$$-\frac{1}{1/25} = 3(1)^2 + c \quad c = -28$$

$$-\frac{1}{y} = 3x^2 - 28$$

از اینجا می توان جواب یکتای مساله را پیدا کرد:

$$y(x) = \frac{1}{28 - 3x^2}$$

در شکل رو به رو، شکل کلی جواب را می بینید. دامنه جواب را تعیین کنید.

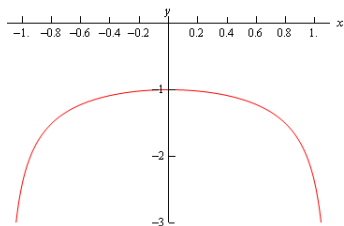


مثال

معادله دیفرانسیل زیر را، با توجه به شرط اولیه تعیین شده، حل کنید:

$$y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad y(0) = -1$$

پاسخ: جواب عمومی به صورت زیر به دست می آید:



$$y^{-3} dy = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$\int y^{-3} dy = \int x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$-\frac{1}{2y^2} = \sqrt{1+x^2} + c$$

$$-\frac{1}{2} = \sqrt{1} + c \quad c = -\frac{3}{2} \quad \text{حال با توجه به شرط اولیه مساله داریم:}$$

$$-\frac{1}{2y^2} = \sqrt{1+x^2} - \frac{3}{2} \quad \text{از اینجا می توان جواب یکتای مساله را پیدا کرد:}$$

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}} \quad \text{و یا}$$

تمرین

● معادلات دیفرانسیل زیر را، با توجه به شرایط اولیه تعیین شده، حل کنید:

$$۱) \quad \frac{dy}{dx} = 6y^2 x \quad y(1) = \frac{1}{25}$$

$$۲) \quad y' = \frac{3x^2 + 4x - 4}{2y - 4} \quad y(1) = 3$$

$$۳) \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2}{\theta} \quad r(1) = 2$$

$$۴) \quad \frac{dy}{dt} = e^{y-t} \sec(y) (1 + t^2) \quad y(0) = 0$$

● پاسخ ها (به ترتیب): $y(x) = \frac{1}{28 - 3x^2}$

$$۲) \quad y^2 - 4y - (x^3 + 2x^2 - 4x - 2) = 0$$

$$۳) \quad r = \frac{1}{\frac{1}{r} - \ln|\theta|}$$

$$۴) \quad \frac{e^{-y}}{y} (\sin(y) - \cos(y)) = -e^{-t} (t^2 + 2t + 3) + \frac{5}{y}$$

حل کلی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی

شکل کلی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی به صورت مقابل است: $\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$

در اینجا توابع $p(t)$ و $g(t)$ پیوسته هستند.

برای پیدا کردن جواب معادله دیفرانسیل بالا، طرفین معادله را در تابع $\mu(t)$ ضرب می‌کنیم:

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)g(t)$$

این تابع را فاکتور انتگرال گیری می‌نامیم. حال می‌توان به راحتی اثبات کرد که اگر فاکتور انتگرال گیری در معادله

$$\mu(t)p(t) = \mu'(t) \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = e^{\int p(t) dt}$$

صدق کند (تمرین: طرف راست را اثبات کنید!)، آنگاه جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(\mu(t)y(t))' = \mu(t)g(t) \quad \Rightarrow \quad \int (\mu(t)y(t))' dt = \mu(t)y(t) + c = \int \mu(t)g(t) dt$$

بنابراین، جواب کلی معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی به صورت زیر است:

$$y(t) = \frac{\int \mu(t)g(t) dt + c}{\mu(t)} \quad \text{in which} \quad \mu(t) = e^{\int p(t) dt}$$

توجه: برای پیدا کردن جواب باید اول تابع $\mu(t)$ را از معادله سمت راست پیدا کرده و آن را در معادله سمت چپ قرار دهیم. ثابت c با توجه به شرط اولیه مساله پیدا می‌شود (پس از حل انتگرال سمت چپ).

مثال

معادله دیفرانسیل مقابل را، با توجه به شرط اولیه، حل کنید: $y(1) = \frac{1}{4}$ $ty' + 2y = t^2 - t + 1$

پاسخ: در ابتدا، با تقسیم طرفین معادله بر پارامتر t ، معادله را به شکل کلی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی تبدیل می‌کنیم:

$$y' + \frac{2}{t}y = t - 1 + \frac{1}{t}$$

حال فاکتور انتگرال گیری را می‌یابیم:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t} dt} = e^{2 \ln |t|} = t^2$$

در اینجا با ضرب طرفین معادله در فاکتور انتگرال گیری، می‌توانیم جواب عمومی را بیابیم:

$$(t^2 y)' = t^3 - t^2 + t \Rightarrow \int (t^2 y)' dt = \int (t^3 - t^2 + t) dt$$

$$t^2 y = \int (t^3 - t^2 + t) dt = \frac{1}{4} t^4 - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{2} t^2 + c$$

$$y(t) = \frac{1}{4} t^2 - \frac{1}{3} t + \frac{1}{2} + \frac{c}{t^2}$$

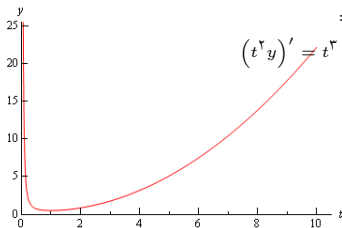
برای ثابت انتگرال گیری نیز داریم:

$$\frac{1}{4} = y(1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = \frac{1}{12}$$

بنابراین، جواب معادله دیفرانسیل یاد شده، با توجه به شرط اولیه تعریف شده، به صورت زیر است:

$$y(t) = \frac{1}{4} t^2 - \frac{1}{3} t + \frac{1}{2} + \frac{1}{12 t^2}$$

این جواب در شکل بالا رسم شده است.



تمرین

• نتایج زیر را اثبات کنید:

$$۱) \quad \frac{dv}{dt} = ۹.۸ - ۰.۱۹۶v \quad \text{if} \quad v(0) = ۴۸ \quad \Rightarrow \quad v = ۵۰ - ۲e^{-0.196t}$$

$$۲) \quad \cos(x) y' + \sin(x) y = ۲\cos^۳(x) \sin(x) - ۱ \quad \text{if} \quad y\left(\frac{\pi}{۴}\right) = ۳\sqrt{۲}, \quad \text{and} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = -\frac{1}{۲} \cos(x) \cos(۲x) - \sin(x) + ۷\cos(x)$$

$$۳) \quad t y' - ۲y = t^۵ \sin(۲t) - t^۳ + ۴t^۴ \quad y(\pi) = \frac{۳}{۲}\pi^۴$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = -\frac{1}{۲}t^۴ \cos(۲t) + \frac{1}{۲}t^۳ \sin(۲t) + \frac{1}{۴}t^۲ \cos(۲t) - t^۳ + ۲t^۴ + \left(\pi - \frac{1}{۴}\right)t^۲$$

$$۴) \quad ۲y' - y = ۴\sin(۳t) \quad y(0) = y_0$$

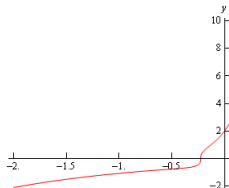
$$\Rightarrow \quad y(t) = -\frac{۲۴}{۳۷} \cos(۳t) - \frac{۴}{۳۷} \sin(۳t) + \left(y_0 + \frac{۲۴}{۳۷}\right)e^{\frac{t}{۲}}$$

معادله برنولی

معادله مقابل را معادله برنولی می نامند: $y' + p(x)y = q(x)y^n$

این معادله را می توان پس از تقسیم طرفین بر y^n ، و با جانشانی $v = y^{1-n}$ ساده سازی کرده و به صورت زیر تبدیل کرد:

$$\frac{1}{1-n} v' + p(x)v = q(x)$$



این یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است و بنابراین به روش گفته شده در اسلایدهای قبل قابل حل می باشد.

مثال: معادله برنولی زیر را در نظر بگیرید:

$$y' = 5y + e^{-2x} y^{-2} \quad y(0) = 2$$

این معادله را می توان پس از تقسیم طرفین بر y^{-2} ، و با جانشانی $v = y^{1-(-2)} = y^3$ ساده سازی کرده و به صورت زیر تبدیل کرد:

$$\frac{1}{3} v' - 5v = e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad v' - 15v = 3e^{-2x} \quad \mu(x) = e^{-15x}$$

این یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است و بنابراین به روش گفته شده در اسلایدهای قبل قابل حل می باشد:

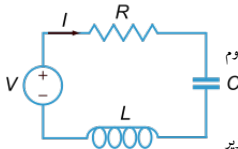
$$v(x) = y^3 = ce^{15x} - \frac{3}{17} e^{-2x}$$

شما ثابت انتگرال گیری را یافته و جایگزین کنید. جواب را در شکل مقابل می بینید.

روش ها و بحث های بسیار جذاب دیگری (مانند روش عددی اوایلر، روش جایگذاری، حل های تعادلی و ...) در حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول نیز مطرح است که برای مطالعه آنها شما را به یک کتاب استاندارد معادلات دیفرانسیل، مانند کتاب بویس و دیپرما، ارجاع می دهم.

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

Series RLC circuit



معادله زیر را معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن می نامند:

$$p(t)y'' + q(t)y' + r(t)y = 0$$

اگر سمت راست معادله تابعی از زمان داشته باشیم، آنگاه معادله مورد نظر را معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم ناهمگن می نامند.

$$p(t)y'' + q(t)y' + r(t)y = g(t)$$

ما فعلا فقط بر معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن تمرکز می کنیم.

اصل برهم نهی: اگر توابع y_1 و y_2 جواب های معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن باشند، آنگاه ترکیب زیر نیز جواب معادله مورد نظر خواهد بود:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

ثوابت c_1 و c_2 ثوابت انتگرال گیری هستند و به وسیله شرایط اولیه تعیین می شوند. تمرین: این نتیجه را اثبات کنید.

می توان نشان داد که اگر توابع y_1 و y_2 از هم مستقل باشند، آنگاه برهم نهی بالا، کلی ترین جواب معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن را به دست می دهد.

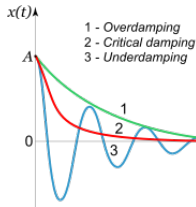
برای تعیین جواب یکتای معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن به دو شرط اولیه نیاز داریم. این دو شرط را می توان به یکی از دو صورت زیر فراهم کرد:

$$y(t_0) = y_0 \quad y(t_1) = y_1$$

$$y(t_0) = y_0 \quad y'(t_0) = y'_0$$

فعلا حالت بسیار ساده ای را در نظر می گیریم که ضرایب حاضر در معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن ثابت باشند:

$$ay'' + by' + cy = 0$$



چطور معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم را حل کنیم؟

- معادله دیفرانسیل $y'' - 9y = 0$ را در نظر گرفته و سعی کنید جوابی برای آن حدس بزنید! از شکل معادله واضح است که باید تابعی را (به عنوان جواب) پیدا کنیم که مشتق دوم آن نه برابر خود تابع باشد. با کمی جستجو در توابع آشنا، می توان به این نتیجه رسید که توابع

$$y_1(t) = e^{3t} \quad \text{and} \quad y_2(t) = e^{-3t}$$

- کاندیداهای خوبی هستند، زیرا خاصیت مورد اشاره را دارند. تمرین: با جایگذاری توابع بالا در معادله دیفرانسیل $y'' - 9y = 0$ نشان دهید که y_1 و y_2 واقعا جواب این معادله هستند.

$$y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t} \quad \text{تمرین: نشان دهید که تابع}$$

- جواب کلی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $y'' - 9y = 0$ می باشد.

- در واقع با کمی تجربه در حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت می توان به راحتی به این نتیجه رسید که تابع کلی $y(t) = e^{rt}$ رفتار کلی جواب های این معادله را در خود دارد!

- شانس خود را امتحان می کنیم:

$$y'(t) = r e^{rt} \quad y''(t) = r^2 e^{rt} \quad \Rightarrow \quad a(r^2 e^{rt}) + b(r e^{rt}) + c(e^{rt}) = 0$$

$$e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0 \quad \Rightarrow \quad ar^2 + br + c = 0$$

- معادله اخیر را معادله مشخصه معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت می نامند زیرا رفتار کلی جواب ها را تعیین می کند. سه حالت می تواند اتفاق بیفتد:

$$b^2 - 4ac > 0 \quad b^2 - 4ac = 0 \quad b^2 - 4ac < 0$$

- در ادامه این سه مورد را بحث خواهیم کرد.

دو جواب حقیقی مجزا: $b^2 - 4ac > 0$

جواب معادله دیفرانسیل زیر را بیابید:

$$y'' + 11y' + 24y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = -7$$

با جایگذاری تابع $y(t) = e^{rt}$ داریم:

$$r^2 + 11r + 24 = 0 \Rightarrow (r + 8)(r + 3) = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -8, -3$$

یعنی جواب کلی معادله دیفرانسیل به صورت زیر است:

$$y(t) = c_1 e^{-8t} + c_2 e^{-3t}$$

$$y'(t) = -8c_1 e^{-8t} - 3c_2 e^{-3t}$$

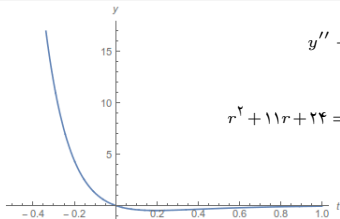
حال با توجه به شرایط اولیه داریم:

$$0 = y(0) = c_1 + c_2$$

$$-7 = y'(0) = -8c_1 - 3c_2$$

که با حل دستگاه می توان ثوابت را به دست آورده و جواب معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه را به صورت زیر نوشت:

$$y(t) = \frac{7}{5} e^{-8t} - \frac{7}{5} e^{-3t}$$



دو جواب مختلط: $b^2 - 4ac < 0$

اگر ریشه های معادله مشخصه مختلط باشند، آنگاه جواب های معادله دیفرانسیل مورد نظر به صورت زیر خواهند بود

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t} \sin(\mu t)$$

که در آن $r_{1,2} = \lambda \pm \mu i$ ریشه های معادله مشخصه هستند. تمرین: گزاره اخیر را اثبات کنید.

جواب معادله دیفرانسیل زیر را بیابید:

$$y'' - 4y' + 9y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = -\lambda$$

با جایگذاری تابع $y(t) = e^{rt}$ داریم:

$$r^2 - 4r + 9 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}i$$

یعنی جواب کلی معادله دیفرانسیل به صورت زیر است:

$$y(t) = c_1 e^{\sqrt{5}t} \cos(\sqrt{5}t) + c_2 e^{\sqrt{5}t} \sin(\sqrt{5}t)$$

حال با توجه به شرایط اولیه داریم $c_1 = y(0) = 0$. یعنی ثابت c_1 برابر صفر است. با مشتق گیری از

جواب عمومی داریم:

$$y(t) = c_2 e^{\sqrt{5}t} \sin(\sqrt{5}t)$$

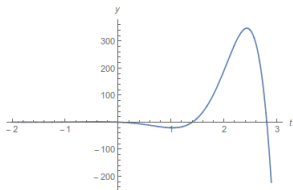
$$y'(t) = \sqrt{5}c_2 e^{\sqrt{5}t} \sin(\sqrt{5}t) + \sqrt{5}c_2 e^{\sqrt{5}t} \cos(\sqrt{5}t)$$

از اینجا نیز ثابت دوم به دست می آید:

$$-\lambda = y'(0) = \sqrt{5}c_2 \Rightarrow c_2 = -\frac{\lambda}{\sqrt{5}}$$

بنابراین می توان جواب معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه را به صورت زیر نوشت:

$$y(t) = -\frac{\lambda}{\sqrt{5}} e^{\sqrt{5}t} \sin(\sqrt{5}t)$$



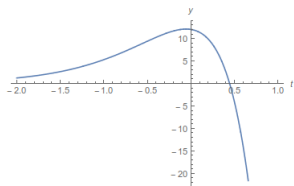
ریشه های تکراری: $b^2 - 4ac = 0$

اگر مقدار دلتا در معادله مشخصه مختلط صفر باشد، آنگاه جواب های معادله دیفرانسیل مورد نظر به صورت زیر خواهند بود

$$y(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$$

که در آن r ریشه ی مضاعف معادله مشخصه است.
تمرین: گزاره بالا را اثبات کنید.

جواب معادله دیفرانسیل زیر را بیابید:



$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad y(0) = 12 \quad y'(0) = -3$$

با جایگذاری تابع $y(t) = e^{rt}$ داریم:

$$r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2 = 0 \quad r_{1,2} = 2$$

یعنی جواب کلی معادله دیفرانسیل (و مشتق اول آن) به صورت زیر است:

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$$

$$y'(t) = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} + 2c_2 t e^{2t}$$

حال با توجه به شرایط اولیه داریم

$$12 = y(0) = c_1$$

$$-3 = y'(0) = 2c_1 + c_2$$

بنابراین می توان جواب معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه را به صورت زیر نوشت:

$$y(t) = 12e^{2t} - 27te^{2t}$$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید نکات اصلی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول و دوم را بیان کنید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ گوید:

چند معادله دیفرانسیل مرتبه اول، مرتبه دوم، مرتبه سوم بنویسید. یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم و درجه سوم هم بنویسید.

معادله دیفرانسیل خطی چیست؟ معادله دیفرانسیل غیرخطی چیست؟

شرایط اولیه مساله چیست؟ مساله مقدار اولیه چیست؟

جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل چه نوع جوابی است؟

چه نوع معادله مرتبه اولی را جداپذیر می نامیم؟ چطور این معادلات را حل می کنیم؟

جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی را چطور می یابیم؟

معادله برنولی چه نوع معادله ای است؟ چگونه این معادله را حل می کنیم؟

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم، با ضرایب ثابت، را چگونه حل می کنیم؟

رفتار سه نوع جواب معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم را شرح دهید.

اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات بالا (و همچنین در ادامه) محک زده و تقویت کنید.



تمرین

● معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$2\ddot{y} + 18y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \dot{y}(0) = 15$$

$$-\ddot{y} - 2\dot{y} + 5y = 0 \quad y(0) = -5 \quad \dot{y}(0) = +3$$

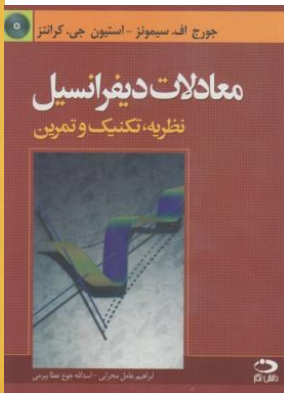
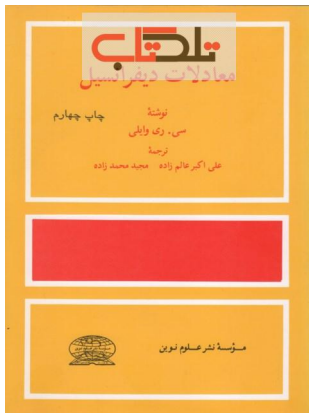
$$\ddot{y} - 9y = 0 \quad y(0) = 1 \quad \dot{y}(0) = 1$$

$$3\ddot{y} + 5\dot{y} - 8y = 0 \quad y(1) = 1 \quad \dot{y}(1) = -1$$

$$\ddot{y} + 11\dot{y} + 15y = 0 \quad y(0) = +3 \quad \dot{y}(0) = -2$$

$$\ddot{y} - 6\dot{y} + 8y = 0 \quad y(0) = +1 \quad \dot{y}(0) = -1$$

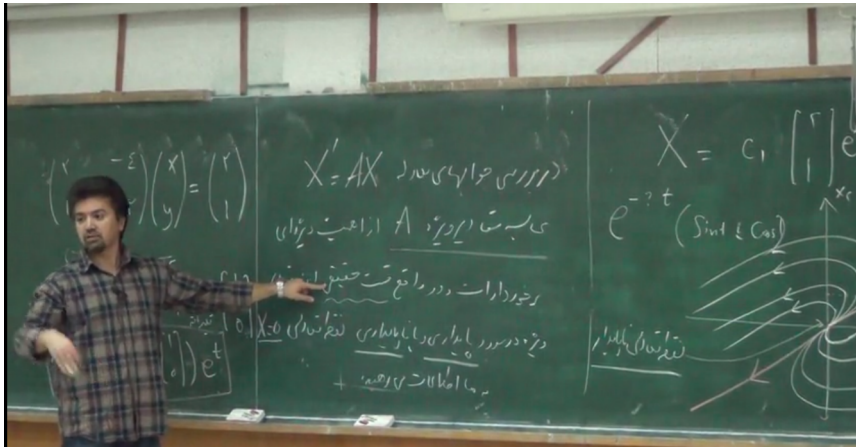
از منابع اصلی برای یادگیری معادلات دیفرانسیل استفاده کنید: بویس و همکاران، وایلی، سیمونز



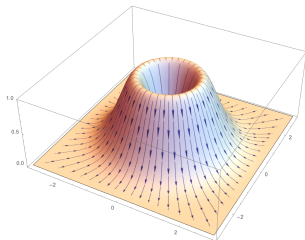
منابع دیداری برای یادگیری معادلات دیفرانسیل

کلاس درس دکتر امیر جعفری از دانشکده ی علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف را می توانید از مرکز آموزش های آزاد دانشگاه صنعتی شریف دریافت کنید.

<http://ocw.sharif.edu/courses>



مباحث دیگر



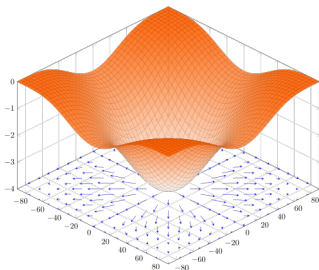
همانطور که در بالا اشاره شده است، این مجموعه درس به جهت آشنایی دانشجویان سال اول دانشگاه با مباحث ریاضیاتی پرکاربرد در فیزیک تهیه شده است. در آینده، بنا به احساس نیاز، موضوعات زیر به این مجموعه اضافه خواهند شد:

۱. مشتق و کاربرد مشتق.

۲. توابع چند متغیره و مشتق جهتی.

۳. بسط توابع.

شکل ها از <https://www.math24.net/>



منابع درس

1 <https://tutorial.math.lamar.edu/>

2 https://www.whitman.edu/mathematics/calculus_online/

با سپاس از توجه شما