

حسابان برای فیزیک

درس دوم: یافتن مساحت با استفاده از جمع بندی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس برای آشنایی مقدماتی دانشجویان جدیدالورود، که تاکنون با حساب انتگرال آشنا نشده اند، و به جهت کمک به فهم درس فیزیک مکانیک تهیه شده است. این مجموعه درس، از لحاظ گستردگی و دقت در ارائه مفاهیم، قطعاً جایگزین درس ریاضی عمومی نخواهد بود.
 - این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در پاییز سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
 - خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
- h.shenavar@gmail.com
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که، با تلاش بسیار، امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

درس دوم: یافتن مساحت با استفاده از جمع بندی

- سری ها در ریاضیات
- مساله بسیار مهم پیدا کردن مساحت
- یافتن مساحت با استفاده از جمع بندی مستقیم

خلاصه ای از سری ها

سری ها جمع بندی هستند؛ بنابراین ویژگی های اصلی عمل جمع بندی برای آنها هم برقرار است:

$$\sum_{i=m}^n (Af(i) + Bg(i)) = A \sum_{i=m}^n f(i) + B \sum_{i=m}^n g(i)$$

مثال:

$$\sum_{i=1}^5 (3i - 2i^2) = 3 \sum_{i=1}^5 i - 2 \sum_{i=1}^5 i^2$$

تمرین: نشان دهید که دو طرف رابطه بالا برابرند.

قاعده مهم لغزاندن اندیس ها:

$$\sum_{i=m}^{n+m} f(i) = \sum_{i=0}^n f(i+m)$$

تمرین: با نوشتن چند جمله اول از دو طرف رابطه بالا، نشان دهید که دو طرف رابطه با هم برابر هستند.

تمرین: نشان دهید که $\sum_{i=1}^n 1 = n$

نماد Σ را سیگما می نامند (یکی از حروف یونانی).

در ریاضیات معمولاً یک سری به عنوان مجموع یک دنباله معرفی می شود:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{\infty}$$

به حد بالا و حد پایین سری توجه کنید. سری ها می توانند نامتناهی نیز باشند:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{0^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots$$

سه نقطه در انتهای سری به معنی نامتناهی بودن آن است.

به مثال های دیگری از سری ها توجه کنید:

$$\sum_{i=0}^n t^i = t^0 + t^1 + t^2 + \dots + t^n$$

$$\sum_{m=0}^6 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$\sum_{m=-3}^2 \frac{1}{m+1} = \frac{1}{-2} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

یک سری را در حالت کلی می توان به صورت زیر نشان داد:

$$\sum_{i=m}^n f(i)$$

تمرین



نشان دهید که ۱

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

اثبات (منسوب به گوس):

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$S = n + n - 1 + n - 2 + \dots + 1$$

با جمع طرفین رابطه بالا با هم داریم:

$$2S = n(n+1) \Rightarrow S = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

نشان دهید که ۲

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

راهنمایی: اتحاد زیر را n بار با هم جمع کنید:

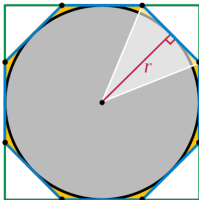
$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

نشان دهید که ۳

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

۴ به نتیجه این سه تمرین در اسلایدهای بعدی احتیاج خواهیم داشت.

جمع بندی برای پیدا کردن مساحت زیر منحنی ها

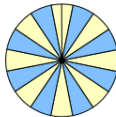
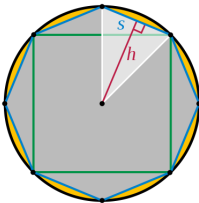


یافتن مساحت دایره (و یا به عبارتی، تعیین عدد π) از زمان باستان مد نظر بوده و بسیار بحث شده است. یونانی ها اولین روش های تعیین مساحت دایره را ابداع کرده و عدد π را تا دو رقم بامعنی به دست آوردند. روش های یونانی بیشتر مبتنی بر تقریب زدن دایره با اشکال محیطی و محاطی بوده است.

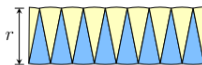
ریاضی دانان ایرانی نیز به همین روش سعی در تعیین هرچه دقیق تر π داشتند. مثلاً، جمشید کاشانی (زاده حدود ۷۵۸ خورشیدی - وفات ۱ تیر ۸۰۸) این عدد را تا شانزده رقم اعشار تعیین کرد.

ریاضی دانان هندی از روش متفاوت کسرهای مسلسل استفاده می کردند.

این روش ها بسیار هوشمندانه اند؛ ولی معمولاً قابل تعمیم نیستند. مخصوصاً در مواردی که نیاز به پیدا کردن مساحت در فیزیک داریم، هیچ تضمینی برای وجود چنین روش هایی وجود ندارد.

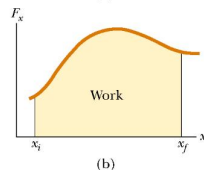
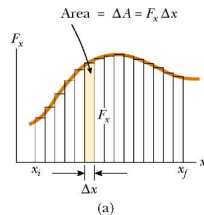
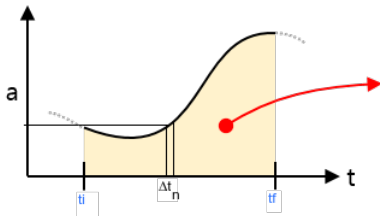
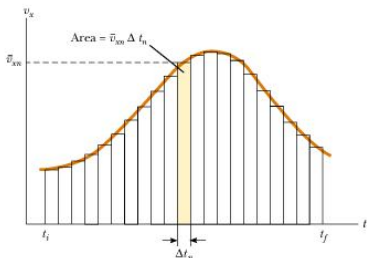


$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{1^2}{2 + \frac{1^2}{2 + \frac{1^2}{2 + \dots}}}}} = 3 + \frac{1^2}{6 + \frac{3^2}{6 + \frac{5^2}{6 + \frac{7^2}{6 + \frac{9^2}{6 + \dots}}}}}$$



$$= \frac{4}{1 + \frac{1^2}{3 + \frac{2^2}{5 + \frac{3^2}{4^2}}}}$$

ما به روشی کلی برای پیدا کردن مساحت زیر نمودارها در فیزیک احتیاج داریم

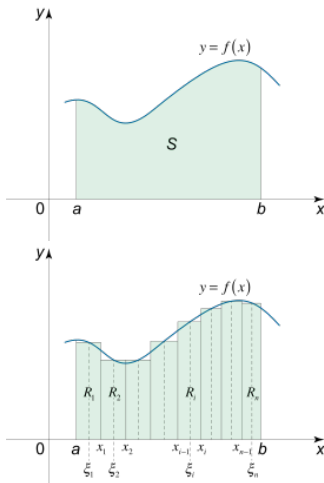


تغییر در سرعت برابر است با مساحت زیر نمودار شتاب-زمان.

تغییر در موقعیت برابر است با مساحت زیر نمودار سرعت-زمان.

کار کل انجام شده توسط یک نیرو برابر است با مساحت زیر نمودار نیرو-مکان.

مقدمه



فرض کنید که می خواهیم مساحت زیر نمودار $y = f(x)$ در شکل مقابل را از نقطه a تا b بیابیم. در این صورت، سطح مورد نظر را به تعداد زیادی مستطیل بسیار کوچک تجزیه کرده، مساحت هر کدام از مستطیل های کوچک را محاسبه و با هم جمع می کنیم تا مساحت کل پیدا شود. یعنی:

$$S \simeq f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \dots + f(x_N)\Delta x_N$$

و یا

$$S \simeq \sum_{i=1}^N f(x_i)\Delta x_i$$

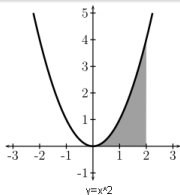
در اینجا N تعداد مستطیل هاست، i شماره مستطیل است و Δx_i عرض مستطیل شماره i است.

این ایده بسیار ساده در عمل چالش های بسیاری در پیش روی خود خواهد داشت. نخست، چرا مستطیل؟ دوم، عرض مستطیل ها چقدر کوچک باشد؟ سوم، چطور برای یک تابع دلخواه این مجموع را پیدا کنیم؟ چهارم، چه تضمینی وجود دارد که مقدار پیدا شده برای جمع بندی واقعا برابر با مساحت زیر نمودار مورد نظر باشد؟ و ...

بهترین راه برای درک این چالش ها، مواجهه با آنها در یک مثال است. مثال صفحه بعد را ببینید.

www.math24.net/r

شکل از

مساحت زیر نمودار x^2 

مساحت زیر نمودار $f(x) = x^2$ را در بازه $[0, 2]$ بیابید.

باید مساحت قسمت خاکستری رنگ شکل بالا را بیابیم. برای اینکار، این ناحیه را به n قسمت مساوی تقسیم کرده (مانند شکل پایین) و مساحت هر قسمت را می یابیم. عرض هر قسمت برابر $\Delta x_i = \frac{2}{n}$ و طول آن برابر $\left(\frac{2i}{n}\right)^2$ می باشد. در اینجا i شماره بازه است. بنابراین، مساحت هر مستطیل برابر است با

$$\Delta S_i = \frac{2}{n} \left(\frac{2i}{n}\right)^2$$

از اینجا می توان مساحت کل تقریبی زیر نمودار را به دست آورد:

$$S \simeq \Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots + \Delta S_n$$

$$S \simeq \sum_{i=1}^n \frac{2}{n} \left(\frac{2i}{n}\right)^2 = \frac{2}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^n i^2$$

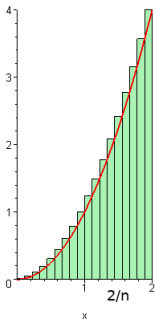
$$S \simeq \frac{\Lambda}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$$

$$S \simeq \frac{\Lambda}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{\Lambda}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

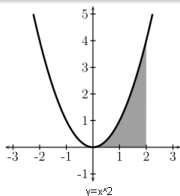
در حدی که تعداد مستطیل ها بینهایت زیاد باشد، و یا به عبارتی Δx_i بسیار کوچک باشد، داریم:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\Lambda}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right) = \frac{\Lambda}{3}$$

شکل ها از ویکی.



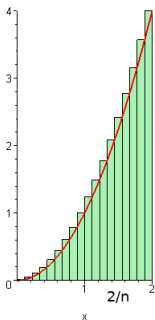
تحلیل روش به کار رفته برای یافتن مساحت زیر نمودار x^2



مساحت زیر نمودار $f(x) = x^2$ را در بازه $[0, 2]$ بیابید.

پرسش: چرا اجزاء مساحت را مستطیل شکل انتخاب کردیم؟
پاسخ: زیرا مساحت مستطیل را می توان راحت تر پیدا کرد. ولی انتخاب مستطیل می تواند باعث شود که مساحت جزء انتخاب شده کمی بیشتر (و یا کمتر) از مساحت واقعی باشد.
شاید بهتر باشد از دوزنقه استفاده کنیم. ولی ساختن چنین جمعی در این صورت ساده نخواهد بود.

پرسش: عرض مستطیل ها چقدر کوچک باشد؟ و یا تعداد زیربازه ها چقدر بزرگ باشد؟
پاسخ: تا حد ممکن! در واقع برای توابع خوشرفتار هرچقدر عرض مستطیل کوچکتر باشد، مقدار یافته شده برای مساحت دقیق تر خواهد بود.



پرسش اصلی: چطور برای یک تابع دلخواه این مجموع را پیدا کنیم؟

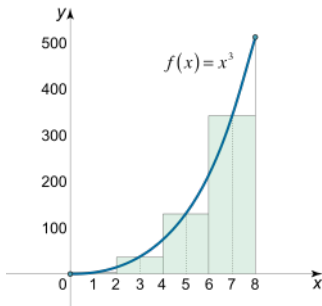
پاسخ: چنین مجموعی را می توان برای بسیاری از توابع پیدا کرد (یکی از موضوعات اصلی آنالیز ریاضی). برای توابع نوسانی چنین کاری بسیار چالش برانگیز است ولی در اکثر مواقع شدنی است.
هیچ تضمینی وجود ندارد که همیشه اینکار شدنی باشد.

پرسش: چه تضمینی وجود دارد که مقدار پیدا شده برای جمع بندی واقعا برابر با مساحت زیر نمودار مورد نظر باشد؟

جوابیافتن پاسخ این پرسش در کلاس ریاضی خود باشید؛ ولی، فعلا در این حد بدانید که ما کمیتی به نام "خطا" را تعریف می کنیم که برابر است با مقدار اصلی انتگرال منهای مقدار جمع بندی پیدا شده. اگر این خطا به سمت صفر میل کند، می گوییم که روش جمع بندی خوب کار می کند.

شکل ها از ویکی.

تمرین: مساحت زیر نمودار x^3



مساحت زیر نمودار $f(x) = x^3$ را در بازه $[0, 8]$ بیابید.

راهنمایی: ناحیه مورد نظر را به n قسمت مساوی تقسیم کرده و مساحت هر قسمت را بیابید. عرض هر قسمت برابر $\Delta x_i = \frac{A}{n}$ و طول آن برابر $(\frac{A}{n})^3$ می باشد. در اینجا i شماره بازه است. در نهایت تعداد مستطیل ها را به بینهایت میل دهید و مساحت مورد نظر را بیابید.

نتیجه: ۱۰۲۴

با اندکی محاسبه خواهید فهمید که چنین کاری برای توابع کمی پیچیده تر مانند

$$f(x) = x^5 - 4x^3 - 2x + 3$$

بسیار سخت تر است؛ برای توابع کسری مانند

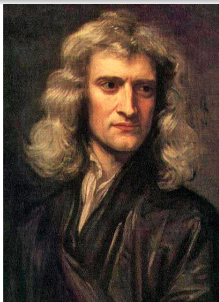
$$f(x) = \frac{1}{2x+3}$$

دردسرهایی خاص خود را دارد و برای توابع نوسانی دچار مشکلات تکنیکی ویژه ای است.

شکل از

www.math24.net/

راه چاره چیست؟



نیوتن و لایبنیتس نشان داده اند (با اثبات قضایای اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال) که لازم نیست برای محاسبه مساحت لزوماً از سری ها استفاده کنیم.
روشی که این دو ابداع کرده اند بر این اساس استوار است که عملی بسیار نزدیک به مشتق گیری، به نام انتگرال گیری، به صورت زیر تعریف می شود:

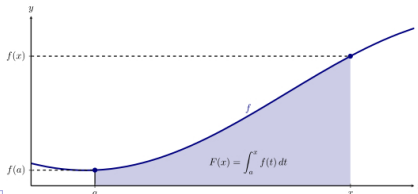
$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta t_i$$

و با استفاده از خواص صرف این عمل، که در جلسه بعد اثبات خواهند شد، مساحت زیر نمودار به دست خواهد آمد.

در اینجا F را تابع اولیه تابع f می نامند. تابع F برابر است با مساحت زیر نمودار تابع f از نقطه a تا نقطه x .

تعریف بالا را با تعریف مشتق مقایسه کنید:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$



شکل ها از ویکی و
[://ximera.osu.edu/](http://ximera.osu.edu/)

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید نکات اساسی سری ها و ارتباط آن با مساحت را بیان کنید. برای اینکار لازم است بتوانید به سوال های زیر پاسخ دهید:

۱. دنباله چیست؟ سری چیست؟
۲. تفاوت سری های متناهی و نامتناهی را بیان کنید.
۳. قاعده لغزاندن اندیس ها را بیان کنید.
۴. چگونه می توان با استفاده از سری ها، مساحت زیر یک منحنی را به دست آورد؟
۵. دقت مساحت زیر نمودار به دست آمده را چگونه می توان افزایش داد؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.



تمرین

پیدا کنید:

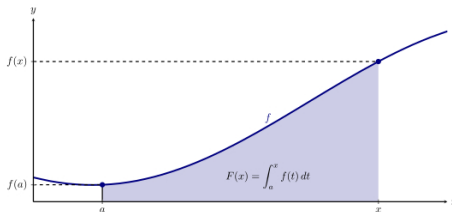
$$\sum_{i=1}^n (3i^2 - 2i + 5)$$

$$\sum_{i=m}^n (3i^2 - 2i + 5)$$

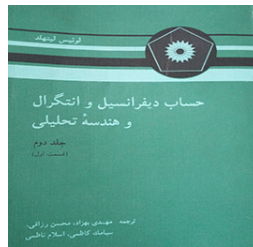
۲ مساحت زیر نمودار $y = 2x + 1$ بر روی دامنه $[0, 3]$ را بیابید.۳ مساحت زیر نمودار $y = \frac{1}{x}$ بر روی دامنه $[1, 2]$ را بیابید.

مبحث بعدی: ویژگی های انتگرال معین و قضایای اصلی حساب

- در جلسه بعد ویژگی های اصلی عمل انتگرال گیری را بیان و اثبات خواهیم کرد. همچنین، قضیه اساسی حساب را، به عنوان مهمترین ابزار تعیین انتگرال های معین بیان و اثبات می کنیم.



از منابع اصلی برای یادگیری حسابان استفاده کنید: سیلورمن، توماس، لیتهد، آپوستل.



کلاس درس بسیار جذاب دکتر سیاوش شهشهانی را حتما ببینید!

کلاس درس دکتر سیاوش شهشهانی از دانشگاه صنعتی شریف (برای دروس ریاضی عمومی) را می توانید از آپارات دریافت کنید.

بارگذاری ویدیو۶۶آپارات...

ریاضی ۱
احسان ۱۸/۱

ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشهانی -
دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۱
احسان

۲

ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشهانی -
دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۲
احسان

۳

ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشهانی -
دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۴
احسان

۴

ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشهانی -
دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۵
احسان

۵

ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشهانی -
دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۶
احسان

۶

بخش خودکار

۷,۵۰۸ ویدیوهای مشابه

ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشهانی - دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۱

۴۳

۴۴ دنبال کننده

رتبه برتر کنکور ارشد کامپیوتر (دانشجو ارشد
دانشگاه صنعتی شریف)

کنگره ارشد کامپیوتر

۴۳ دنبال کننده

۴۳ دنبال کننده

۴۳ دنبال کننده

حسابان برای فیزیک

حسین شناور

با سپاس از توجه شما