

مقدمه ای بر دترمینان و ماتریس روش کرامر برای حل دستگاه معادلات خطی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- روش کرامر برای حل دستگاه معادلات خطی
- روش کرامر برای حل دستگاه معادلات خطی
- دترمینان و وابستگی خطی

روش کرامر برای حل دستگاه معادلات خطی

دترمینان و وابستگی خطی

روش کرامر برای حل دستگاه معادلات خطی

حالا در وضعیتی هستیم که می توانیم از اطلاعات خود درباره دترمینان ها برای حل دستگاه معادلات خطی استفاده کنیم. در ابتدا دستگاه خطی دو معادله و دو مجهول را در نظر می گیریم و معنی هندسی روش کرامر را نیز بررسی خواهیم کرد. سپس دستگاه خطی سه معادله و سه مجهول را حل می کنیم. تعمیم به معادلات خطی مراتب بالاتر ساده است.

دستگاه خطی دو معادله و دو مجهول را در نظر بگیرید:

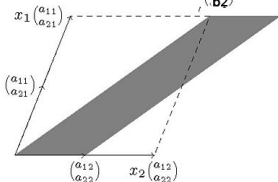
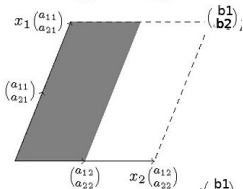
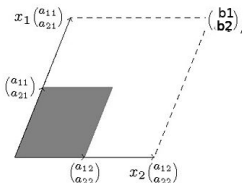
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

تمرین: به روش حذفی نشان دهید که پاسخ این دستگاه عبارت است از:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$



تفسیر هندسی روش کرامر برای حل دستگاه معادلات خطی

دستگاه خطی دو معادله و دو مجهول را در نظر بگیرید:

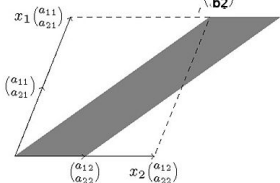
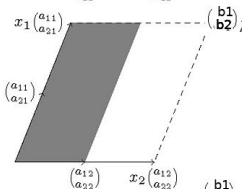
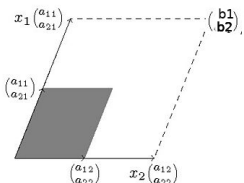
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

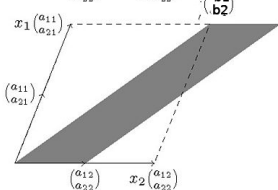
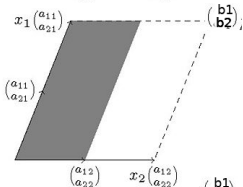
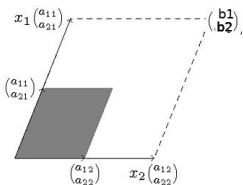
حل این دستگاه یک تفسیر ساده و بسیار مهم برداری دارد:

اعداد x_1 و x_2 را به صورتی بیابید که با ضرب بردار $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ در عدد x_1 و ضرب بردار $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ در عدد x_2 ، بردار $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ نتیجه شود.

یک روش هندسی برای پاسخ به این سوال را در اسلاید بعد ببینید.



تفسیر هندسی روش کرامر برای حل دستگاه معادلات خطی



پیشتر در بخش مقدمات ریاضی فیزیک و در درس ”بردارها در فیزیک” آموخته ایم که مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده بین دو بردار $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ برابر است با اندازه حاصلضرب برداری دو بردار و یا $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

همچنین، مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده توسط دو بردار $x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ برابر است با $x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

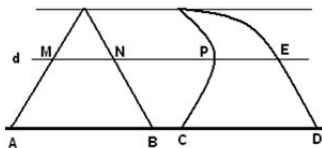
به علاوه، مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده توسط دو بردار $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ برابر است با $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$. بنا به اصل کاوالیری مساحت دو ناحیه اخیر با هم برابرند، در نتیجه:

$$x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

یادآوری اصل کاوالیری

به همین ترتیب می توان نتیجه گرفت:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$



تمرین (اختیاری): روش بالا را به حل دستگاه خطی سه معادله و سه مجهول تعمیم دهید.

اصل کاوالیری (Cavalieri's principle) در فضای دو بعدی: فرض کنید دو ناحیه در یک صفحه بین دو خط موازی در همان صفحه قرار گرفته‌اند. اگر هر خطی که موازی دو خط دیگر رسم شود، هر دو ناحیه را در پاره‌خط‌هایی با طول برابر قطع کند، آن دو ناحیه مساحت‌های برابر دارند.

اصل کاوالیری در فضای سه بعدی: فرض کنید دو ناحیه در یک فضای سه بعدی بین دو صفحه موازی در همان صفحه قرار گرفته‌اند. اگر هر صفحه‌ای موازی با دو صفحه دیگر، هر دو ناحیه را در سطح مقطع‌هایی با مساحت برابر قطع کند، حجم آن دو ناحیه با هم برابر است.

روش کرامر

در ادامه روش کرامر برای دستگاه خطی سه معادله سه مجهول را معرفی خواهیم کرد. روش به دست آوردن قاعده کرامر در این مورد کاملاً جبری خواهد بود.

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = h_1,$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = h_2,$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = h_3.$$

که در آن دترمینان ضرایب دستگاه به صورت زیر است:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

حال از قوانین دترمینان برای یافتن جواب ها استفاده می کنیم.

$$x_1 D = \begin{vmatrix} a_1 x_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 x_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 x_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

مقدار دترمینان بالا را در x_1 ضرب می کنیم. اینکار معادل با این است که ستون اول دترمینان (و یا هر سطر و ستون دیگر) را در مقدار x_1 ضرب کنیم.

روش کرامر

- حالا x_2 برابر ستون دوم و x_3 برابر ستون سوم را به دترمینان اضافه می کنیم. با توجه به قوانین دترمینان که در جلسه پیش آموختیم، با اینکار نتیجه دترمینان تغییر نخواهد کرد.

$$x_1 D = \begin{vmatrix} a_1 x_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 x_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 x_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 & a_2 & a_3 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 & b_2 & b_3 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

ولی ستون اول برابر است با ضرایب h_i . بنابراین می توان نوشت:

$$x_1 D = \begin{vmatrix} a_1 x_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 x_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 x_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 & a_2 & a_3 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 & b_2 & b_3 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} h_1 & a_2 & a_3 \\ h_2 & b_2 & b_3 \\ h_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

حال اگر داشته باشیم $D \neq 0$ می توان نوشت:

$$x_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} h_1 & a_2 & a_3 \\ h_2 & b_2 & b_3 \\ h_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

روش کرامر

تمرین: به همین ترتیب x_2 و x_3 را بیابید. پاسخ:

$$x_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & a_3 \\ b_1 & h_2 & b_3 \\ c_1 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad x_3 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & h_2 \\ b_1 & b_2 & h_2 \\ c_1 & c_2 & h_3 \end{vmatrix}.$$

قاعده کرامر: توجه می کنیم که در مخرج همه جواب ها مقدار D داریم. همچنین صورت کسر در جواب مربوط به x_i به این ترتیب به دست آمده است که ستون i ام از دترمینان D با ثوابت سمت راست معادله، یعنی h_i ها، جایگزین شده است. این نتیجه را می توان به هر دستگاه خطی n معادله تعمیم داد و آن را قاعده کرامر می نامند.

شرایط وجود جواب:

۱ اگر داشته باشیم $D \neq 0$ ، آنگاه جواب دستگاه بالا یکتا خواهد بود.

۲ اگر $D \neq 0$ و دستگاه معادلات همگن باشد، یعنی $h_i = 0$ ، آنگاه دستگاه بالا فقط جواب بدیهی خواهد داشت: $x_i = 0$.

۳ اگر $D = 0$ و دستگاه معادلات همگن باشد، یعنی $h_i = 0$ ، آنگاه دستگاه بالا فقط جواب غیربدیهی خواهد داشت که در جلسه اول از این بخش به دست آمد.

جمع بندی روش کرامر

● جمع بندی روش کرامر: جواب دستگاه معادلات خطی

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

به صورت زیر است

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}, \quad D \neq 0$$

که در آن

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

● تمرین: دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید:

$$x + y - z = 6$$

$$3x - 2y + z = -5$$

$$x + 3y - 2z = 14$$

مثال

تمرین: دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید:

$$x + y - z = 6$$

$$3x - 2y + z = -5$$

$$x + 3y - 2z = 14$$

پاسخ: با توجه به قاعده کرامر داریم:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 14 & 3 & 2 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 14 & 2 \end{vmatrix}, D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 14 \end{vmatrix}$$

بنابراین می توان نوشت:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-9}{-3} = 3$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{6}{-3} = -2$$

تمرین

● تمرین: جواب دستگاه معادلات خطی زیر را بیابید:

$$\begin{cases} 3x - 5y + 4z = 5 \\ 5x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

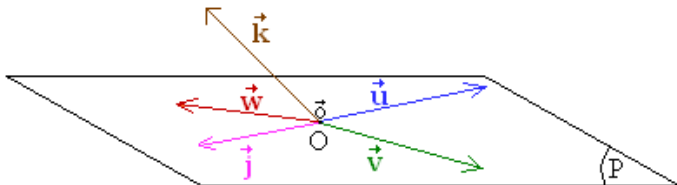
پاسخ: $(2, -3, -4)$.

دترمینان ها و وابستگی خطی

- تاکنون ارتباط دترمینان ها با دستگاه معادلات خطی را دیده ایم. اگر n معادله خطی با n متغیر داشته باشیم که به شکل زیر نوشته شده اند

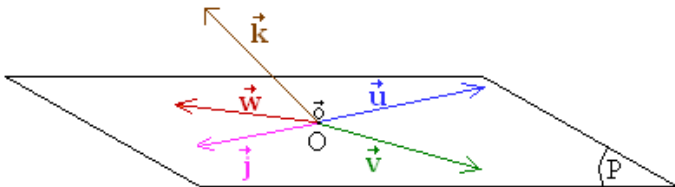
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

- و دترمینان ضرایب این دستگاه غیر صفر باشد، آنگاه متغیرها به صورت یکتا معلوم می شوند. معنی این نتیجه آن است که عبارت های موجود در سمت چپ معادلات بالا مستقل خطی هستند.
- در ادامه معنی هندسی استقلال و وابستگی خطی را مرور می کنیم.



معنی هندسی استقلال و وابستگی خطی

- مفهوم هندسی وابستگی و استقلال خطی: در شکل زیر بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقل هستند و صفحه را تشکیل می دهند (هر صفحه را می توان توسط دو بردار غیر موازی تعریف کرد).
- ولی بردارها $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ وابسته هستند زیرا هر سه در یک صفحه قرار دارند. در نتیجه می توان نوشت $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
- بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{j}$ وابسته هستند زیرا موازی یکدیگرند $\vec{u} = \alpha\vec{j}$.
- بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{k}$ مستقل هستند زیرا بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقل هستند و همچنین هیچ ترکیب خطی از آنها وجود ندارد که بردار $\vec{k}$ را بسازد. به زبان هندسی بردار $\vec{k}$ در صفحه بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ قرار ندارد. این سه بردار می توانند فضای سه بعدی را تشکیل دهند.



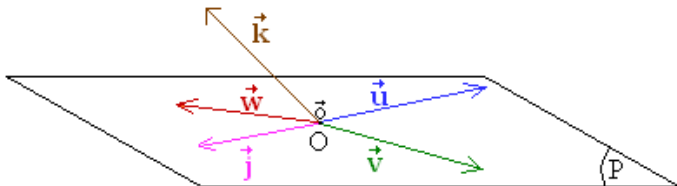
دترمینان ها و وابستگی خطی

در واقع می توان اثبات کرد که ”اگر مجموعه ای از n فرم ها (متغیرها، توابع، بردارها و ... forms) به صورت خطی وابسته باشند، آنگاه دترمینان ضرایب آنها صفر است.”

تمرین (اختیاری): گزاره بالا را اثبات کنید.

راهنمایی: وجود وابستگی خطی یعنی معادله ای وجود دارد که ضرایب آن یک ترکیب خطی از معادلات دیگر هستند. حال می توان از این واقعیت استفاده کرد تا درایه های موجود در سطر مربوط به ضرایب این معادله در دترمینان را به صفر کاهش داد. در نتیجه دترمینان ضرایب صفر خواهد شد.

نتیجه بسیار مهم: اگر ضرایب n فرم خطی با n متغیر تشکیل یک دترمینان غیر صفر دهند، آنگاه این فرم ها مستقل خطی هستند. ولی اگر ضرایب دستگاه تشکیل دترمینان صفر دهند، آنگاه فرم ها وابسته خطی هستند.



معادلات خطی-وابسته

• اگر مجموعه ای از n معادله با n متغیر به صورت خطی وابسته باشند، آنگاه سه حالت متفاوت می تواند رخ دهد.

۱ وقتی دستگاه معادله همگن است (یعنی $h_i = 0$). این حالت مهمترین حالت از نظر فیزیکی است. در این مورد یک و یا تعداد بیشتری از معادلات را می توان به صورت ترکیب خطی از دیگر معادلات نوشت. بنابراین تعداد معادلات مستقل کمتر از تعداد معادلات اولیه و تعداد متغیرها n خواهد بود. در این حالت می توان به یک و یا تعداد بیشتری از متغیرها یک مقدار دلخواه را نسبت داد. در نتیجه دیگر متغیرها به صورت تابعی از این متغیر به دست خواهند آمد. بنابراین یک مجموعه پارامتری از جواب ها (که گاهی آن را مَنیْفُلد manifold می نامند) خواهیم داشت. حال با توجه به نتایج قبلی برای دستگاه معادلات همگن به نتیجه زیر می رسیم:
نتیجه: اگر n معادله خطی همگن با n متغیر داشته باشیم و دترمینان ضرایب دستگاه صفر باشد، آنگاه دستگاه یک مجموعه جواب غیر بدیهی (مجموعه پارامتری یا منیفلد جواب) دارد.

۲ اگر سمت چپ دو معادله یکسان بوده ولی سمت راست آن دو یکسان نباشند، آنگاه دستگاه معادله ناسازگار است و دستگاه جواب ندارد.

۳ اگر سمت چپ و سمت راست دو معادله یکسان باشند (و یا دو معادله ضربی از هم باشند)، آنگاه دستگاه معادلات یک مجموعه جواب غیر بدیهی (مجموعه پارامتری یا منیفلد جواب) دارد.

یک مثال از مجموعه معادلات خطی-وابسته

● دستگاه معادلات زیر را حل کنید. $x_1 + x_2 + x_3 = 0,$

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0,$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.$$

● پاسخ: دقت می کنیم که دترمینان ضرایب صفر است.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(3)(3) - 1(5)(2) - 1(3)(1) - 1(1)(3) + 1(5)(1) + 1(1)(2) = 0.$$

همچنین، معادله سوم نصف مجموع دو معادله دیگر است؛ بنابراین این معادله مستقل نیست و می توانیم آن را نادیده بگیریم. در نتیجه می توانیم دو متغیر (مانند x_1 و x_2) را بر حسب

$$\text{متغیر سوم } x_3 \text{ به دست آوریم: } 2x_2 + 4x_3 = 0 \rightarrow x_2 = -2x_3,$$

$$2x_1 - 2x_3 = 0 \rightarrow x_1 = x_3.$$

تمرین: روابط بالا را به دست آورید.
حال با توجه به اینکه متغیر x_3 می تواند هر مقداری داشته باشد، مجموعه جواب های ما به صورت زیر است:

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_3, -2x_3, x_3) = x_3(1, -2, 1)$$

مثال

- دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$x - 2y + 3z = 0$$

$$3x + y - 2z = 0$$

$$2x - 4y + 6z = 0$$

از روش ساروس به راحتی می بینیم که نتیجه دترمینان ضرایب صفر است:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(1)(6) + (-2)(-2)(2) + 3(3)(-4) - 2(1)(3) - (-4)(-2)(1) - 6(3)(-2) = 0$$

این سه معادله مستقل نیستند.

- تمرین: کلی ترین جواب این دستگاه معادلات را بیابید.



$$x - 2y + 3z = 0$$

$$2x - 4y + 6z = 0$$

$$3x + y + 2z = 0$$

درباره جواب های دستگاه معادلات خطی همگن

• یک ویژگی مهم دستگاه معادلات خطی همگن این است که ”هر مضربی از جواب، خود یک جواب است“. البته می توان با اعمال شرط های بیشتر این مجموعه جواب را محدود کرد. مثلاً در آینده خواهیم دید که یکی از شرط ها می تواند فرض یکه بودن جواب باشد. یعنی اگر بردار $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ جواب باشد، آنگاه اندازه این بردار یک باشد:

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

ولی حتی در این صورت نیز جواب حاصل در یک علامت $\pm$ آزادی دارد.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید روش کرامر برای حل دستگاه معادلات خطی، ویژگی های آن و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ مفهوم هندسی روش کرامر برای حل دستگاه معادلات خطی را توضیح دهید.
- ۲ یک دستگاه دو معادله و دو مجهول بنویسید. جواب کرامر برای این دستگاه را بنویسید.
- ۳ یک دستگاه سه معادله و سه مجهول بنویسید. جواب کرامر برای این دستگاه را بنویسید.
- ۴ یک دستگاه چهار معادله و چهار مجهول بنویسید. جواب کرامر برای این دستگاه را بنویسید.
- ۵ اساس جبری روش کرامر برای پیدا کردن جواب را توضیح دهید.
- ۶ اگر دترمینان دستگاه صفر باشد، درباره تعداد و وجود جواب ها توضیح دهید.
- ۷ اگر دترمینان دستگاه غیرصفر باشد، درباره تعداد و وجود جواب ها توضیح دهید.
- ۸ منظور از وابستگی خطی دو بردار چیست؟ منظور از استقلال خطی یک بردار نسبت به چند بردار دیگر چیست؟
- ۹ رابطه بین دترمینان ضرایب یک دستگاه معادله و استقلال یا وابستگی آن معادلات را توضیح دهید.
- ۱۰ روش کلی یافتن مجموعه جواب ها برای دستگاه خطی تبهگن را توضیح دهید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراوانش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.

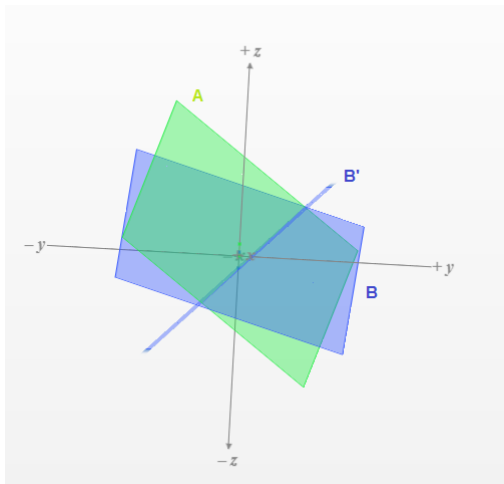


تمرین

- تمرین های موجود در متن درس را پاسخ دهید.
- یک دستگاه دو معادله و دو مجهول بنویسید. جواب کرامر برای این دستگاه را به روش جبری به دست آورید.

مبحث بعدی: روش حذفی گاوس برای حل دستگاه معادلات خطی

در جلسه بعد درباره روش حذفی گاوس برای حل دستگاه معادلات خطی بحث خواهیم کرد.



منابع

- ➊ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ➋ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ➌ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ➍ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ➎ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ➏ <https://math.libretexts.org/>

با سپاس از توجه شما

