

فیزیک الکتریسیته و مغناطیس

فصل سیزدهم: مدارهای جریان متناوب

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در بهار سال ۱۴۰۰ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

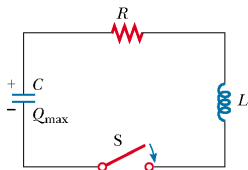
h.shenavar@gmail.com

فصل سیزدهم: مدارهای جریان متناوب

- جریان متناوب
- سه عنصر مجزا در حضور ولتاژ متناوب
- مدار RLC در حضور ولتاژ متناوب



مروری بر مدار RLC و رفتار جواب هایش



معادله حاکم بر مدار RLC به صورت زیر می باشد

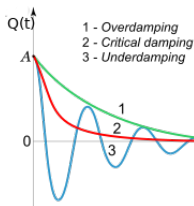
$$L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = 0$$

و جواب کلی این معادله به صورت زیر است:

$$Q(t) = Q_{max} e^{-\frac{Rt}{2L}} \cos(\omega' t + \phi)$$

به شرط اینکه

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

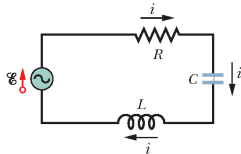
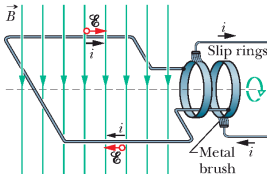


تابع جواب، یعنی $Q(t)$ ، حاصلضرب دو تابع است. نخست، تابع $e^{-\frac{Rt}{2L}}$ که تابعی نزولی از جنس نمایی است و نشان دهنده اتلاف در سیستم (در اثر مقاومت) است. دوم، تابع $\cos(\omega' t + \phi)$ که از جنس هارمونیک است و نشان دهنده رد و بدل انرژی بین خازن (انرژی الکتریکی) و القاگر (انرژی مغناطیسی) است. با توجه به این دو تابع، سه حالت مختلف برای رفتار جواب ها رخ می دهد. شکل پایین را ببینید.

۱- حالت فوق میرایی ($\omega'^2 < 0$): وقتی $R > \sqrt{4L/C}$ این حالت رخ می دهد.۲- حالت میرایی بحرانی ($\omega'^2 = 0$): وقتی $R = \sqrt{4L/C}$ این حالت رخ می دهد. در این حالت هیچ نوسانی رخ نمی دهد.۳- حالت زیر بحرانی ($\omega'^2 > 0$): وقتی $R < \sqrt{4L/C}$ این حالت رخ می دهد. در این حالت چند نوسان داده و سپس نوسان ها کاملاً از بین می روند.البته حالت نوسان های نامیرا نیز وجود دارد که مربوط که وقتی است که مقاومت صفر است: $R = 0$. این همان حالت ایده آل خازن-القاگر است که در بخش قبل به تفصیل بحث شد.

اگر یک باتری انرژی از دست رفته در مدار RLC را جبران کند، نوسان ها نزولی نخواهند بود. در این جلسه تاثیر یک منبع تغذیه متناوب بر مدار RLC را بررسی خواهیم کرد.

جریان متناوب



جریان متناوب (AC) : در این نوع جریان، جهت حرکت حامل های بار به صورت مداوم عوض می شود. جهت جریان در شبکه برق خانگی آمریکای شمالی در هر ثانیه 120° بار عوض می شود (فرکانس 60 هرتز). فرکانس در شبکه برق خانگی ایران (و اکثر کشورهای اروپایی) 50 هرتز می باشد.

فرایند پایه تولید جریان متناوب در شکل مقابل نشان داده شده است. بر این اساس، یک حلقه رسانا در یک میدان مغناطیسی خارجی دوران می کند و در نتیجه، بنا به قانون القای فارادی، جریانی در مدار القا می شود. به خاطر خاصیت دورانی حلقه، نیروی محرکه القایی نوسانی (سینوسی) است:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_m \sin \omega_d t$$

در اینجا $\mathcal{E}(t)$ مقدار نیروی محرکه در هر لحظه از زمان، $\mathcal{E}_m$ بیشینه نیروی محرکه و $\omega_d = 2\pi f = 2\pi/T$ فرکانس زاویه ای نیروی محرکه القایی است.

البته در حالت کلی ممکن است جریان درون حلقه و نیروی محرکه هم فاز نباشند:

$$i(t) = i_m \sin(\omega_d t - \phi)$$

زاویه ϕ را اختلاف فاز جریان و نیروی محرکه می نامند. این اختلاف فاز در حالت کلی می تواند غیر صفر باشد. مثال های زیر را ببینید. علامت منفی قراردادی است.

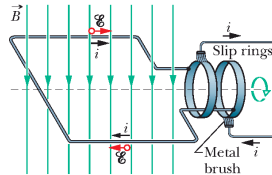
در ادامه این فصل می خواهیم تاثیر نیروی محرکه متناوب $\mathcal{E}(t)$ بر یک مدار RLC را بررسی کنیم. شکل پایین را ببینید.

منظور از حل مساله مدار RLC در حضور نیروی محرکه متناوب $\mathcal{E}(t)$ آن است که با دانستن $\mathcal{E}(t)$ و ویژگی های مدار RLC، مقادیر کمیت های i_m و ϕ را بیابیم.

به علامت نیروی محرکه متناوب در مدار RLC مقابل دقت کنید.

شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی و فرهنگ بریتانیکا.

چرا جریان متناوب؟

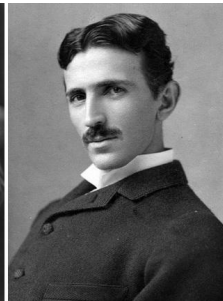
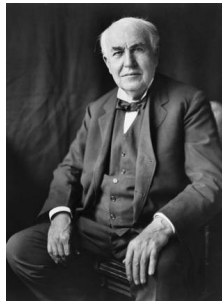


چرا جریان متناوب را استفاده می‌کنیم؟

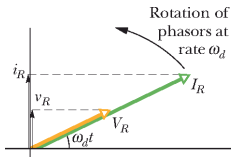
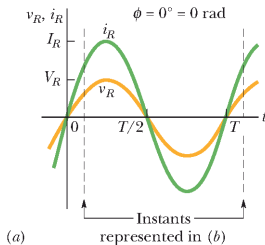
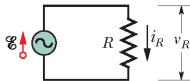
پاسخ: یکی از اصلی‌ترین مزیت‌های جریان‌های متناوب (نسبت به جریان مستقیم) این است که با تغییر جهت (نوسان) جریان، میدان مغناطیسی اطراف رسانا هم نوسان می‌کند. بنابراین، می‌توان از قانون القای فارادی برای افزایش و یا کاهش اندازه اختلاف پتانسیل مورد نیاز استفاده کرد. اینکار توسط دستگاهی به نام مبدل (*transformer*) انجام می‌شود. مزیت دیگر استفاده از جریان‌های متناوب آن است که این نوع جریان‌ها قابلیت تطبیق بالاتری با موتورهای مولدها دارند.

درباره مباحثه ادیسون و تسلا درباره مزیت نسبی جریان الکتریکی متناوب نسبت به جریان الکتریکی مستقیم (مشهور به نبرد جریان‌ها) در جلسه بعد بیشتر توضیح خواهیم داد.

شکل‌ها از مبانی فیزیک هالیدی، فرهنگ بریتانیکا و *tecreview*.



عنصر مقاومتی در حضور ولتاژ متناوب



یک مقاومت که در مداری به نیروی محرکه متناوب متصل است (شکل روبرو) را در نظر بگیرید.
بنا به قانون کیرشهوف، معادله این مدار عبارت است از

$$\mathcal{E} - v_R = 0$$

که در آن $\mathcal{E}$ نیروی محرکه باتری و v_R اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R است. بنابراین،
اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت برابر است با اختلاف پتانسیل دو سر باتری:

$$v_R = \mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega_d t$$

نمودار اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت را در شکل وسط ملاحظه می کنید.

حال با توجه به تعریف مقاومت، می توان جریان گذرنده از مقاومت R را پیدا کرد:

$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{\mathcal{E}_m}{R} \sin \omega_d t = I_R \sin \omega_d t$$

نمودار جریان گذرنده از مقاومت را در شکل وسط ملاحظه می کنید.

لطفاً دقت کنید که در این حالت جریان و ولتاژ هم فاز هستند؛ به این معنی که این دو کمیت با هم
کاهش و افزایش می یابند. شکل وسط را ببینید.

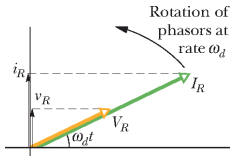
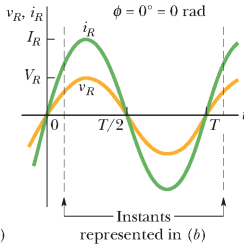
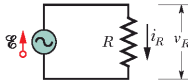
فیزرها (فیزِرها): تحول مقادیر ولتاژ و جریان در هر لحظه از زمان را می توان با استفاده از
بردارهای دوران کننده به نام فیزر نشان داد.

phasor : phase vector

phasor is pronounced as

\ 'fāzə(r) also -,zò(ə)r or -ò(ə) \

ویژگی های فیزرها



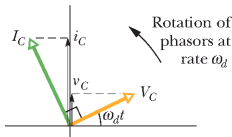
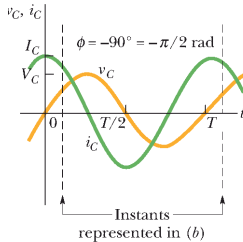
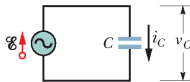
سرعت زاویه ای فیزرها: هر دو فیزر با سرعت زاویه ای برابر ω_d و در جهت پاد ساعتگرد حول مبدا دوران می کنند.

اندازه فیزرها: طول فیزرها نشان دهنده دامنه این کمیت ها، و یا به عبارتی بیشترین مقدار کمیت مورد نظر می باشد. مثلا، طول فیزر ولتاژ بیشترین مقدار این کمیت در یک دوره نوسان آن می باشد.

تصویر فیزرها بر محور: تصویر هر کدام از فیزرها بر محور عمودی نشان دهنده مقدار آن کمیت نوسانی (ولتاژ یا جریان) در یک زمان مشخص است.

زاویه دوران: زاویه دوران در هر لحظه از زمان t برابر است با فاز کمیت نوسانی در آن لحظه از زمان. در شکل روبه رو ولتاژ و جریان دارای فاز برابر هستند و این فاز برابر است با $\omega_d t$ ؛ هرچند، در حالت کلی این کمیت ها می توانند با هم اختلاف فاز داشته باشند. اسلایدهای بعد را ببینید.

عنصر خازنی در حضور ولتاژ متناوب



یک خازن که در مداری با نیروی محرکه متناوب متصل است (شکل روبرو) را در نظر بگیرید. بنا به قانون کیرشهوف، معادله این مدار عبارت است از $\mathcal{E}(t) - v_C(t) = 0$

که در آن $\mathcal{E}$ نیروی محرکه باتری و v_C اختلاف پتانسیل دو سر خازن با ظرفیت C است. بنابراین، اختلاف پتانسیل دو سر خازن برابر است با اختلاف پتانسیل دو سر باتری:

$$v_C(t) = \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_m \sin \omega_d t$$

نمودار اختلاف پتانسیل دو سر خازن را در شکل وسط ملاحظه می کنید.

حال با توجه به تعریف ظرفیت خازن، می توان بار ذخیره شده بر روی صفحات خازن در هر لحظه از زمان را پیدا کرد:

$$q_C(t) = C v_C(t) = C \mathcal{E}_m \sin \omega_d t$$

از اینجا می توان جریان گذرنده از مدار را یافت:

$$i(t) = \frac{d}{dt} q_C(t) = C \frac{d}{dt} v_C(t) = C \mathcal{E}_m \frac{d}{dt} \sin \omega_d t = C \mathcal{E}_m \omega_d \cos \omega_d t$$

کمیت $X_C = \frac{1}{C \omega_d}$ را مقاومت خازنی (capacitive reactance) می نامند. این کمیت دقیقاً از جنس مقاومت است و واحد آن هم اهم می باشد (تمرین: نشان دهید که بعد مقاومت خازنی و مقاومت یکسان است). $v_C(t) = i_C(t) X_C$

نمودار جریان گذرنده از مدار را در شکل وسط ملاحظه می کنید.

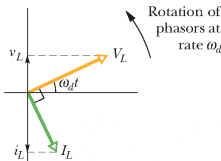
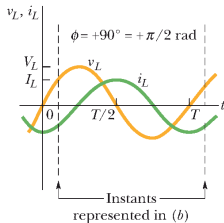
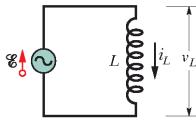
دقت کنید که در این حالت جریان و ولتاژ به اندازه ۹۰ درجه با هم اختلاف فاز دارند زیرا

$$\cos \omega_d t = \sin\left(\omega_d t + \frac{\pi}{2}\right)$$

بنابراین وقتی جریان بیشینه می شود، ولتاژ کمینه است و برعکس. شکل وسط را ببینید.

نمودار فیزیکی این مدار را در شکل پایین می بینید. دقت کنید که جریان به اندازه ۹۰ درجه نسبت به ولتاژ تقدم فاز دارد.

عنصر القایی در حضور ولتاژ متناوب



یک القاگر که در مداری با نیروی محرکه متناوب وصل است (شکل روبرو) را در نظر بگیرید. بنا به قانون کیرشهوف، معادله این مدار عبارت است از $\mathcal{E}(t) - v_L(t) = 0$

که در آن $\mathcal{E}$ نیروی محرکه باتری و v_L اختلاف پتانسیل دو سر القاگر با القاییدگی L است. بنابراین، اختلاف پتانسیل دو سر القاگر برابر است با اختلاف پتانسیل دو سر باتری:

$$v_L(t) = \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_m \sin \omega_d t$$

نمودار اختلاف پتانسیل دو سر القاگر را در شکل وسط ملاحظه می کنید.

از طرفی اختلاف پتانسیل دو سر القاگر بنا به تعریف القاییدگی برابر است با

$$v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} \Rightarrow L \frac{di_L}{dt} = \mathcal{E}_m \sin \omega_d t$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه اخیر می توان جریان گذرنده از القاگر را پیدا کرد:

$$i_L(t) = \int di_L = \frac{\mathcal{E}_m}{L} \int \sin \omega_d t dt = -\frac{\mathcal{E}_m}{L\omega_d} \cos \omega_d t$$

کمیت $X_L = L\omega_d$ را مقاومت القایی (inductive reactance) می نامند. این کمیت دقیقاً از جنس مقاومت است و واحد آن هم اهم می باشد (تمرین: نشان دهید که بعد مقاومت القایی و

مقاومت یکسان است.): $v_L(t) = i_L(t) X_L$. نمودار جریان گذرنده از مدار را در شکل وسط ملاحظه می کنید.

دقت کنید که در این حالت جریان و ولتاژ به اندازه ۹۰ درجه با هم اختلاف فاز دارند زیرا

$$-\cos \omega_d t = \sin(\omega_d t - \frac{\pi}{2})$$

بنابراین وقتی جریان بیشینه می شود، ولتاژ کمینه است و برعکس. شکل وسط را ببینید.

نمودار فیزیکی این مدار را در شکل پایین می بینید. دقت کنید که جریان به اندازه ۹۰ درجه نسبت به ولتاژ تاخیر فاز دارد.

مدار RLC در حضور ولتاژ متناوب؛ تحلیل فیزیکی (نموداری، برداری)

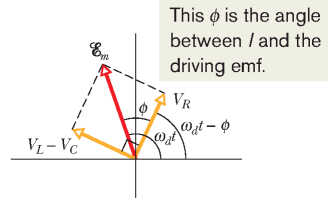
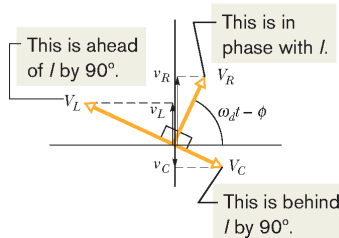
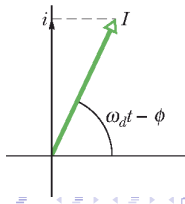
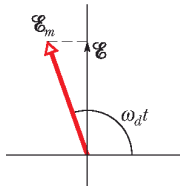
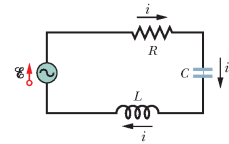
هدف اصلی بحث امروز: حل مسأله مدار RLC در حضور نیروی محرکه متناوب $\mathcal{E}(t)$ ؛ یعنی با دانستن $\mathcal{E}(t)$ و ویژگی های مدار RLC، مقادیر کمیت های i_m و ϕ را بیابیم.

به مراحل زیر برای پیدا کردن جواب دقت کنید.

ولتاژ متناوب $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_m \sin \omega_d t$ اعمال می شود. نموداری فیزیکی این ولتاژ را در شکل سمت چپ، وسط، می بینید.

در حالت کلی جریان درون حلقه و نیروی محرکه هم فاز نیستند: $i(t) = i_m \sin(\omega_d t - \phi)$. شکل سمت چپ، پایین را ببینید. دقت کنید که جریان در سرتاسر این مدار سری مقدار یکسانی دارد.

بنا به مباحث قبل، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت با جریان هم فاز است، اختلاف پتانسیل دو سر القاگر 90° درجه نسبت به جریان تقدم دارد، اختلاف پتانسیل دو سر خازن 90° درجه نسبت به جریان تاخیر دارد. شکل پایین، سمت چپ، را ببینید. حال می توانیم مقادیر کمیت های i_m و ϕ را بیابیم. اسلاید بعد را ببینید. به اهمیت روش دکارت در تجزیه مسائل به مسائل ساده تر دقت کنید.



مدار RLC در حضور ولتاژ متناوب؛ تحلیل فیزیکی (نموداری، برداری)

هدف اصلی بحث امروز: حل مسأله مدار RLC در حضور نیروی محرکه متناوب $\mathcal{E}(t)$ ؛ یعنی با دانستن

$\mathcal{E}(t)$ و ویژگی های مدار RLC، مقادیر کمیت های i_m و ϕ را بیابیم:
در مثلث قائم الزاویه پایین، سمت راست، داریم:

حال از آنجا که جریان و ولتاژ در هرکدام از اجزاء را می دانیم (بنا به اسلایدهای قبل) داریم:

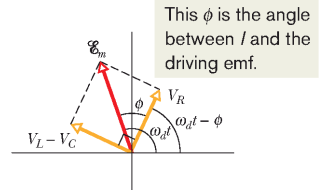
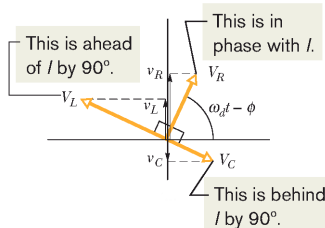
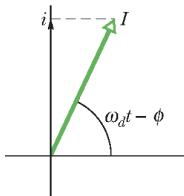
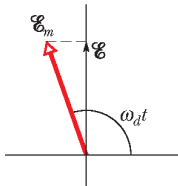
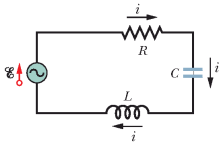
$$\mathcal{E}_m = (i_m R)^2 + ((i_m X_L - i_m X_C))^2$$

$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

و یا

به همین صورت می توان ثابت فاز ϕ را یافت: $\tan \phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{IX_L - IX_C}{IR}$. و یا

$$\tan \phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{L\omega_d - \frac{1}{C\omega_d}}{R}$$



مقاومت ظاهری (امپدانس) و شرط تشدید

کمیت زیر را مقاومت ظاهری (امپدانس *impedance*) مدار RLC می نامند:

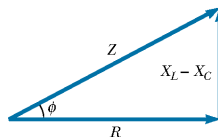
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega_d - \frac{1}{C\omega_d}\right)^2}$$

شکل زیر مثلث امپدانس را نشان می دهد.

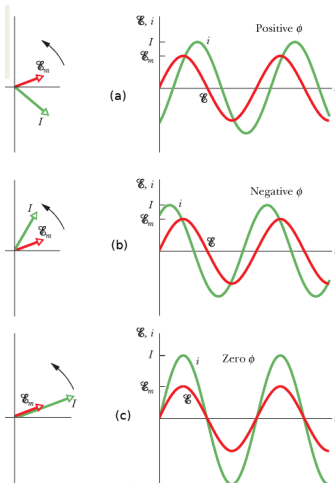
اگر $X_L > X_C$ می گوئیم که مدار بیشتر خاصیت القایی دارد. در این حالت ثابت فاز ϕ مثبت است و بنابراین فیزر جریان نسبت به ولتاژ تاخیر دارد. شکل (a) را ببینید.

اگر $X_L < X_C$ می گوئیم که مدار بیشتر خاصیت خازنی دارد. در این حالت ثابت فاز ϕ منفی است و بنابراین فیزر جریان نسبت به ولتاژ تقدم دارد. شکل (b) را ببینید.

اگر $X_L = X_C$ می گوئیم که مدار در حالت تشدید است. اسلاید بعد را ببینید. در این حالت ثابت فاز ϕ صفر است و بنابراین فیزر جریان و ولتاژ با هم دوران می کنند (هم فاز هستند). شکل (c) را ببینید. در این حالت مدار کمترین امپدانس را دارد.



شکل ها از مبانی هالیدی، ویرایش دهم



منحنی تشدید

در حالت تشدید، دامنه جریان بیشینه است (چون مقاومت کمینه می شود). بنا به شرط تشدید داریم:

$$X_L = X_C \Rightarrow L\omega_d - \frac{1}{C\omega_d} \Rightarrow \omega_d = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

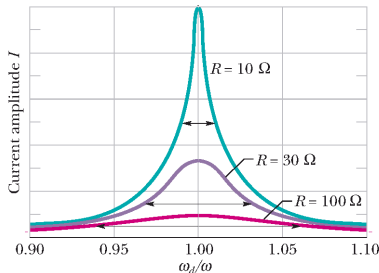
از آنجا که فرکانس زاویه ای طبیعی مدار RLC هم برابر $1/\sqrt{LC}$ می باشد، بیشینه جریان وقتی رخ می دهد که فرکانس زاویه ای منبع تغذیه با فرکانس طبیعی مدار برابر شود. این حالت را تشدید (resonance) می نامند. بنابراین، در یک مدار RLC تشدید وقتی رخ می دهد که:

$$\omega_d = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow \text{resonance}$$

شکل مقابل را ببینید. مدار شامل القاگری با القابدگی $L = 100 \mu H$ و خازنی با ظرفیت $C = 100 pF$ می باشد. این مدار را برای سه مقاومت متفاوت میبندیم و ملاحظه می کنیم که در هر سه مورد پدیده تشدید (بیشینه دامنه جریان) در فرکانس زاویه ای طبیعی برابر $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{100 \mu H \times 100 pF}}$ رخ می دهد. دقت کنید که برای رسیدن به حالت تشدید، به هیچ عنوان لازم نیست که مقادیر بنیادی مدار، یعنی مقادیر RLC را تغییر دهیم بلکه لازم است که کاری کنیم که فرکانس زاویه ای منبع تغذیه ω_d و فرکانس زاویه ای طبیعی مدار برابر شوند. یعنی $\omega_d/\omega = 1$. فیلم های مربوطه را ببینید.

دقت کنید که بیشینه جریان با افزایش مقاومت کاهش می یابد.

همچنین، پهنای منحنی تشدید با افزایش مقاومت افزایش می یابد.



فیزیک تشدید در مدار RLC

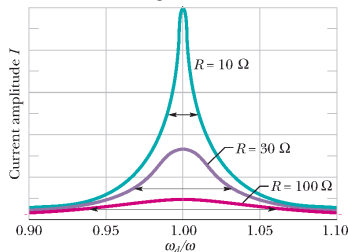
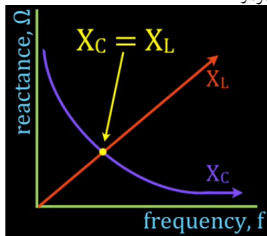
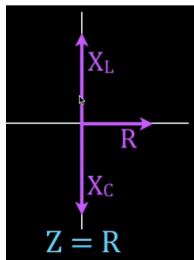
چه اتفاقی رخ می دهد؟

برای اینکه بفهمیم تشدید چطور رخ می دهد، فرض کنید که فرکانس مولد در ابتدا بسیار کوچکتر از فرکانس طبیعی مدار است. برای مقادیر کم ω مقدار مقاومت القایی X_L کوچک است ولی مقاومت خازنی X_C بزرگ است. بنابراین مدار بیشتر خازنی است، امپدانس بزرگ است و بنابراین جریان کوچک است.

حال فرکانس مولد را افزایش می دهیم؛ همچنان X_C غالب است ولی با افزایش فرکانس مولد، کمیت X_C شروع به کاهش می کند در حالی که X_L افزایش می یابد. کاهش X_C باعث می شود که امپدانس کاهش یافته و بنابراین جریان افزایش یابد. در حالت تشدید مقادیر X_L و X_C با هم برابر می شوند، امپدانس کمینه شده و بنابراین جریان بیشینه می شود.

اگر باز هم فرکانس را افزایش دهیم، خاصیت القایی مدار غالب شده و امپدانس افزایش می یابد. در نتیجه جریان کاهش پیدا می کند.

در مجموع، در قسمت کم فرکانس نمودار تشدید، عنصر خازنی غالب است، در قسمت فرکانس بالای نمودار تشدید، عنصر القایی غالب است و در وسط نیز حالت تشدید رخ می دهد.



فیزیک تشدید در مکانیک



چه اتفاقی می افتد اگر فرد تاب سوار را با آهنگ منظمی، برابر با آهنگ حرکت تاب، هل دهیم؟ فیلم را ببینید.

چه اتفاقی می افتد اگر یک پل با آهنگ طبیعی اش تحریک شود؟ فیلم را ببینید.

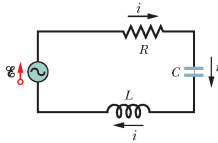
پیام مهم پدیده تشدید: همه اشیاء در حال نوسان با یک فرکانس مشخصه هستند. اگر هرکدام از این اشیاء را با فرکانس مشخصه شان تحریک کنیم، آنگاه پدیده تشدید رخ می دهد.

پدیده تشدید را می توان به صورت کنترل شده در دستگاه ها استفاده کرد و از نتایج آن بهره برد. ولی رخدادهای خارج از کنترل تشدید می توانند کاملاً ویرانگر باشند.

فلزیاب های فرودگاه علی الاصول یک مدار تشدید می هستند. وقتی شما قدم به درون این فلزیاب می گذارید، عملاً جزوی از مدار مورد نظر می شوید. در نتیجه حضور شما القاییدگی مدار تغییر می کند و بنابراین جریان مدار عوض می شود. فرکانس مدار با فرکانس طبیعی آن کوک شده است البته برای وقتی که فلزی در القاگر حضور نداشته باشد. وجود هرگونه فلز به همراه فرد باعث می شود که القاییدگی موثر مدار افزایش یابد و بنابراین جریان مدار تغییر می کند. و بعد بیسیپیپ!



مدار RLC در حضور ولتاژ متناوب؛ تحلیل مثلثاتی



هدف اصلی بحث امروز (روش دوم حل مساله): حل مساله مدار RLC در حضور نیروی محرکه متناوب $\mathcal{E}(t)$ ؛ یعنی با دانستن $\mathcal{E}(t)$ و ویژگی های مدار RLC، مقادیر کمیت های i_m و ϕ را بیابیم.

با استفاده از قوانین کیرشهوف داریم: $\mathcal{E}_m = V_R + V_L + V_C$

حال از آنجا که جریان و ولتاژ در هرکدام از اجزاء را می دانیم (بنا به اسلایدهای بخش قبل) داریم:

$$\mathcal{E}_m \sin \omega_d t = i_m R \sin(\omega_d t - \phi)$$

$$+ i_m X_L \sin(\omega_d t - \phi + \pi/2) + i_m X_C \sin(\omega_d t - \phi - \pi/2)$$

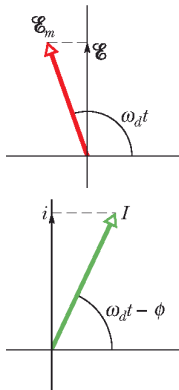
دو طرف تساوی بالا فقط در حالتی با هم برابر خواهند بود که

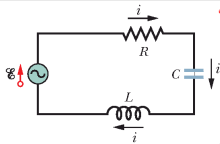
$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

و ثابت فاز ϕ هم به صورت مقابل باشد: $\tan \phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{IX_L - IX_C}{IR}$ و یا

$$\tan \phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{L\omega_d - \frac{1}{C\omega_d}}{R}$$

تمرین: ادعای بالا را اثبات کنید.



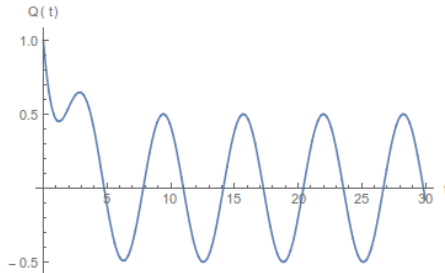
مدار RLC در حضور ولتاژ متناوب؛ تحلیل از طریق معادلات دیفرانسیل

هدف اصلی بحث امروز (روش سوم حل مساله): حل مساله مدار RLC در حضور نیروی محرکه متناوب $\mathcal{E}(t)$ ؛ یعنی با دانستن $\mathcal{E}(t)$ و ویژگی های مدار RLC ، مقادیر کمیت های i_m و ϕ را بیابیم.

معادله حاکم بر مدار RLC واداشته به صورت زیر می باشد

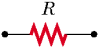
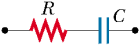
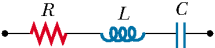
$$L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = \mathcal{E}_m \sin \omega_d t$$

واقعیت این است که این روش دقیق ترین جواب را به دست می دهد زیرا علاوه بر جواب طولانی مدت مدار، جواب کوتاه مدت ابتدایی را نیز به دست خواهد داد. جواب اولیه نزولی است (بحث جلسه قبل) و پس از مدتی محو می شود. جواب کوتاه مدت از جواب عمومی معادله دیفرانسیل همگن نتیجه می شود در حالی که جواب بلندمدت از جواب خصوصی معادله دیفرانسیل غیرهمگن به دست می آید. شکل زیر را ببینید. بررسی دقیق این مساله خارج از بحث کتاب حاضر است ولی می توانید جواب دقیق را در درس معادلات دیفرانسیل خود جویا شوید (و یا انتهای فصل سوم کتاب معادلات دیفرانسیل بویس-دیپرما را ببینید).



جمع بندی روابط این جلسه

TABLE 33.1 Impedance Values and Phase Angles for Various Circuit-Element Combinations^a

Circuit Elements	Impedance Z	Phase Angle ϕ
	R	0°
	X_C	-90°
	X_L	$+90^\circ$
	$\sqrt{R^2 + X_C^2}$	Negative, between -90° and 0°
	$\sqrt{R^2 + X_L^2}$	Positive, between 0° and 90°
	$\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$	Negative if $X_C > X_L$ Positive if $X_C < X_L$

^a In each case, an ac voltage (not shown) is applied across the elements.

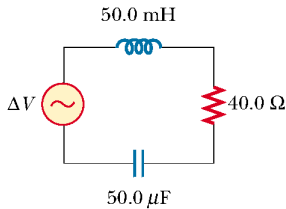
نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید ویژگی های مهم رفتار مدارهای RLC تحت جریان متناوب را بیان کنید. برای اینکار لازم است بتوانید به سوال های زیر پاسخ دهید:

۱. جریان متناوب چیست؟ فرکانس معمول جریان متناوب برق شهری در ایران چقدر است؟
 ۲. دلایل مزیت نسبی استفاده از جریان متناوب، نسبت به جریان مستقیم، را بیان کنید.
 ۳. فرآیند تولید جریان متناوب را به اختصار توضیح دهید. کدام یک از قوانین ماکسول پایه چنین عملی است؟
 ۴. ویژگی های اصلی فیزرها را بیان کنید.
 ۵. اگر یک مقاومت را به ولتاژ متناوب وصل کنیم، آنگاه فیزرهای ولتاژ و جریان چه رفتاری خواهند داشت؟
 ۶. اگر یک خازن را به ولتاژ متناوب وصل کنیم، آنگاه فیزرهای ولتاژ و جریان چه رفتاری خواهند داشت؟
 ۷. اگر یک القاگر را به ولتاژ متناوب وصل کنیم، آنگاه فیزرهای ولتاژ و جریان چه رفتاری خواهند داشت؟
 ۸. تعاریف مربوط به مقاومت خازنی و مقاومت القایی، و واحد و ابعاد آن دو، را بنویسید.
 ۹. قانون کیرشهوف برای یک مدار سری RLC متصل به منبع تغذیه متناوب را بنویسید.
 ۱۰. نمودار فیزی را برای یک مدار سری RLC متصل به منبع تغذیه متناوب رسم کنید.
 ۱۱. روابط مربوط به جریان بیشینه و اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ را برای یک مدار سری RLC متصل به منبع تغذیه متناوب را بنویسید.
 ۱۲. امپدانس چیست؟ رابطه آن را بنویسید. مثلث امپدانس را رسم کنید.
 ۱۳. کدام مدارهای RLC بیشتر خاصیت القایی (و یا خازنی) دارند؟
 ۱۴. شرط تشدید در مدارهای RLC متصل به منبع تغذیه متناوب چیست؟ جریان مدار در حالت تشدید چه رفتاری از خود نشان می دهد؟
 ۱۵. فرم کلی منحنی تشدید در مدارهای RLC متصل به منبع تغذیه متناوب را رسم کرده و ویژگی های این منحنی را بیان کنید.
 ۱۶. فرکانس مشخصه سیستم های فیزیکی از چه جهت هایی اهمیت دارد؟ فلزیاب فروگاهها چطور کار می کند؟
 ۱۷. تحلیل دیفرانسیلی مدارهای RLC متصل به منبع تغذیه متناوب از چه جهتی به تحلیل فیزی و تحلیل مثلثاتی برتری دارد؟
- اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.
- فراموش نکنیم که بهترین راه برای جذب مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوال زیر محک زده و تقویت کنید.



تمرین



منبع ولتاژ در شکل مقابل ولتاژی برابر

$$\Delta V_{rms} = 100 \text{ V}$$

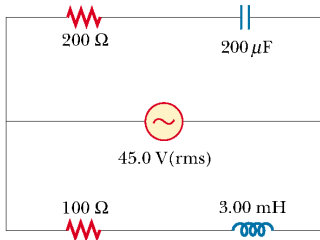
و فرکانس زاویه ای برابر

$$\omega = 1000 \text{ rad/s}$$

را دارا می باشد. جریان در مدار و اختلاف فاز بین
جریان و ولتاژ را تعیین کنید.

شکل از مبانی فیزیک هالیدی.

تمرین



الف) قوانین کیرشهوف را برای مدار زیر نوشته و جریان در هرکدام از شاخه های مدار را بیابید.

ب) وقتی فرکانس منبع بسیار بزرگ باشد (نسبت به فرکانس طبیعی مدار)، جریان در هر شاخه چگونه است؟

پ) وقتی فرکانس منبع بسیار کوچک باشد (نسبت به فرکانس طبیعی مدار)، جریان در هر شاخه چگونه است؟

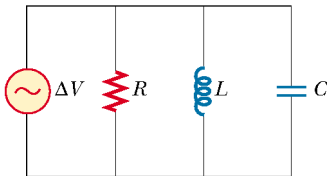
شکل از مبانی فیزیک هالیدی.

تمرین

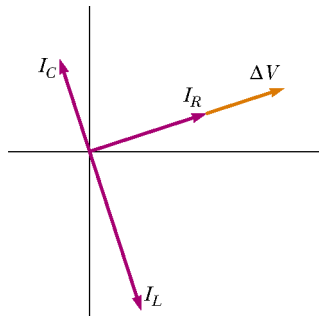
$$I_{rms} = \Delta V_{rms} \left[\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\tan \phi = R \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)$$

در مدار موازی زیر، ولتاژ در همه شاخه ها هم فاز می باشد و ولتاژ همچنین با جریان گذرنده از مقاومت نیز هم فاز است. نمودار فیزیکی نیز در شکل آمده است. روابط مقابل را اثبات کنید. نکته: تعریف دقیق I_{rms} و ΔV_{rms} را در جلسه آینده خواهیم دید.



شکل از مبانی فیزیک هالیدی.



توان در جریان متناوب و مبدل ها

در جلسه بعد درباره توان منتقل شده در مدارهای جریان متناوب و همچنین فیزیک مبدل ها بحث خواهیم کرد.



شکل ها از میانی هالیدی.

مراجع

- ❶ Halliday, D., R. Resnick, and K. S. Krane. "Physics, 5th edn." (2002).
- ❷ Halliday, David, Robert Resnick, and Jearl Walker; Fundamentals of physics, 10th edn. John Wiley & Sons, 2014.
- ❸ Ohanian, Hans C., and John T. Markert. Physics for engineers and scientists, 3th edn. 2007.
- ❹ Young, Hugh D., Roger A. Freedman, and Albert Lewis Ford. Sears and Zeman-sky's university physics, 13th edn. Pearson education, 2006.



با سپاس از توجه شما