

فیزیک مکانیک

فصل یازدهم: غلتش، گشتاور و تکانه زاویه ای

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در تابستان سال ۱۴۰۰ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

- ۱ فصل یازدهم: غلتش، گشتاور و تکانه زاویه ای
- تکانه زاویه ای و شکل دورانی قانون دوم نیوتن
- تکانه زاویه ای جسم صلب
- پایداری تکانه زاویه ای

آنچه گذشت...

- قوانین حرکت:
یکی از راه های نوشتن قوانین حرکت، استفاده از سه قانون حرکت نیوتن است. این شکل از علم مکانیک کلاسیک را مکانیک نیوتنی می نامند. نوشتن قوانین مکانیک به شکل های دیگر، مانند مکانیک لاگرانژی، هامیلتونی و ... هم ممکن است.
ما در این کتاب مکانیک نیوتنی را بررسی خواهیم کرد.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

قانون کولن برای دو بار نقطه ای:

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

قانون هوک برای جرم متصل به فنر

$$F = -kx$$

نیروی عمودی سطح، کشش نخ، نیروی ارشمیدس و ...

این دو دسته قانون، طیف بسیار گسترده ای از پدیده های فیزیکی را به درستی توضیح می دهند.

قانون اول: وقتی برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر باشد، جسم حالت حرکت خود را حفظ خواهد کرد. یعنی اگر ساکن باشد، ساکن خواهد ماند و اگر با سرعت در حال حرکت باشد، با همان سرعت به حرکت خود ادامه خواهد داد.

قانون دوم: رابطه شتاب و نیرو

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

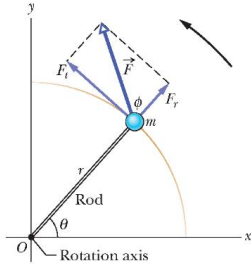
قانون سوم نیوتن: هر عملی را عکس العملی است، با مقدار مساوی و در جهت خلاف آن

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

قوانین نیوتن فقط در دستگاه های لخت برقرار هستند.

پرش: حرکت یک جسم صلب (یک نوع خاص از سیستم ذره که در آن فاصله ذرات تغییر نمی کند) چگونه است؟

رابطه بین گشتاور و شتاب زاویه ای- مورد جسم صلب



برای پیدا کردن رابطه بین گشتاور و شتاب زاویه ای در یک جسم صلب کلی، جسم صلب مورد نظر را به تعداد زیادی جرم دیفرانسیلی dm تجزیه می کنیم.

برای جرم دیفرانسیلی dm در شکل داریم:

$$dF_t = dm a_t$$

یعنی نیروی دیفرانسیلی در جهت مماسی برابر است با جرم دیفرانسیلی ضربدر شتاب در جهت مماسی. از طرفی گشتاور وارده از طرف این نیرو برابر است با

$$d\tau = r dF_t = dm a_t r = dm (\alpha r) r = (r^2 dm) \alpha = dI \alpha$$

اگر جسم فقط در صفحه xy دوران کند، آنگاه گشتاورهای دیفرانسیلی به راحتی با هم جمع می شوند:

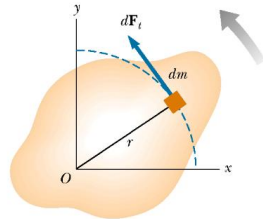
$$\vec{\tau}_{tot} = \int d\vec{\tau} = \vec{\alpha} \int r^2 dm = I \vec{\alpha}$$

پرسش: چرا شتاب زاویه ای می تواند از انتگرال خارج شود؟

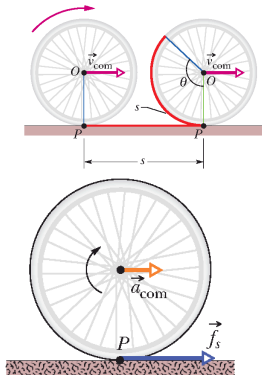
شکل دورانی قانون دوم نیوتن:

$$\sum \vec{\tau} = I \vec{\alpha}$$

شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش های هشتم و دهم.



انرژی جنبشی در غلتش



می خواهیم حرکت همزمان انتقالی و دورانی جسم را بررسی کنیم.

شرط لازم برای اینکه جسم بدون آنکه بلغزد، غلتش کند، آن است که فاصله طی شده توسط مرکز جرم جسم با طول کمان طی شده بر روی چرخ در حرکت دورانی برابر باشد:

$$s = R\theta$$

از اینجا می توان، با محاسبه آهنگ تغییرات طرفین رابطه بالا، شرط سینماتیکی حرکت دورانی را نیز به دست آورد:

$$v_{com} = R\omega$$

در اینجا v_{com} سرعت مرکز جرم چرخ و ω سرعت زاویه ای آن است.

حال می توان رابطه بین اندازه شتاب خطی و زاویه ای را با دوبرار مشتق گیری از شرط حرکت غلتش بدون لغزش (یعنی $s = R\theta$) به راحتی به دست آورد:

$$a_{com} = R\alpha$$

اگر نیروی کل وارد شده به چرخ باعث شود که چرخ بلغزد، آنگاه یک حرکت نسبی در نقطه P بین پایین ترین نقطه چرخ و زمین وجود دارد؛ یعنی نیروی اصطکاک بین زمین و چرخ جنبشی خواهد بود.

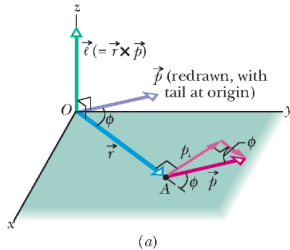
انرژی جنبشی کل چرخ در حال غلتش برابر است با

$$K = \frac{1}{2} I_{com} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{com}^2$$

یعنی، انرژی جنبشی کل یک چرخ در حال دوران برابر است با انرژی جنبشی دورانی چرخ حول مرکز جرم به علاوه انرژی جنبشی انتقالی مرکز جرم.

شکل ها از ویرایش دهم مبانی هالیدی.

تکانه زاویه ای



تعریف تکانه خطی ذره (یادآوری): $\vec{p} = m\vec{v}$

اندازه حرکت زاویه ای: فرض کنید که ذره ای به جرم m و اندازه حرکت خطی (تکانه خطی) $\vec{p} = m\vec{v}$ در حال حرکت در صفحه xy می باشد. شکل مقابل را ببینید. در این حالت، تکانه زاویه ای این ذره نسبت به محور O یک کمیت برداری است که توسط رابطه زیر تعریف می شود:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

در اینجا $\vec{r}$ بردار مکان ذره نسبت به محور گذرنده از نقطه O می باشد. توجه کنید که جهت این بردار توسط قاعده دست راست تعیین می شود (برای مرور این قاعده به فصل سوم و یا فصل قبل مراجعه کنید). همچنین، اندازه این بردار برابر است با:

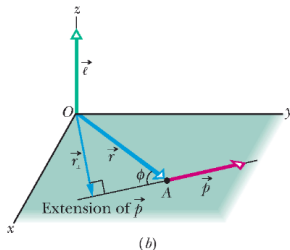
$$l = rmv \sin \phi$$

به علاوه می توان با استفاده از مولفه عمود تکانه بر بردار موقعیت، یعنی $p_{\perp}$ ، اندازه بردار تکانه را به صورت زیر هم نوشت:

$$l = rp_{\perp} = rmv_{\perp}$$

و یا با استفاده از مولفه عمود بردار موقعیت ذره بر بردار تکانه، یعنی $r_{\perp}$ ، می توان نوشت:

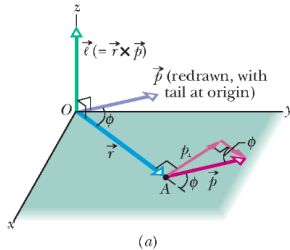
$$l = r_{\perp}p = r_{\perp}mv$$



در ادامه، در ابتدا شکل دورانی قانون دوم نیوتن را با استفاده از مفهوم تکانه (اندازه حرکت) زاویه ای بازنویسی خواهیم کرد. سپس، قضیه پایستگی تکانه زاویه ای را بیان و اثبات خواهیم کرد. این قضیه، به همراه قضیه پایستگی تکانه خطی (فصل نهم)، اهمیت بسیار زیادی در فهم پدیده های فیزیکی دارند.

شکل ها از ویرایش دهم مبانی هالیدی.

بازنویسی شکل دورانی قانون دوم نیوتن



قانون دوم نیوتن با استفاده از تکانه خطی ذره (یادآوری): مجموع نیروهای وارده بر یک ذره برابر است با آهنگ تغییر در تکانه خطی آن
$$\vec{F}_{tot} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

به همین صورت می توان شکل دورانی قانون دوم نیوتن را با استفاده از تکانه زاویه ای ذره بازنویسی کرد.

شکل دورانی قانون دوم نیوتن با استفاده از تکانه زاویه ای ذره: مجموع گشتاورهای وارده بر یک ذره برابر است با آهنگ تغییر در تکانه زاویه ای آن
$$\vec{\tau}_{tot} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

اثبات: با محاسبه آهنگ تغییر در تکانه زاویه ای داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} (m\vec{r} \times \vec{v}) = m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = m (\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a}) \\ &= \vec{r} \times (m\vec{a}) = \vec{r} \times \vec{F}_{tot} = \vec{r} \times \sum \vec{F}_i = \sum \vec{r} \times \vec{F}_i = \sum \vec{\tau}_i = \vec{\tau}_{tot} \end{aligned}$$

که همان نتیجه مورد نظر است. بدیهی است که $\vec{r}$ و $\vec{L}$ باید نسبت به یک محور اندازه گیری شوند.

تمرین: برای ذره ای به جرم دو کیلوگرم که بردار موقعیت آن به صورت

$$\vec{r} = (3t^3 + 4t)\hat{i} - (\Delta t - 2t^2)\hat{j} - \Delta t k\hat{k}$$

با زمان تغییر می کند،

(الف) بردار سرعت لحظه ای را بیابید.

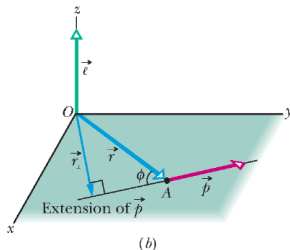
(ب) بردار تکانه خطی را بیابید.

(پ) بردار تکانه زاویه ای را بیابید.

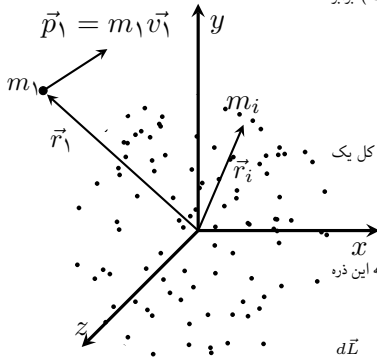
(ت) گشتاور کل وارده بر این ذره را بیابید.

این محاسبات را در زمان دلخواه t انجام دهید.

شکل ها از ویرایش دهم مبانی هالیدی.



تکانه زاویه ای سیستم ذرات



تکانه زاویه ای کل یک سیستم ذره حول یک مرکز مشخص (مثلاً مبدا مختصات) برابر است با مجموع برداری تکانه زاویه ای تک تک ذرات:

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \dots + \vec{l}_i + \dots + \vec{l}_n = \sum_i^n \vec{l}_i$$

در اینجا $\vec{l}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$ تکانه زاویه ای ذره i ام است.

می توان به راحتی اثبات کرد که آهنگ تغییر در اندازه حرکت (تکانه) زاویه ای کل یک سیستم ذره برابر است با مجموع گشتاورهای وارد شده به آن سیستم؛ یعنی

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i^n \vec{\tau}_{tot,i} = \vec{\tau}_{tot}$$

که در آن $\vec{\tau}_{tot,i}$ گشتاور کل وارد شده به ذره i ام توسط همه نیرویهای وارد شده به این ذره است.

اثبات:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \dots + \vec{l}_i + \dots + \vec{l}_n)$$

$$= \vec{\tau}_{tot,1} + \vec{\tau}_{tot,2} + \dots + \vec{\tau}_{tot,i} + \dots + \vec{\tau}_{tot,n} = \sum_i^n \vec{\tau}_{tot,i} = \vec{\tau}_{tot}$$

پایان اثبات.

در ادامه حالت بسیار خاص و ساده ای از سیستم ذره (جسم صلب دوران کننده حول یک محور ثابت) را در نظر خواهیم گرفت. موارد پیچیده تر خارج از محدوده مورد نظر درس فیزیک یک است.

تکانه زاویه ای یک جسم صلب حول یک محور ثابت

فرض کنید جسم صلبی حول یک محور ثابت با سرعت زاویه ای ω دوران می کند. این محور را z می نامیم. شکل روبرو را ببینید.

می خواهیم تکانه زاویه ای کل این جسم در حین دوران حول محور z را بیابیم. با توجه به اسلاید قبل، می دانیم که تکانه زاویه ای کل برابر است با مجموع تکانه زاویه ای تک تک اجزاء سیستم. بنابراین، این جسم صلب را به المان های بسیار کوچک Δm_i تجزیه کرده و تکانه زاویه ای هر جزء را برآورد می کنیم. دقت کنید که ذره Δm_i بر روی یک مسیر دایروی حرکت می کند و بردار سرعت این ذره بر بردار موقعیت ذره همیشه عمود است: $\vec{r}_i \perp \vec{v}_i$ (چرا؟!): بنابراین:

$$l_i = r_i p_i \sin \pi/2 = r_i \Delta m_i v_i$$

بردار تکانه زاویه ای l_i این ذره در حالت کلی سه مولفه دارد؛ هرچند ما فقط به مولفه این بردار در راستای محور دوران z علاقمند هستیم. با توجه به شکل پایین می توان این مولفه را برای ذره مورد نظر به صورت زیر به دست آورد:

$$l_{iz} = l_i \sin \theta = (r_i \sin \theta) (\Delta m_i v_i) = r_{\perp i} (\Delta m_i v_i) = r_{\perp i} (\Delta m_i \omega r_{\perp i})$$

حال می توان سهم تکانه زاویه ای باقی ذرات را نیز پیدا کرده و با هم جمع کرد تا تکانه زاویه ای کل در راستای محور دوران، یعنی z ، به صورت زیر پیدا شود:

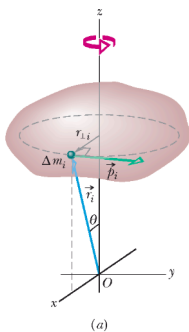
$$L_z = \sum_i l_{iz} = \sum_i \Delta m_i v_i r_{\perp i} = \sum_i \Delta m_i (\omega r_{\perp i}) r_{\perp i} = \omega \left(\sum_i \Delta m_i r_{\perp i}^2 \right)$$

کمیت داخل پرانتز در آخرین عبارت سمت راست، لختی دورانی جسم حول محور z را نشان می دهد.

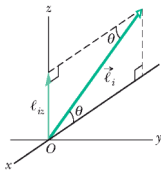
بنابراین برای یک جسم صلب که حول یک محور ثابت مثل z با سرعت زاویه ای ω دوران می کند، می توان نوشت:

$$L = I\omega$$

شکل ها از ویرایش دهم مبانی هالیدی.

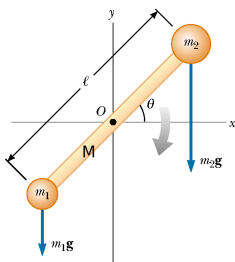


(a)



(b)

مثال: تکانه زاویه ای، شتاب زاویه ای و گشتاور وارده بر یک جسم صلب



سیستم مقابل، با اجرام و طول مشخص شده در شکل، را در نظر بگیرید. فرض کنید که این سیستم می تواند آزادانه حول محورش دوران کند. فرض کنید سیستم، در زمان مشخصی، در حال دوران با سرعت زاویه ای ω می باشد. الف) تکانه زاویه ای سیستم را بیابید. ب) شتاب زاویه ای سیستم را، وقتی که میله با راستای افق در زاویه θ قرار دارد، بیابید.

پاسخ الف: تکانه زاویه ای کل یک سیستم برابر است با مجموع تکانه زاویه ای تک تک اجزاء سیستم. همچنین، بنا به اسلاید قبل، برای پیدا کردن تکانه زاویه ای کل یک سیستم صلب باید لختی دورانی آن را حول محور دوران حساب کنیم. لختی دورانی سیستم صلب مقابل حول محور دوران برابر است با:

$$I = \sum_i^n m_i r_{\perp i}^2 = \frac{1}{12} M l^2 + m_1 \left(\frac{l}{2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{l}{2} \right)^2$$

به علاوه، از آنجا که همه اجزا با یک سرعت زاویه ای می چرخند (چون جسم صلب است) داریم:

$$L = I\omega = \left(\frac{1}{12} M l^2 + m_1 \left(\frac{l}{2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right) \omega$$

پاسخ ب: برای پیدا کردن شتاب زاویه ای، باید اول گشتاور زاویه ای ناشی از نیروهای $m_1 g$ و $m_2 g$ را بیابیم:

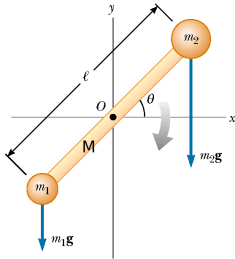
$$\tau_{m_1 g} = + \frac{m_1 g l \cos \theta}{2} \quad \tau_{m_2 g} = - \frac{m_2 g l \cos \theta}{2}$$

علامت های مثبت و منفی به ترتیب نشان دهنده برون سو و درون سو بودن بردار گشتاور هستند. حال از شکل دورانی قانون دوم نیوتن می دانیم که:

$$\sum \tau = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\sum \tau}{I} = \frac{m_1 - m_2}{\frac{1}{12} M l^2 + m_1 \left(\frac{l}{2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{l}{2} \right)^2} \frac{g l \cos \theta}{2}$$

شکل از ویرایش هشتم مبانی هالیدی.

مثال: تکانه زاویه ای، شتاب زاویه ای و گشتاور وارده بر یک جسم صلب



معادله اخیر را می توان به صورت زیر ساده کرد:

$$\alpha = \frac{\sum \tau}{I} = \frac{2(m_1 - m_2)g \cos \theta}{l(\frac{M}{2} + m_1 + m_2)}$$

تمرین: در چه زاویه θ شتاب زاویه ای بیشینه می شود؟

تمرین: با توجه به تعریف شتاب زاویه ای، یعنی $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ ، معادله اخیر را عملاً می توان به صورت معادله دیفرانسیل زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = A \cos \theta$$

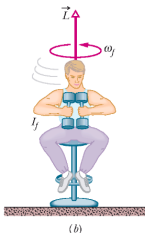
که در آن

$$A = \frac{2(m_1 - m_2)g}{l(\frac{M}{2} + m_1 + m_2)}$$

یک ثابت است. تحقیق کنید که جواب چنین معادله دیفرانسیلی به چه صورت است.

شکل از ویرایش هشتم مبانی هالیدی.

قضیه پایستگی تکانه زاویه ای



قضیه پایستگی تکانه زاویه ای: اگر گشتاور کل وارده به یک سیستم ذره صفر شود، آنگاه تکانه زاویه ای کل سیستم ثابت می ماند:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{tot} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \text{constant}$$

$$\vec{\tau}_{tot} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_i = \vec{L}_f$$

به عبارت دیگر

قضیه پایستگی تکانه زاویه ای یکی از مهم ترین نتایج فیزیکی است و تاکنون هیچ نقضی، در ابعاد بزرگ مقیاس و یا حتی زیراتمی برای آن پیدا نشده است.

برای درک پایستگی تکانه زاویه ای به شکل روبرو دقت کنید. فردی بر روی یک چهارپایه نشسته است و چهارپایه می تواند حول یک محور عمودی آزادانه دوران کند (اصطکاک را نادیده می گیریم). در ابتدا فرد با سرعت زاویه ای اولیه ω_i در حال دوران است در حالی که دو دمبل را به صورت باز نگه داشته است. در این حالت بردار تکانه زاویه ای فرد به صورت عمودی به سمت بالاست و مقدار آن برابر $I_i \omega_i$ می باشد. کمیت I_i لختی دورانی سیستم (فرد + دمبل ها) در این حالت است.

حال فرد دستان خود را می ببند و دمبل ها را به خود نزدیکتر می کند. در این حالت مقدار لختی دورانی سیستم کاهش می یابد، چون دمبل ها به محور نزدیک تر شده اند. این مقدار جدید را I_f می نامیم. حال با توجه به اینکه گشتاور کل وارده به سیستم ناچیز است (اصطکاک را ناچیز فرض کرده ایم) نتیجه می گیریم که تکانه زاویه ای کل سیستم باید ثابت باقی بماند:

$$\vec{\tau}_{tot} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_i = \vec{L}_f \Rightarrow I_i \omega_i = I_f \omega_f \Rightarrow \omega_f = \omega_i \frac{I_i}{I_f} > \omega_i$$

یعنی سرعت زاویه ای نهایی باید بزرگتر از سرعت زاویه ای اولیه باشد.

این اتفاق در عالم واقع به راحتی دیده می شود. فیلم ها را ببینید و خودتان امتحان کنید!

شکل از ویرایش دهم مبانی هالیدی.

مثال: چرخ و فلک

چرخ و فلکی به جرم M و شعاع R که به صورت افقی دوران می کند را در نظر بگیرید. فردی به جرم m در کناره چرخ و فلک می ایستد. در این حالت سیستم با سرعت زاویه ای ω_i دوران می کند. حال شخص آهسته و با احتیاط به سمت مرکز چرخ و فلک حرکت می کند تا به شعاع $r < R$ می رسد. سرعت زاویه ای نهایی سیستم را در این حالت بیابید. از اصطکاک چرخ و فلک با محورش صرف نظر کنید.

پاسخ: گشتاور ناشی از نیروی گرانش وارده به این سیستم صفر است (چون این نیرو بر بردار موقعیت عمود است.) و گشتاور نیروی اصطکاک هم ناچیز است (چون این نیرو ناچیز فرض شده است). در چنین حالتی قانون پایستگی تکانه زاویه ای برقرار است:

$$\vec{\tau}_{tot} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_i = \vec{L}_f \Rightarrow I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

حال باید لختی دورانی در حالت اولیه و نهایی را محاسبه کنیم:

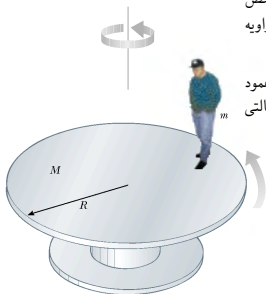
$$I_i = \frac{1}{2} M R^2 + m R^2 \qquad I_f = \frac{1}{2} M R^2 + m r^2$$

اکنون می توانیم سرعت زاویه ای نهایی را، با استفاده از قانون پایستگی تکانه زاویه ای، محاسبه کنیم:

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f \Rightarrow \omega_f = \omega_i \frac{\frac{1}{2} M R^2 + m R^2}{\frac{1}{2} M R^2 + m r^2}$$

تمرین: انرژی جنبشی اولیه و نهایی را برای این سیستم محاسبه کنید. آیا کاری روی سیستم انجام شده است؟

شکل از ویرایش هشتم مبانی هالیدی.



روابط تکانه خطی و زاویه ای را مرور و مقایسه کنید.

جدول زیر شکل های متفاوت قانون دوم نیوتن را، برحسب کمیت های خطی و دورانی، مرور می کند.
شکل از ویرایش دهم مبانی هالیدی.



Translational		Rotational	
Force	$\vec{F}$	Torque	$\vec{\tau} (= \vec{r} \times \vec{F})$
Linear momentum	$\vec{p}$	Angular momentum	$\vec{\ell} (= \vec{r} \times \vec{p})$
Linear momentum ^b	$\vec{P} (= \Sigma \vec{p}_i)$	Angular momentum ^b	$\vec{L} (= \Sigma \vec{\ell}_i)$
Linear momentum ^b	$\vec{P} = M\vec{v}_{\text{com}}$	Angular momentum ^c	$L = I\omega$
Newton's second law ^b	$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$	Newton's second law ^b	$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Conservation law ^d	$\vec{P} = \text{a constant}$	Conservation law ^d	$\vec{L} = \text{a constant}$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید نکات اساسی تکانه زاویه ای و پایستگی آن را بیان کنید. برای اینکار لازم است بتوانید به سوال های زیر پاسخ دهید:

- ۱ تعریف تکانه زاویه ای را با استفاده از تکانه خطی بنویسید. تعریف تکانه زاویه ای را با استفاده از سرعت بنویسید.
- ۲ توضیح دهید که چطور می توان با استفاده از قاعده دست راست جهت بردار تکانه زاویه ای را تعیین کرد.
- ۳ اندازه بردار تکانه زاویه ای را بنویسید.
- ۴ رابطه بین گشتاور وارده به یک ذره و تکانه زاویه ای آن چیست؟
- ۵ تکانه زاویه ای کل یک سیستم چطور به تکانه زاویه ای تک تک اجزاء آن مربوط می شود؟
- ۶ رابطه بین گشتاور کل وارده به یک سیستم و تکانه زاویه ای کل آن چیست؟
- ۷ تکانه زاویه ای یک جسم صلب، که حول یک محور ثابت در حال دوران است، چطور به لختی دورانی و سرعت زاویه ای آن مربوط می شود؟
- ۸ قانون پایستگی تکانه زاویه ای در چه شرایطی برقرار است؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.



تمرین

● تمرین: برای ذره ای به جرم دو کیلوگرم که بردار موقعیت آن به صورت

$$\vec{r} = (2 \sin \pi t + 4e^{-t})\hat{i} + (3t + 5 \cos \pi t)\hat{j} - e^t \hat{k}$$

با زمان تغییر می کند،

الف) بردار سرعت لحظه ای را بیابید.

ب) بردار تکانه خطی را بیابید.

پ) بردار تکانه زاویه ای را بیابید.

ت) گشتاور کل وارده بر این ذره را بیابید.

این محاسبات را در زمان دلخواه t انجام دهید.

● تمرین: برای ذره ای به جرم دو کیلوگرم که بردار موقعیت آن به صورت

$$\vec{r} = (2 \ln t + \sin t)\hat{i} - (3t^4 - \tan t)\hat{j} + e^{-2t} \hat{k}$$

با زمان تغییر می کند،

الف) بردار سرعت لحظه ای را بیابید.

ب) بردار تکانه خطی را بیابید.

پ) بردار تکانه زاویه ای را بیابید.

ت) گشتاور کل وارده بر این ذره را بیابید.

این محاسبات را در زمان دلخواه t انجام دهید.

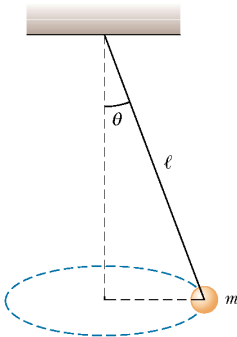
تمرین

یک آونگ مخروطی که از یک گلوله به جرم m و نخ به طول l تشکیل شده است را در نظر بگیرید (گلوله مسیری دایره شکل را می پیماید، مطابق شکل روبرو). در طول حرکت، نخ با محور عمودی زاویه ثابت θ را حفظ می کند. نشان دهید که اندازه حرکت زاویه ای جرم حول مرکز دایره برابر است با

$$L = \sqrt{m^2 g l^3 \sin^4 \theta / \cos \theta}$$

گشتاور جسم حول نقطه اتصال نخ و آویزگاه چقدر است؟

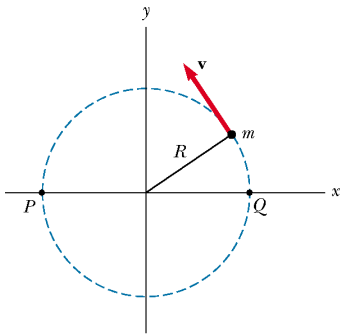
شکل از ویرایش هشتم مبانی هالیدی.



تمرین

جسمی به جرم m بر روی دایره ای به شعاع R و با سرعت v دوران می کند. اگر حرکت این جسم از نقطه Q شروع شود، تکانه زاویه ای ذره حول نقطه P را در هر لحظه از زمان بیابید. راهنمایی: به مباحث انتهایی فصل چهارم (حرکت دایره ای یکنواخت) مراجعه کنید.

شکل از ویرایش هشتم مبانی هالیدی.



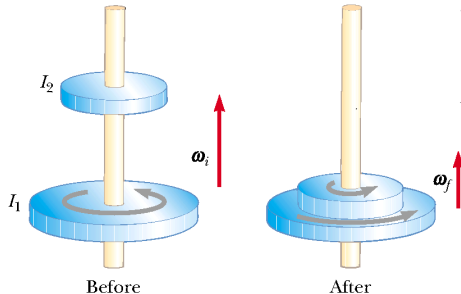
تمرین

یک استوانه (سیلندر) با لختی دورانی I_1 را در نظر بگیرید که حول یک محور بدون اصطکاک با سرعت زاویه ای ω_i در حال دوران است. استوانه دوم با لختی دورانی I_2 ، که در ابتدا در حال دوران نیست، بر روی استوانه اول رها می شود. به دلیل نیروی اصطکاک بین دو استوانه، سیستم دوجرمی در انتها به سرعت زاویه ای نهایی ω_f می رسد.

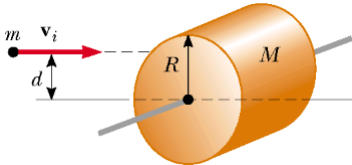
الف) مقدار ω_f را بیابید.

ب) نشان دهید که انرژی جنبشی نهایی جسم کاهش یافته است و نسبت انرژی جنبشی نهایی به اولیه را بیابید.

شکل از ویرایش هشتم مبانی هالیدی.



تمرین



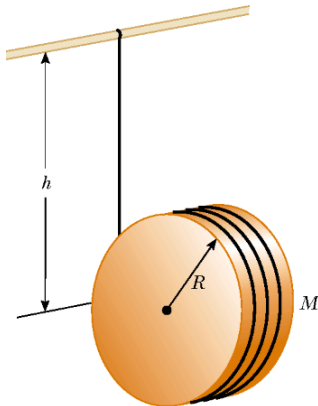
یک گلوله گلی به جرم m و سرعت v_i به یک استوانه توپیر به جرم M و شعاع R ، که در ابتدا در حال سکون است، برخورد می کند. استوانه مذکور بر روی یک محور افقی سوار بوده و می تواند آزادانه دوران کند. جهت حرکت گلوله گلی عمود بر محور استوانه است و این گلوله به فاصله d از محور استوانه به آن برخورد می کند ($d < R$).

الف) اندازه حرکت زاویه ای سیستم را دقیقاً پس از برخورد گلوله گلی به استوانه بیابید.

ب) آیا انرژی مکانیکی پایسته است؟

شکل از ویرایش هشتم مبانی هالیدی.

تمرین



یک نخ به دور دیسک همگنی به شعاع R و جرم M پیچیده شده است. دیسک از حالت سکون رها می شود در حالی که نخ حالت عمودی خود را حفظ می کند و انتهای بالایی اش به میله ای متصل است.

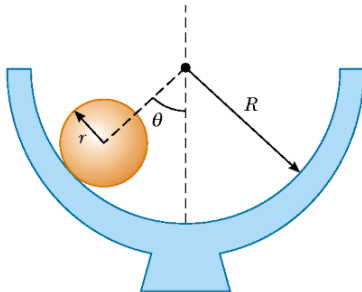
(الف) نشان دهید که کشش نخ یک سوم وزن دیسک می باشد.

(ب) نشان دهید که شتاب مرکز جرم دیسک برابر $2g/3$ می باشد.

(پ) نشان دهید که سرعت مرکز جرم دیسک، وقتی که به اندازه h سقوط کرده است، برابر $5(4gh/3)$ می باشد. این نتیجه اخیر را می توانید به روش انرژی به دست بیاورید.

شکل از ویرایش هشتم مبانی هالیدی.

تمرین



یک کره همگن توپر به شعاع r درون کاسه ای به شکل نیم دایره، که شعاع بسیار بزرگتری دارد $R \gg r$ ، قرار دارد. کره از حالت سکون و تحت زاویه θ نسبت به راستای عمود رها می شود و بدون لیز خوردن می‌غلتد.

سرعت زاویه ای دوران کره، وقتی که به کف کاسه می رسد، را محاسبه کنید.

آیا می توانید این نتیجه را به طریق تجربی محک بزنید؟

شکل از ویرایش هشتم مبانی هالیدی.

تمرین

مطابق شکل، سه جرم به یک میله بدون جرم متصل هستند. میله می تواند به صورت عمودی، حول محور P بدون اصطکاک دوران کند. این میله را در زمان $t = 0$ از حالت افقی رها می کنیم. با توجه به مقادیر داده شده در شکل،

(الف) لختی دورانی سیستم حول نقطه آویز P را بیابید.

(ب) گشتاور وارده به سیستم در زمان $t = 0$ را بیابید.

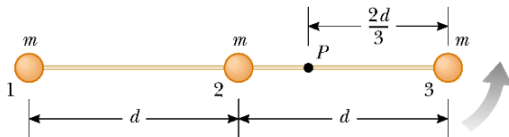
(پ) شتاب زاویه ای دوران میله در زمان $t = 0$ را بیابید.

(ت) شتاب خطی جرم شماره ۳ در زمان $t = 0$ را بیابید.

(ث) بیشینه انرژی جنبشی سیستم چقدر است و چه موقع اتفاق خواهد افتاد (میله در چه حالتی است)؟

(ه) بیشینه تکانه زاویه ای سیستم را بیابید.

شکل از ویرایش هشتم مبانی هالیدی.

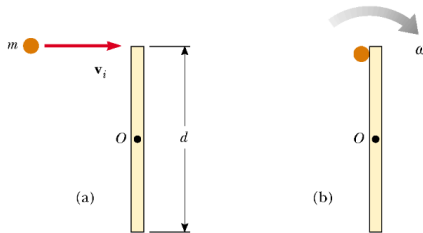


تمرین

پرتابه ای به جرم m با سرعت v_i حرکت می کند. این پرتابه به یک انتهای میله ای، به جرم M و طول d ، برخورد کرده و به آن می چسبد. میله حول لولای بدون اصطکاکی دوران می کند. الف) سرعت زاویه ای دوران سیستم بعد از برخورد را بیابید.

ب) چه کسری از انرژی مکانیکی در حین برخورد تلف شده است؟

شکل از ویرایش هشتم مبانی هالیدی.



تبادل ایستا



- در جلسه بعد، شرط تبادل ایستای اجسام را بررسی کرده و برخی کاربردهای مهم تبادل ایستا (استاتیک) را به اختصار مطالعه خواهیم کرد. بنا به تعریف، اگر مجموع نیروها و مجموع گشتاورهای وارده به یک جسم برابر صفر باشد، آن جسم در تبادل استاتیک خواهد بود.

- شکل از مبانی فیزیک، ویرایش هشتم.

مراجع

- ❶ Halliday, David, Robert Resnick, and Jearl Walker; Fundamentals of physics, 10th edn. John Wiley & Sons, 2014.
- ❷ Halliday, D., R. Resnick, and K. S. Krane. "Physics, 5th edn." (2002).
- ❸ Ohanian, Hans C., and John T. Markert. Physics for engineers and scientists, 3th edn. 2007.
- ❹ Young, Hugh D., Roger A. Freedman, and Albert Lewis Ford. Sears and Zeman-sky's university physics, 13th edn. Pearson education, 2006.

کلاس های درس فیزیک یک دانشگاه صنعتی شریف (مثال)
کلاس درس دکتر محمد رضا اجتهادی و یا دکتر محمود بهمن
(آبادی) را می توانید از مرکز آموزش های الکترونیک دانشگاه
صنعتی شریف (و یا حتی از سایت مکتب خونه) دریافت کنید.
<http://ocw.sharif.edu/>

کلاس درس دکتر والتر لوین از دانشگاه MIT در مرکز آموزش های الکترونیک این دانشگاه و یوتیوب:
<https://ocw.mit.edu/index.htm>
<https://www.youtube.com/watch?v=X9c0MRooBzQ>

387,915 views • Dec 9, 2014

فیزیک مکانیک

با سپاس از توجه شما