

مفاهیم بنیادی مکانیک کوانتومی

موقعیت و انتقال در مکانیک کوانتومی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

۱ موقعیت و انتقال در مکانیک کوانتومی

- ویژه کت ها و اندازه گیری موقعیت
- انتقال

آنچه گذشت: تبدیل های یکانی در مکانیک کوانتومی

- تعریف عملگر یکانی: $UU^\dagger = U^\dagger U = 1 \Leftrightarrow U^\dagger = U^{-1}$
حاصلضرب دو تبدیل یکانی هم یکانی است: $(UV)^\dagger UV = 1$

معادله ویژه مقداری عملگر یکانی

$$U|u_i\rangle = e^{i\theta_i}|u_i\rangle \Rightarrow U^\dagger|u_i\rangle = e^{-i\theta_i}|u_i\rangle \Rightarrow \langle u_i|U = e^{i\theta_i}\langle u_i|$$

- در معادله ویژه مقداری عملگر یکانی، ویژه کت های متناظر با ویژه مقادیر متفاوت بر هم عمودند.

- اعمال تبدیل یکانی به عملگرها $A = U^\dagger A' U \Leftrightarrow A' = UAU^\dagger = UAU^{-1}$

- اگر A یک عملگر هرمیتی باشد، آنگاه تبدیل یکانی آن نیز هرمیتی است.

- فرض کنید که $A = A^\dagger$ یک عملگر هرمیتی است. آنگاه عملگر $T \equiv e^{iA}$ یک عملگر یکانی است.

- عملگر یکانی $U(\epsilon)$ را در نظر بگیرید که به پارامتر حقیقی بسیار کوچک ϵ وابسته است. این وابستگی به گونه ای است که وقتی ϵ به سمت صفر میل می کند، عملگر $U(\epsilon)$ به عملگر همانی تبدیل می شود:

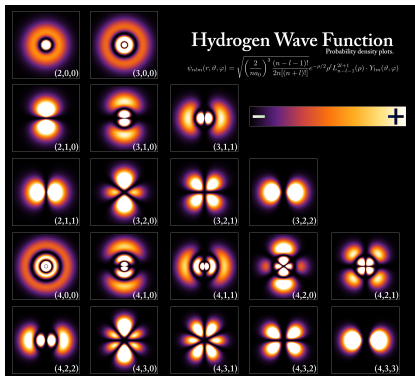
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} U(\epsilon) = \hat{1}$$

در حالت کلی می توان چنین عملگری را تا مرتبه اول ϵ به صورت زیر بسط داد:

$$U(\epsilon) = 1 - i\epsilon F + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

که در آن F یک عملگر هرمیتی است.

اهداف این جلسه



تا اینجا فقط مشاهده پذیرهای گسسته مانند اسپین را بحث کرده ایم. ولی در مکانیک کوانتومی مشاهده پذیرهایی با طیف پیوسته (مانند تکانه و موقعیت) هم وجود دارند. چنین مشاهده پذیرهایی هم هرمیتی هستند. طیف مشاهده پذیرهای پیوسته (بسته به نوع آنها) می تواند تمام و یا بخشی از بازه $(-\infty, \infty)$ را بپوشاند.

ما در این جلسه و جلسات بعد مشاهده پذیرهای با طیف پیوسته را بررسی خواهیم کرد. هدف نهایی ما یافتن، تفسیر و کاربرد معادله شرودینگر است؛ ولی در این بین فرمولبندی ریاضیاتی بسیار مهمی را نیز خواهیم شناخت.

فضای هیلبرت مشاهده پذیرهای پیوسته می تواند چالش های ریاضیاتی خاصی داشته باشد؛ هرچند ما سعی می کنیم از این موارد دوری کنیم و آنها را به ریاضی دانان واگذار می کنیم.

مشاهده پذیرهای پیوسته

- یک مشاهده پذیر پیوسته مانند ξ (بخوانید کسی) را در نظر بگیرید. برای این مشاهده پذیر می توان یک معادله ویژه مقدری مانند $\xi|\xi'\rangle = \xi'|\xi'\rangle \Leftrightarrow A|a'\rangle = a'|a'\rangle$ نوشت. در اینجا ξ یک عملگر است، ξ' یک عدد است و $|a'\rangle$ یک ویژه کت عملگر ξ با ویژه مقدار ξ' می باشد.
- به تناظر دیگر روابط مربوط به مشاهده پذیرها با طیف پیوسته و گسسته دقت کنید. به ویژه به رابطه بستر و جایگزینی دلتای کرونکر با دلتای دیراک دقت کنید.

$$\langle a'|a''\rangle = \delta_{a'a''} \rightarrow \langle \xi'|\xi''\rangle = \delta(\xi' - \xi''),$$

$$\sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| = 1 \rightarrow \int d\xi' |\xi'\rangle \langle \xi'| = 1,$$

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle \langle a'|\alpha\rangle \rightarrow |\alpha\rangle = \int d\xi' |\xi'\rangle \langle \xi'|\alpha\rangle,$$

$$\sum_{a'} |\langle a'|\alpha\rangle|^2 = 1 \rightarrow \int d\xi' |\langle \xi'|\alpha\rangle|^2 = 1,$$

$$\langle \beta|\alpha\rangle = \sum_{a'} \langle \beta|a'\rangle \langle a'|\alpha\rangle \rightarrow \langle \beta|\alpha\rangle = \int d\xi' \langle \beta|\xi'\rangle \langle \xi'|\alpha\rangle,$$

$$\langle a''|A|a'\rangle = a'\delta_{a'a''} \rightarrow \langle \xi''|\xi|\xi'\rangle = \xi'\delta(\xi'' - \xi').$$

ویژه کت های موقعیت و اندازه گیری موقعیت در مکانیک کوانتومی

- تا اینجا متوجه شده ایم که "فرایند اندازه گیری در مکانیک کوانتومی عملاً یک فرایند فیلترینگ است". برای تعمیم این ایده به مشاهده پذیرها با طیف پیوسته، بهتر است که با یک مثال شروع کنیم. این مثال عبارت است از اندازه گیری موقعیت (مکان) ذره در یک فضای یک بعدی.
 - فرض می کنیم که $|x'\rangle$ ویژه کت های عملگر x با ویژه مقدار x' هستند. بنابراین
- $$x|x'\rangle = x'|x'\rangle$$
- دقت کنید که x' یک عدد حقیقی از جنس طول است، مثلاً $x' = ۲/۶۵ \text{ cm}$ ، در حالی که x یک عملگر است.
- هر حالت دلخواه از هر سیستم فیزیکی را می توان بر حسب ویژه کت های مکان بسط داد:

$$|\alpha\rangle = \int dx' |x'\rangle \langle x'|\alpha\rangle$$



ویژه کت های موقعیت و اندازه گیری موقعیت در مکانیک کوانتومی

- فرض کنید دستگاهی داریم که می تواند موقعیت را به صورت بسیار دقیق اندازه گیری کند. بنابراین اگر دستگاه گزارش کند که سیستم فیزیکی مورد نظر ما در حالت $|x'\rangle$ قرار گرفته است، به این معنی است که کت حالت سیستم به صورت آنی از وضعیت $|\alpha\rangle$ به حالت $|x'\rangle$ رمبش کرده است. این فرایند بسیار شبیه به اندازه گیری اسپین الکترون در دستگاه اشترن گراخ است.
- البته دستگاه های ما نمی توانند تا این حد دقیق باشند و علی الاصول می توانند موقعیت ذره را در یک بازه $(x' - \Delta/2, x' + \Delta/2)$ گزارش کنند. بنابراین، پس از اندازه گیری تابع موج به حالت زیر رمبش می کند:

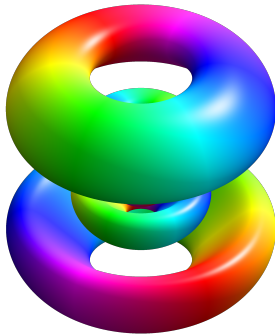
$$|\alpha\rangle = \int dx'' |x''\rangle \langle x'' | \alpha \rangle \xrightarrow{\text{measurement}} \int_{x' - \Delta/2}^{x' + \Delta/2} dx'' |x''\rangle \langle x'' | \alpha \rangle$$

همانطور که در درس اندازه گیری نیز گفته شد، احتمال وجود ذره در بازه $(x' - \Delta/2, x' + \Delta/2)$ نیز به صورت زیر داده می شود که در آن $dx' = \Delta$:

$$\frac{dP}{dx'} = |\langle x' | \alpha \rangle|^2$$



تابع موج: احتمال حضور ذره در فضا



- با توجه به اینکه ذره باید بالاخره در یک نقطه از فضا حضور داشته باشد، مجموع احتمال ها باید برابر یک شود:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\langle x' | \alpha \rangle|^2 dx' = 1$$

این رابطه البته معادل است با نرمال بودن کت $|\alpha\rangle$:

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \alpha | x' \rangle \langle x' | \alpha \rangle dx' = 1$$

از درس های کوانتوم دوره کارشناسی، و یا درس مربوط به اندازه گیری در این دوره، به یاد می آوریم که عبارت $\langle x' | \alpha \rangle$ در واقع همان تابع موج ذره است. در درس های بعدی دوباره به این موضوع باز خواهیم گشت.

- در شکل مقابل اربیتال اتمی $5d$ مربوط به اتم هیدروژن را می بینید که احتمال حضور الکترون را توصیف می کند.
- چطور می توان احتمال حضور ذره در سه بعد را توصیف کرد؟

تابع موج: احتمال حضور ذره در فضا

- همین نمادگذاری را می توان برای توصیف موقعیت ذره در فضای سه بعدی تعمیم داد. اگر کت حالت ذره شامل درجات آزادی ذاتی (مانند اسپین و ...) نباشد، آنگاه می توان این کت حالت را به صورت زیر بسط داد:

$$|\alpha\rangle = \int d^3\vec{r}' |\vec{r}'\rangle \langle \vec{r}' | \alpha \rangle$$

دقت کنید که $|\vec{r}'\rangle \equiv |x', y', z'\rangle$

$$x|\vec{r}'\rangle = x'|\vec{r}'\rangle \quad y|\vec{r}'\rangle = y'|\vec{r}'\rangle \quad z|\vec{r}'\rangle = z'|\vec{r}'\rangle$$

البته ما در اینجا فرض کرده ایم که سه مولفه مکانی کت موقعیت با هم سازگار هستند

$$[x_i, x_j] = 0$$

- به عبارت دیگر فرض کرده ایم که این سه مولفه را می توان به صورت همزمان اندازه گیری کرد.
- حالا می خواهیم این سوال را مطرح کنیم که ذره چطور در فضا منتقل می شود و این انتقال را در نظریه کوانتومی چطور توصیف می کنیم.

انتقال ذره در فضا در مکانیک کوانتومی

- فرض کنید موقعیت ذره حول نقطه $\vec{r}$ برای ما مشخص شده است و در لحظه ای بعد، ذره در موقعیت $\vec{r} + d\vec{r}$ مشاهده شده است در حالی که بقیه مشخصات کوانتومی ذره (اسپین و ...) بدون تغییر باقی مانده اند. می خواهیم بدانیم تحت چه عمل ریاضیاتی می توان انتقال (translation) این ذره را توصیف کرد.
- عملگر انتقال در جابجایی دیفرانسیلی $d\vec{r}$ را با $\mathcal{T}(d\vec{r})$ نشان می دهیم و می خواهیم ویژگی های این عملگر را با استدلال های ساده بیابیم.
- اصلی ترین وظیفه این عملگر تبدیل کت حالت $|\vec{r}\rangle$ به $|\vec{r} + d\vec{r}\rangle$ است:

$$\mathcal{T}(d\vec{r}) |\vec{r}\rangle = |\vec{r} + d\vec{r}\rangle$$
- توجه کنید که معادله بالا یک معادله ویژه مقداری نیست زیرا کت های حالت در سمت چپ و راست با هم تفاوت دارند.
- البته این معادله قرار است یک عملگر یکانی بینهایت کوچک را برای ما توصیف کند (همانطور که در ادامه خواهیم دید). درباره عملگرهای یکانی بینهایت کوچک در جلسه قبل صحبت کردیم.

انتقال ذره در فضا در مکانیک کوانتومی

- در ابتدا می خواهیم ببینیم تاثیر عملگر انتقال $\mathcal{T}(\text{dr}^{\vec{r}'})$ بر روی یک حالت دلخواه چگونه است. محاسبه زیر را ببینید:

$$\mathcal{T}(\text{dr}^{\vec{r}'}) |\alpha\rangle = \mathcal{T}(\text{dr}^{\vec{r}'}) \int d^3\vec{r}' |\vec{r}'\rangle \langle \vec{r}' | \alpha \rangle = \int d^3\vec{r}' |\vec{r}' + \text{dr}^{\vec{r}'}\rangle \langle \vec{r}' | \alpha \rangle$$

عبارت نوشته شده در سمت راست رابطه بالا ذره ای را توصیف می کند که به اندازه $\text{dr}^{\vec{r}'}$ در فضا جابجا شده است.

- می توان این پدیده را به صورت دیگری نیز مطالعه کرد (هرچند ما از اینکار پرهیز می کنیم!). در واقع از آنجا که با یک تغییر متغیر ساده می توان سمت راست رابطه بالا را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\int d^3\vec{r}' |\vec{r}' + \text{dr}^{\vec{r}'}\rangle \langle \vec{r}' | \alpha \rangle = \int d^3\vec{r}' |\vec{r}'\rangle \langle \vec{r}' - \text{dr}^{\vec{r}'} | \alpha \rangle$$

می توان نوشت:

$$\mathcal{T}(\text{dr}^{\vec{r}'}) |\alpha\rangle = \int d^3\vec{r}' |\vec{r}'\rangle \langle \vec{r}' - \text{dr}^{\vec{r}'} | \alpha \rangle$$

این توصیف ذره ای است که در جای خود ثابت باقی مانده است، ولی دستگاه مختصات به اندازه $-\text{dr}^{\vec{r}'}$ به عقب رانده شده است.

- این دو توصیف معادل هستند؛ ولی ما در ادامه از توصیف اولی استفاده خواهیم کرد.

ویژگی های عملگر انتقال

- با توجه به اینکه می خواهیم مجموع احتمالات حضور ذره در فضا برابر یک شود، باید عملگر $\mathcal{T}(\text{dr}^{\vec{r}})$ یک عملگر یکانی باشد. تنها در این صورت است که مقدار ضرب داخلی دو کت با تبدیل مورد نظر ما (انتقال دیفرانسیلی) ثابت باقی می ماند و احتمال پایسته باقی می ماند:
- $$\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \alpha | \mathcal{T}^{\dagger}(\text{dr}^{\vec{r}}) \mathcal{T}(\text{dr}^{\vec{r}}) | \alpha \rangle$$

همانطور که گفته شد، شرط بالا فقط وقتی درست است که $\mathcal{T}(\text{dr}^{\vec{r}})$ یکانی باشد:

$$\mathcal{T}^{\dagger}(\text{dr}^{\vec{r}}) \mathcal{T}(\text{dr}^{\vec{r}}) = 1$$

برای بحث کلی تر جلسه پیش را ببینید.

- ویژگی دوم عملگر انتقال این است که انتظار داریم اثر دو انتقال متوالی برابر با مجموع دو انتقال باشد:
- $$\mathcal{T}(\text{dr}^{\vec{r}''}) \mathcal{T}(\text{dr}^{\vec{r}}) = \mathcal{T}(\text{dr}^{\vec{r}} + \text{dr}^{\vec{r}''})$$

- ویژگی سوم عملگر انتقال این است که انتظار داریم اثر دو انتقال متوالی در جهت های معکوس برابر با حالت اولیه شود:
- $$\mathcal{T}(-\text{dr}^{\vec{r}}) \mathcal{T}(\text{dr}^{\vec{r}}) = 1$$

از اینجا با توجه به تعریف عملگر وارون نتیجه می گیریم که $\mathcal{T}(-\text{dr}^{\vec{r}})$ باید برابر با وارون عملگر $\mathcal{T}(\text{dr}^{\vec{r}})$ باشد:

$$\mathcal{T}(-\text{dr}^{\vec{r}}) = \mathcal{T}^{-1}(\text{dr}^{\vec{r}})$$

ویژگی های عملگر انتقال

- ویژگی چهارم این است که عملگر $\mathcal{T}(\vec{dr})$ تا مرتبه اول به $\vec{dr}$ بستگی داشته باشد، یعنی

$$\lim_{\vec{dr} \rightarrow 0} \mathcal{T}(\vec{dr}) = 1$$

- در جلسه پیش دیدیم که تبدیل های یکانی دیفرانسیلی را می توان در حالت کلی به صورت $U(\epsilon) = 1 - i \epsilon F + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ بنویسیم که در آن F یک عملگر هرمیتی است و ϵ مقدار تغییر دیفرانسیلی است.

در اینجا نیز می توانیم تبدیل دیفرانسیلی $\mathcal{T}(\vec{dr})$ را به صورت کلی

$$\mathcal{T}(\vec{dr}) = 1 - i \vec{K} \cdot \vec{dr}$$

- بنویسیم که در آن $\vec{K} = (K_x, K_y, K_z)$ یک عملگر هرمیتی است و $\vec{dr}$ مقدار جابجایی دیفرانسیلی است.

- تمرین نشان دهید که عملگر $\mathcal{T}(\vec{dr}) = 1 - i \vec{K} \cdot \vec{dr}$ هر چهار ویژگی خواسته شده در بالا را دارد.

ویژگی های عملگر انتقال

تمرین نشان دهید که عملگر $\mathcal{T}(\vec{dr}') = 1 - i\vec{K} \cdot \vec{dr}'$ هر چهار ویژگی خواسته شده در بالا را دارد.

ویژگی یکانی بودن:

$$\mathcal{T}^\dagger(\vec{dr}')\mathcal{T}(\vec{dr}') = (1 + i\vec{K}^\dagger \cdot \vec{dr}') (1 - i\vec{K} \cdot \vec{dr}') \simeq 1 - i(\vec{K} - \vec{K}^\dagger) \cdot \vec{dr}' + \mathcal{O}(\vec{dr}'^2) = 1$$

ویژگی جمع انتقال ها:

$$\mathcal{T}(\vec{dr}'')\mathcal{T}(\vec{dr}') = (1 - i\vec{K} \cdot \vec{dr}'') (1 - i\vec{K} \cdot \vec{dr}') \simeq 1 - i\vec{K} \cdot (\vec{dr}' + \vec{dr}'') + \mathcal{O}(\vec{dr}' \cdot \vec{dr}'')$$

$$\mathcal{T}(\vec{dr}'')\mathcal{T}(\vec{dr}') = \mathcal{T}(\vec{dr}' + \vec{dr}'')$$

ویژگی سوم: می توان به راحتی نشان داد که عملگر $\mathcal{T}^{-1}(\vec{dr}') = \mathcal{T}(-\vec{dr}')$ وارون عملگر انتقال است. اثبات:

$$\mathcal{T}^{-1}(\vec{dr}')\mathcal{T}(\vec{dr}') = \mathcal{T}(-\vec{dr}')\mathcal{T}(\vec{dr}')$$

$$\mathcal{T}^{-1}(\vec{dr}')\mathcal{T}(\vec{dr}') = (1 + i\vec{K} \cdot \vec{dr}') (1 - i\vec{K} \cdot \vec{dr}') \simeq 1 - i(\vec{K} - \vec{K}) \cdot \vec{dr}' + \mathcal{O}(\vec{dr}'^2) = 1$$

درستی ویژگی های چهارم را توضیح دهید.

ویژگی های مولد انتقال و یک جابجاگر بسیار مهم

• پس عملگر $\mathcal{T}(\vec{dr'}) = 1 - i\vec{K} \cdot \vec{dr'}$ را می توانیم به درستی عملگر انتقال بنامیم. یک سوال طبیعی که در اینجا پیش می آید این است که عملگر $\vec{K}$ که عملاً مولد انتقال است، چه نوع کمیتی است و چه ویژگی هایی دارد؟

در اینجا می توانیم یک رابطه بسیار بنیادی برای جابجاگر $\vec{K}$ و $\vec{r'}$ بیابیم. توجه می کنیم که

$$\vec{r'} \mathcal{T}(\vec{dr'}) |\vec{r'}\rangle = \vec{r'} |\vec{r'} + \vec{dr'}\rangle = (\vec{r'} + \vec{dr'}) |\vec{r'} + \vec{dr'}\rangle$$

و همچنین

$$\mathcal{T}(\vec{dr'}) \vec{r'} |\vec{r'}\rangle = \vec{r'} \mathcal{T}(\vec{dr'}) |\vec{r'}\rangle = \vec{r'} |\vec{r'} + \vec{dr'}\rangle$$

بنابراین به رابطه جابجایی زیر می رسم:

$$[\vec{r'}, \mathcal{T}(\vec{dr'})] |\vec{r'}\rangle = \vec{dr'} |\vec{r'} + \vec{dr'}\rangle \simeq \vec{dr'} |\vec{r'}\rangle$$

که در آن از جملات مرتبه دوم تغییرات صرف نظر کرده ایم. حال با توجه به اینکه کت موقعیت $|\vec{r'}\rangle$ کاملاً دلخواه است، رابطه $[\vec{r'}, \mathcal{T}(\vec{dr'})] = \vec{dr'}$ باید همیشه برقرار باشد. تمرین: از رابطه جابجایی بالا رابطه زیر را اثبات کنید:

$$-i \vec{r'} \vec{K} \cdot \vec{dr'} + i \vec{K} \cdot \vec{dr'} \vec{r'} = \vec{dr'}$$

تمرین: مولفه های x ، y و z رابطه بالا را بنویسید و نشان دهید که رابطه جابجایی $[x_i, K_j] = i\delta_{ij}$ برقرار است. این رابطه اساس بحث ما در جلسه بعد است.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید مفهوم موقعیت و انتقال در مکانیک کوانتومی را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ تفاوت مشاهده پذیرهای پیوسته و گسسته از لحاظ ریاضیاتی در چیست؟
- ۲ تفاوت کت حالت مربوط به مشاهده پذیرهای پیوسته و گسسته از لحاظ ریاضیاتی در چیست؟
- ۳ رابطه بستار برای متغیرهای پیوسته چگونه نوشته می شود؟
- ۴ درباره شباهت ها و تفاوت های دلتای کرونکر و دلتای دیراک تحقیق کنید.
- ۵ احتمال وجود یک ذره در یک بازه خاص از موقعیت را چگونه می توان اندازه گرفت؟
- ۶ چرا اندازه گیری سه مولفه موقعیت با هم تداخلی ندارد؟
- ۷ چهار ویژگی اصلی عملگر انتقال را توضیح دهید.
- ۸ به نظر شما مولد انتقال (یعنی $\hat{K}$) چه نوع کمیتی است؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ” درونی سازی ” مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.

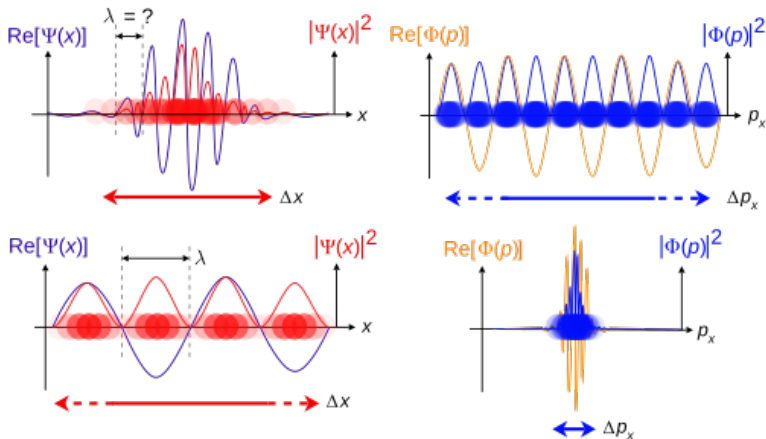


تمرین ها: زمان تحویل ۳۰ آذرماه

- لطفا تمرین های ۲۷ تا ۲۸ از فصل اول کتاب ساکورایی را پاسخ دهید.
- لطفا تمرین ها و پرسش های بالا را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: تکانه به عنوان مولد انتقال در مکانیک کوانتومی

در جلسه بعد استدلال خواهیم کرد که تکانه (در واقع ضریبی از تکانه) همان مولد انتقال است. سپس درباره روابط جابجایی کانونی و اهمیت آنها بحث خواهیم کرد.



منابع

- ۱ Modern Quantum Mechanics, 3rd Edition, by J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge University Pr.
- ۲ Principles of Quantum Mechanics by Ramamurti Shankar, Plenum Press
- ۳ Quantum Mechanics: Concepts and Applications, 2nd Edition by Nouredine Zettili
- ۴ Introduction to Quantum Mechanics by David J. Griffiths
- ۵ Quantum Mechanics: An Introduction by Walter Greiner
- ۶ Quantum Physics I by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>
- ۷ Quantum Physics II by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/>
- ۸ Professor M does Science,
<https://www.youtube.com/@ProfessorMdoesScience>

با سپاس از توجه شما

