

رهیافت عملگر چگالی در مکانیک کوانتومی

تحول زمانی عملگر چگالی در مکانیک کوانتومی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



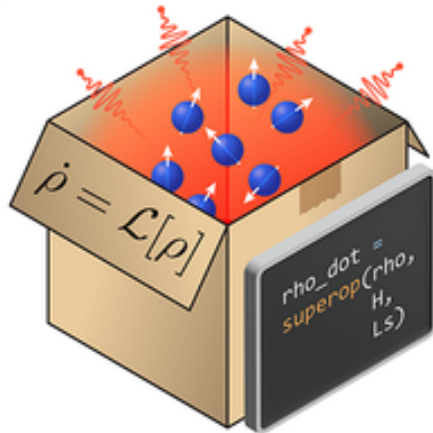
دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ تحول زمانی عملگر چگالی در مکانیک کوانتومی
- تحول زمانی عملگر چگالی
- تعمیم عملگر چگالی به حالت های پیوسته

فیزیک و تحول سیستم های کوانتومی مرکب

- در اینجا می خواهیم تحول زمانی یک آنسامبل از ذرات در مکانیک کوانتومی را توصیف کنیم. این مبحث در واقع اساس توصیف سیستم های کوانتومی باز (open quantum systems) و معادلات مادر (معادلات حاکم master equations) این سیستم هاست.



تحول زمانی عملگر چگالی

- فرض کنید در زمان t_0 عملگر چگالی یک سیستم به صورت زیر داده شده است:

$$\rho(t_0) = \sum_i w_i |\alpha^{(i)}\rangle \langle \alpha^{(i)}|$$

فرض کنید که جمعیت های نسبی w_i با زمان تغییر نمی کنند و در نتیجه آنسامبل بدون تغییر باقی می ماند. بنابراین، فقط تغییر درکت های حالت $|\alpha^{(i)}, t_0; t\rangle$ است که باعث تحول زمانی عملگر چگالی می شود. حال با توجه به اینکه $|\alpha^{(i)}, t_0; t\rangle$ در معادله شرودینگر

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0; t\rangle = H |\alpha, t_0; t\rangle$$

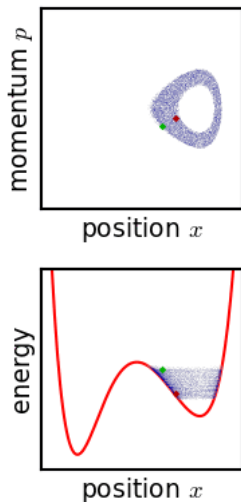
صدق می کند (درس ”تحول زمانی و معادله شرودینگر” را ببینید)، می توان برای تحول عملگر چگالی نوشت:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \sum_i w_i (H |\alpha^{(i)}, t_0; t\rangle \langle \alpha^{(i)}, t_0; t| - |\alpha^{(i)}, t_0; t\rangle \langle \alpha^{(i)}, t_0; t| H) \\ &= -[\rho, H]. \end{aligned}$$

- دقت کنید که معادله بالا شبیه به معادله حرکت هایزنبرگ است؛ هرچند در یک علامت منفی با آن اختلاف دارد. البته این جای نگرانی ندارد چون ماتریس چگالی یک مشاهده پذیر کوانتومی نیست و بنابراین لازم نیست که از معادله حرکت هایزنبرگ پیروی کند.

- توجه: کت های حالت در تعریف عملگر چگالی، یعنی $|\alpha^{(i)}, t_0; t\rangle$ ، در تصویر شرودینگر هستند.

مقایسه با معادله لیوویل در مکانیک کلاسیک



● معادله تحول عملگر چگالی، یعنی

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = -[\rho, H]$$

مشابه کوانتومی معادله لیوویل در مکانیک آماری کلاسیک است:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\{f, H\}$$

که در آن f تابع توزیع (چگالی حالت ها) در فضای فاز کلاسیک است. میانگین آماری یک مشاهده پذیر مانند $A(q, p)$ در فیزیک آماری کلاسیک نیز به صورت زیر تعریف می شود:

$$A_{\text{average}} = \frac{\int f A(q, p) d\Gamma_{q,p}}{\int f d\Gamma_{q,p}}$$

که در آن $d\Gamma_{q,p}$ المان حجم فضای فاز است.

جواب معادله تحول عملگر چگالی

● جواب معادله تحول عملگر چگالی

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = - [\rho, H] \quad *$$

را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\rho(t) = U \rho(\circ) U^\dagger \quad *$$

اثبات: در ابتدا از معادله * انتگرال می گیریم:

$$\rho(t) = \rho(\circ) - \frac{i}{\hbar} \int_{\circ}^t d\tau [H(\tau), \rho(\tau)]$$

سپس با استفاده از روش تکرار می توان جواب را به صورت * نوشت که در آن

$$U = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{\circ}^t d\tau H(\tau) \right]$$

برای مرور روش تکرار درس "تحول زمانی یک سیستم کوانتومی" را ببینید.

● ما وارد مثال از تحول زمانی ماتریس چگالی نخواهیم شد زیرا بعداً معادله لیندبلاد (Lindblad equation) را خواهیم داشت.

تعمیم عملگر چگالی به حالت های پیوسته

- تاکنون فقط درباره عملگر چگالی در سیستم های با طیف گسسته بحث کرده ایم. ولی این مفهوم را می توان به راحتی به سیستم های با طیف پیوسته نیز تعمیم داد.
- فرض کنید ویژه کت های موقعیت را با $|\mathbf{x}'\rangle$ نشان می دهیم. در نتیجه می توان میانگین آنسامبلی را به صورت زیر نشان داد:

$$[A] = \int d^3x' \int d^3x'' \langle \mathbf{x}'' | \rho | \mathbf{x}' \rangle \langle \mathbf{x}' | A | \mathbf{x}'' \rangle$$

در اینجا در واقع ماتریس چگالی یک تابع از دو متغیر $\mathbf{x}'$ و $\mathbf{x}''$ است:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}'' | \rho | \mathbf{x}' \rangle &= \langle \mathbf{x}'' | \left(\sum_i w_i |\alpha^{(i)}\rangle \langle \alpha^{(i)}| \right) | \mathbf{x}' \rangle \\ &= \sum_i w_i \psi_i(\mathbf{x}'') \psi_i^*(\mathbf{x}'), \end{aligned}$$

که در آن ψ_i ها توابع موج متناظر با کت حالت $|\alpha^{(i)}\rangle$ در فضای موقعیت هستند.

- در اینجا نیز مولفه های قطری $\mathbf{x}' = \mathbf{x}''$ همان احتمالات وزنی سیستم اند.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید مفهوم تحول زمانی عملگر چگالی در مکانیک کوانتومی را به درستی توضیح داده و برخی کاربردهای آنها را بیان کنید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ گوید:

- درباره معادلات مادر (معادلات حاکم) در مکانیک کوانتومی تحقیق کنید.
- رابطه حاکم بر تحول عملگر چگالی در مکانیک کوانتومی را بنویسید و شیوه اثبات آن را توضیح دهید.
- درباره تفاوت معادله حاکم بر تحول عملگر چگالی در مکانیک کوانتومی و معادله حرکت هایزنبرگ توضیح دهید.
- درباره تشابه معادله حاکم بر تحول عملگر چگالی در مکانیک کوانتومی و معادله لیوویل در مکانیک کلاسیک توضیح دهید.
- جواب کلی معادله حاکم بر تحول عملگر چگالی را بنویسید.
- چطور می توان مفهوم عملگر چگالی را به سیستم های با طیف پیوسته تعمیم داد؟

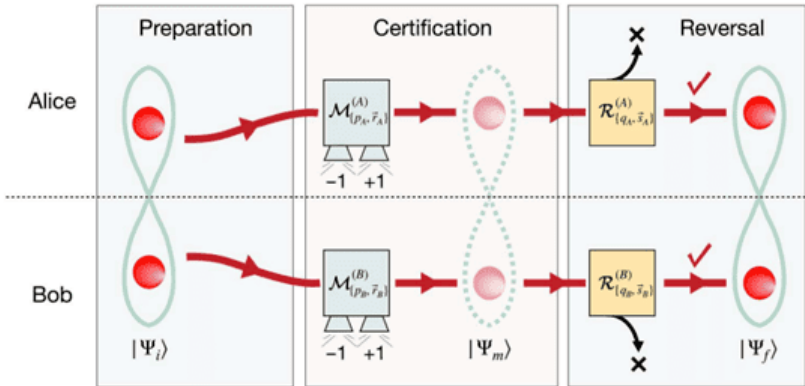
اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ” درونی سازی ” مفاهیم ریاضی حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.



مبحث بعدی: اندازه گیری تصویری در مکانیک کوانتومی

در جلسه بعد با مفهوم اندازه گیری تصویری در مکانیک کوانتومی آشنا خواهیم شد.



منابع

- ۱ Modern Quantum Mechanics, 3rd Edition, by J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge University Pr.
- ۲ Principles of Quantum Mechanics by Ramamurti Shankar, Plenum Press
- ۳ Quantum Mechanics: Concepts and Applications, 2nd Edition by Nouredine Zettili
- ۴ Introduction to Quantum Mechanics by David J. Griffiths
- ۵ Quantum Mechanics: An Introduction by Walter Greiner
- ۶ Quantum Physics I by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>
- ۷ Quantum Physics II by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/>
- ۸ Professor M does Science,
<https://www.youtube.com/@ProfessorMdoesScience>

با سپاس از توجه شما