

حسابان برای فیزیک

درس چهارم: روش های انتگرال گیری

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



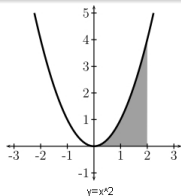
دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس برای آشنایی مقدماتی دانشجویان جدیدالورود، که تاکنون با حساب انتگرال آشنا نشده اند، و به جهت کمک به فهم درس فیزیک مکانیک تهیه شده است. این مجموعه درس، از لحاظ گستردگی و دقت در ارائه مفاهیم، قطعاً جایگزین درس ریاضی عمومی نخواهد بود.
 - این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در پاییز سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
 - خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
- h.shenavar@gmail.com
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که، با تلاش بسیار، امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

۱ درس چهارم: روش های انتگرال گیری

- آنچه گذشت...
- روش های انتگرال گیری

روش سری ها برای پیدا کردن مساحت زیر نمودار



مساحت زیر نمودار $f(x) = x^2$ را در بازه $[0, 2]$ بیابید.

باید مساحت قسمت خاکستری رنگ شکل بالا را بیابیم. برای اینکار، این ناحیه را به n قسمت مساوی تقسیم کرده (مانند شکل پایین) و مساحت هر قسمت را می یابیم. عرض هر قسمت برابر $\Delta x_i = \frac{2}{n}$ و طول آن برابر $(\frac{2i}{n})^2$ می باشد. در اینجا i شماره بازه است. بنابراین، مساحت هر مستطیل برابر است با

$$\Delta S_i = \frac{2}{n} \left(\frac{2i}{n} \right)^2$$

از اینجا می توان مساحت کل تقریبی زیر نمودار را به دست آورد:

$$S \simeq \Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots + \Delta S_n$$

$$S \simeq \sum_{i=1}^n \frac{2}{n} \left(\frac{2i}{n} \right)^2 = \frac{2}{n} \left(\frac{2}{n} \right)^2 \sum_{i=1}^n i^2$$

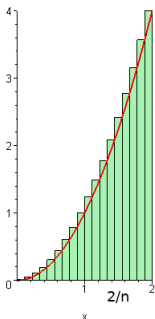
$$S \simeq \frac{8}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$$

$$S \simeq \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

در حدی که تعداد تعداد مستطیل ها بینهایت زیاد باشد، و یا به عبارتی Δx_i بسیار کوچک

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right) = \frac{8}{3}$$

شکل ها از ویکی.



قضیه اساسی اول حساب دیفرانسیل و انتگرال

بیان قضیه اساسی اول: فرض کنید تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد. در این صورت تابع $F(x)$ برای هر مقدار x در این بازه که به صورت:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

تعریف می شود یک پادمشتق تابع f است؛ یعنی:

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

مثال ۱: اگر $F(x) = \int_a^x t^2 dt$ آنگاه $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ زیرا

$$F'(x) = x^2$$

ثابت C را ثابت انتگرال گیری می نامند (رجوع کنید به فصل هشتم فیزیک مکانیک). پادمشتق $F(x)$ یکتا نیست زیرا هر تابع $H(x) = F(x) + C_1$ نیز در شرط پادمشتق بودن صدق می کند.

مثال ۲: اگر $F(x) = \int_a^x \cos t dt$ آنگاه $F(x) = \sin x + C$ زیرا

$$F'(x) = \cos x$$

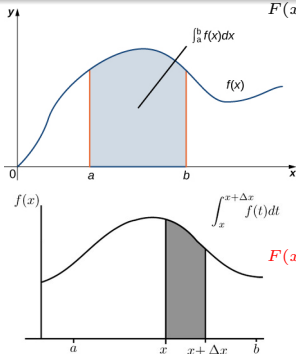
مثال ۳: اگر $F(x) = \int_a^x \frac{dt}{t}$ آنگاه $F(x) = \ln x + C$ زیرا

$$F'(x) = \frac{1}{x}$$

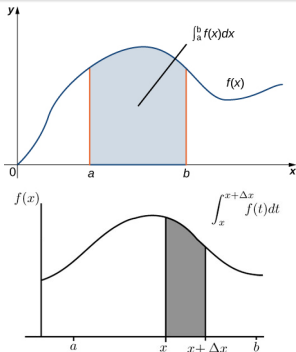
مثال ۴: اگر $F(x) = \int_a^x e^x dx$ آنگاه $F(x) = e^x + C$ زیرا

$$F'(x) = e^x$$

بنابراین سوال اساسی انتگرال این است که چگونه پادمشتق آن برابر تابع f شود؟



قضیه اساسی دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال



بیان قضیه اساسی دوم: فرض کنید تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد و تابع $F(x)$ برای هر مقدار x در این بازه پادمشتق تابع f باشد؛ آنگاه

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

مثال ۱:

$$\int_0^2 t^2 dt = F(2) - F(0) = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

مقایسه کنید با یافتن مساحت زیر نمودار t^2 در جلسه قبل (اسلاید بعد).

مثال ۲:

$$\int_0^\pi \cos y dy = [\sin y]_0^\pi = \sin \pi - \sin 0 = 0$$

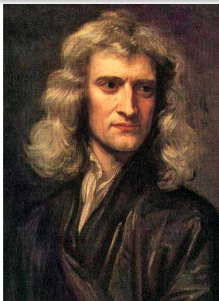
مثال ۳:

$$\int_1^2 \frac{dz}{z} = [\ln z]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 = 0.6931$$

مثال ۴:

$$\int_4^3 e^x dx = [e^x]_4^3 = e^3 - e^4 = -34.51$$

چرا به روش های انتگرال گیری نیاز داریم؟



برخی انتگرال ها آنچنان پیچیده اند که نمی توان جواب آنها را حدس زد. بنابراین، ریاضی دانان تاکنون تکنیک های بسیار متنوعی برای تبدیل انتگرال های پیچیده به انتگرال های ساده تر (با جواب قابل حدس) ابداع کرده اند. این تکنیک ها را روش های انتگرال گیری می نامند. در جلسه بعد با برخی از این روش های انتگرال گیری آشنا خواهیم شد. ما در اینجا چهار روش زیر را بحث خواهیم کرد:

۱ روش تغییر متغیر

۲ روش جزء به جزء

۳ انتگرال های مثلثاتی

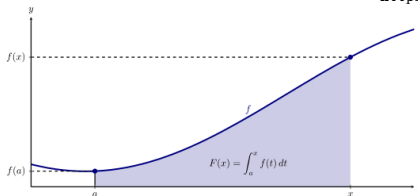
۴ تغییر متغیرهای مثلثاتی و هذلولوی

۵ انتگرال توابع گویا

در این جلسه فقط درباره انتگرال نامعین بحث خواهیم کرد.

شکل ها از ویکی و

<https://ximera.osu.edu/>



انتگرال گیری به روش تغییر متغیر

اگر بتوان قسمتی از انتگرالده را به عنوان $f(u(x))$ و بقیه را به عنوان $u'(x)$ جدا کرد، آنگاه می توان به راحتی انتگرال را حل کرد (و یا آن را به صورتی ساده تر تبدیل کرد). این عمل در واقع عکس عمل مشتق گیری زنجیره ای است:

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = \int f(u) \frac{du}{dx} dx = \int f(u) du$$

مثال ۱: نتیجه انتگرال مقابل را بیابید:
مشتق تابع $\cos x$ برابر $-\sin x$ می باشد؛ بنابراین می توانیم تابع u را به صورت زیر فرض کنیم:

$$u(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = -\sin x \quad \Rightarrow \quad du = -\sin x dx$$

$$\int \cos^5 x \sin x dx = - \int u^5 du = -\frac{u^6}{6} + C = -\frac{\cos^6 x}{6} + C \quad \text{با توجه به این نکته داریم:}$$

معمولا بهتر است که در انتهای حل، متغیر را به حالت اولیه بازگردانیم، مخصوصا وقتی که با انتگرال معین سروکار داریم؛ زیرا، در این حالت حدود انتگرال با متغیر اولیه داده شده است.

$$\int x \sqrt{2+3x} dx \quad \text{مثال ۲: نتیجه انتگرال مقابل را بیابید:}$$

$$u(x) = 2+3x \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 3 \quad \Rightarrow \quad du = 3 dx \quad \text{فرض کنید:}$$

همچنین داریم $x = (u-2)/3$ با توجه به این دو نکته داریم:

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{3+5x} dx &= \int \frac{(u-2)}{3} \sqrt{u} \frac{du}{3} = \frac{1}{9} \int \left(u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} \right) du = \frac{1}{9} \left(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2 \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) + C \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{2}{5} (2+3x)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} (2+3x)^{\frac{3}{2}} \right) + C \end{aligned}$$

انتگرال گیری به روش تغییر متغیر

مثال ۳: نتیجه انتگرال مقابل را بیابید:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx$$

مشتق تابع $\ln x$ برابر $1/x$ می باشد؛ بنابراین می توانیم تابع u را به صورت زیر فرض کنیم:

$$u(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{x}$$

با توجه به این نکته داریم:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

مثال ۴: نتیجه انتگرال مقابل را بیابید:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})}$$

فرض کنید:

$$u(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \text{or} \quad dx = 2u du$$

با توجه به این نکته داریم:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} = \int \frac{2u du}{u(1 + u)} = 2 \int \frac{du}{(1 + u)} = 2 \ln |1 + u| + C = 2 \ln |1 + \sqrt{x}| + C$$

تمرین برای روش تغییر متغیر (از کتاب سیلورمن)

$$\int (1+x^2)^{49} x \, dx \quad \cdot ۲ \quad \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\pi+2x}} \quad \cdot ۴ \quad \checkmark$$

$$\int (x^2-4x+4)^{-5/3} dx \quad \cdot ۶ \quad \checkmark$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx \quad \cdot ۸ \quad \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{1-x}} \quad \cdot ۱۰ \quad \checkmark$$

$$\int \cos^3 x \sin x \, dx \quad \cdot ۱۲ \quad \checkmark$$

$$\int \sin^4 x \cos x \, dx \quad \cdot ۱۴ \quad \checkmark$$

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx \quad \cdot ۱۶ \quad \checkmark$$

$$\int \cos(\tan x) \sec^2 x \, dx \quad \cdot ۱۸ \quad \checkmark$$

$$\int \frac{\sec^2 x^{1/3}}{x^{2/3}} dx \quad \cdot ۲۰ \quad \checkmark$$

$$\int (1-2x)^9 dx \quad \cdot ۱ \quad \checkmark$$

$$\int \sqrt{4+5x} \, dx \quad \cdot ۳ \quad \checkmark$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}} dx \quad \cdot ۵ \quad \checkmark$$

$$\int x \sqrt{1-x} \, dx \quad \cdot ۷ \quad \checkmark$$

$$\int \left(\frac{2+\sqrt{x}}{x} \right)^{1/2} dx \quad \cdot ۹ \quad \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} \quad \cdot ۱۱ \quad \checkmark$$

$$\int \cos^3 x \, dx \quad \cdot ۱۳ \quad \checkmark$$

$$\int \sin^5 x \, dx \quad \cdot ۱۵ \quad \checkmark$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}} dx \quad \cdot ۱۷ \quad \checkmark$$

$$\int x \sec x^2 \tan x^2 \, dx \quad \cdot ۱۹ \quad \checkmark$$

انتگرال گیری به روش جزء به جزء

بعضی اوقات اگر انتگرالده حاصلضرب چند تابع باشد، می توان انتگرال را به روشی سیستماتیک، به نام روش جزء به جزء، به انتگرال های ساده تر تبدیل کرد. مشتق حاصلضرب دو تابع را به یاد آورید:

$$\frac{d}{dx} (uv) = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$$

با انتگرال گیری از طرفین این رابطه داریم:

$$\int \frac{d}{dx} (uv) dx = \int v \frac{du}{dx} dx + \int u \frac{dv}{dx} dx \Rightarrow uv = \int u dv + \int v du \Rightarrow \int u dv = uv - \int v du$$

وقتی از روش جزء به جزء استفاده می کنیم که جواب $\int u dv$ را نمیدا کنیم، ولی جواب $\int v du$ را می دانیم.

مثال ۱: نتیجه انتگرال مقابل را بیابید:

$$\int x \sin x dx$$

فرض کنید که $u = x$ و $dv = \sin x dx$ ؛ بنابراین به راحتی (با یک انتگرال ساده) می توان فهمید که $v = -\cos x$ و همچنین $du = dx$. بنابراین با توجه به قاعده بالا داریم:

$$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C$$

چک کنید: اگر اجزاء را برعکس انتخاب می کردیم، یعنی $u = \sin x$ و $dv = x dx$ ، چه اتفاقی رخ می داد؟

مثال ۲: نتیجه انتگرال مقابل را بیابید:

$$\int \ln x dx$$

فرض کنید:

$$u = \ln x \Rightarrow du = dx/x \quad \text{and} \quad dv = dx \Rightarrow v = x$$

بنابراین داریم:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C$$

تمرین برای روش جزء به جزء (از کتاب سیلورمن)

$$\int (x-1) \ln x \, dx \quad \cdot ۲ \checkmark$$

$$\int x \cos x \, dx \quad \cdot ۱ \checkmark$$

$$\int x e^{-2x} \, dx \quad \cdot ۴ \checkmark$$

$$\int x^2 \ln x \, dx \quad \cdot ۳ \checkmark$$

$$\int e^{2x} \cos 3x \, dx \quad \cdot ۶ \checkmark$$

$$\int \arcsin x \, dx \quad \cdot ۵ \checkmark$$

$$\int \sinh^{-1} x \, dx \quad \cdot ۸ \checkmark$$

$$\int e^{-x} \sin 2x \, dx \quad \cdot ۷ \checkmark$$

$$\int x 3^x \, dx \quad \cdot ۱۰ \checkmark$$

$$\int (\ln x)^2 \, dx \quad \cdot ۹ \checkmark$$

$$\int x^2 \sin 2x \, dx \quad \cdot ۱۲ \checkmark$$

$$\int \sqrt{x} \ln x \, dx \quad \cdot ۱۱ \checkmark$$

$$\int x^3 \ln x \, dx \quad \cdot ۱۴ \checkmark$$

$$\int \sin x \cos 2x \, dx \quad \cdot ۱۳ \checkmark$$

$$\int x \csc^2 x \, dx \quad \cdot ۱۶ \checkmark$$

$$\int x^3 \cos x \, dx \quad \cdot ۱۵ \checkmark$$

انتگرال ترکیب توابع مثلثاتی

در این حالت، یعنی وقتی ترکیبی از توابع مثلثاتی را داشته باشیم، معمولا باید از اتحادهای مثلثاتی برای تسهیل انتگرال گیری استفاده کنیم:
مثال ۱: نتیجه انتگرال مقابل را بیابید:

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx = \int \sin^4 x \cos^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx$$

حال فرض کنید که $u = \sin x$ و $du = \cos x dx$ ؛ بنابراین

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos^5 x dx &= \int u^4 (1 - u^2)^2 du = \int u^4 (1 - 2u^2 + u^4) du = \\ &= \int (u^4 - 2u^6 + u^8) du = \frac{u^5}{5} - \frac{2u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + C \end{aligned}$$

مثال ۲: نتیجه انتگرال مقابل را بیابید (شیوه استفاده از اتحادهای $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$ و $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$)

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) dx \\ &= \frac{x}{8} + \frac{\sin 2x}{16} - \frac{1}{8} \int \cos^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \cos^3 2x dx + C_1 \end{aligned}$$

حل دو انتگرال آخر:

$$\int \cos^2 2x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{4} + C_2$$

$$\int \cos^3 2x dx = \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (1 - u^2) du = \frac{u}{2} - \frac{u^3}{6} + C_3 = \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin^3 2x}{6} + C_3$$

بنابراین درنهایت داریم:

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^2 2x}{48} + C$$

تمرین برای انتگرال ترکیب توابع مثلثاتی (از کتاب سیلورمن)

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx \quad . ۲ \checkmark$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx \quad . ۱ \checkmark$$

$$\int \sin^5 x \cos^4 x \, dx \quad . ۴$$

$$\int \sin^3 4x \cos^2 4x \, dx \quad . ۳ \checkmark$$

$$\int (\sin x)^{2/3} \cos^5 x \, dx \quad . ۵ \checkmark$$

$$\int \sin^7 x \sqrt{\cos x} \, dx \quad . ۵ \checkmark$$

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx \quad . ۸ \checkmark$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} \, dx \quad . ۷ \checkmark$$

$$\int_0^{\pi/6} \sin^3 s \cos^3 s \, ds \quad . ۱۰ \checkmark$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \, dx \quad . ۹ \checkmark$$

تغییر متغیرهای مثلثاتی و هذلولوی

بعضی از انتگرال ها را می توان با تغییر متغیرهای مثلثاتی به انتگرال های بسیار ساده تر تبدیل کرد.
مثال ۱: نتیجه انتگرال مقابل را بیابید:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

فرض کنید که $x = a \sin u \Rightarrow dx = a \cos u du$

که در آن $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$ ؛ بنابراین $\cos u$ نامنفی است و

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u} a \cos u du = a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 u} \cos u du = a^2 \int \cos^2 u du \\ &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2u) du = \frac{\sin 2u}{2} + \frac{u}{2} + C = \frac{\sin u \cos u}{2} + \frac{u}{2} + C \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \end{aligned}$$

مثال ۲: نتیجه انتگرال مقابل را بیابید (در درس فیزیک دو به دفعات با این انتگرال برخورد خواهید کرد.):

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

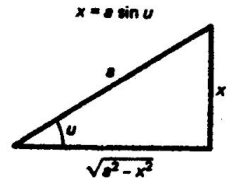
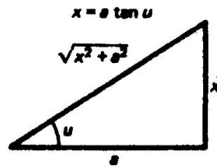
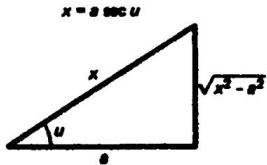
فرض کنید که $x = a \tan u \Rightarrow dx = a(1 + \tan^2 u) du$

که در آن $-\pi/2 < u < \pi/2$ ؛ بنابراین

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} &= \int \frac{a(1 + \tan^2 u) du}{(a^2 + a^2 \tan^2 u)^{3/2}} = \frac{a}{a^3} \int \frac{(1 + \tan^2 u) du}{(1 + \tan^2 u)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{\frac{du}{\cos^2 u}}{\left(\frac{1}{\cos^2 u}\right)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{\cos^3 u} = \frac{1}{a^2} \int \cos u du = \frac{1}{a^2} \sin u + C = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + C \end{aligned}$$

برای گام آخر اسلاید بعد را ببینید.

تغییر متغیرهای مهم مثلثاتی (از کتاب سیلورمن)



جدول توابع هذلولوی و اتحادهای مرتبط با آنها

Hyperbolic Functions

Definition

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\operatorname{coth} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

Hyperbolic Identities

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

Derivatives of Hyperbolic Functions

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{coth} x) = -\operatorname{csch} x$$

Derivatives of
Inverse Hyperbolic Functions

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}, |x| < 1$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{1-x^2}}, x \neq 0$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, 0 < x < 1$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{coth}^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}, |x| > 1$$

تمرین های مربوط به تغییر متغیرهای مثلثاتی و هذلولوی (از کتاب سیلورمن)

$$\int \sqrt{1-9x^2} dx \quad . ۱ \checkmark$$

$$\int \sqrt{4x^2+25} dx \quad . ۲ \checkmark$$

$$\int \sqrt{16x^2-1} dx \quad . ۳ \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} \quad . ۴ \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+64}} \quad . ۵ \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{36x^2-49}} \quad . ۶ \checkmark$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-3x^2}} dx \quad . ۷ \checkmark$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-25}} dx \quad . ۸ \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} \quad . ۹ \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-100x^2}} \quad . ۱۰ \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-2}} \quad . ۱۱ \checkmark$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad . ۱۲$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}} dx \quad . ۱۳$$

$$\int (1-x^2)^{3/2} dx \quad . ۱۴$$

$$\int (x^2-1)^{3/2} dx \quad . ۱۵$$

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx \quad . ۱۶$$

انتگرال توابع گویا

اگر انتگرالده یک تابع کسری باشد، و مشتق مخرج کسر در صورت کسر موجود باشد، می توان به راحتی با استفاده از روش تغییر متغیر انتگرال را حل کرد (به اسلایدهای بالا مراجعه کنید). ولی اگر کسر انتگرالده این خاصیت را نداشته باشد، آنگاه باید ریشه های مخرج کسر را یافته و کسر مورد نظر را بر حسب آن بسط داد. آنگاه، می توان انتگرال را به راحتی محاسبه کرد. روش کلی (و قضایای مربوطه) را در اینجا بحث نمی کنیم. ولی با یک مثال این روش را کمی باز می کنیم.

مثال ۱: نتیجه انتگرال مقابل را بیابید:

$$\int \frac{x^2 + 2}{(x-2)(x+1)^2} dx$$

بنا به یک قضیه مشهور در جبر، که از بیان آن در اینجا اجتناب می کنیم، چنین کسری را می توان به صورت زیر بسط داد:

$$\frac{x^2 + 2}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

که البته ضرایب A ، B و C باید تعیین شوند. برای تعیین این ضرایب دقت می کنیم که

$$\frac{x^2 + 2}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1) + C(x-2)}{(x-2)(x+1)^2} \Rightarrow$$

که از آن نتیجه می گیریم:

$$x^2 + 2 = A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1) + C(x-2) \Rightarrow x^2 + 2 = (A+B)x^2 + (2A-B+C)x + (A-2B-2C)$$

حال از تساوی دو طرف رابطه بالا باید نتیجه گرفت که ضرایب چندجمله ای در هر مرتبه باید در دو طرف برابر باشند؛ یعنی روابط

$$A + B = 1 \quad \text{and} \quad 2A - B + C = 0 \quad \text{and} \quad A - 2B - 2C = 2$$

$$A = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad B = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad C = -1$$

با حل این دستگاه سه معادله خواهیم داشت:

انتگرال توابع گویا

● حال می توان نوشت:

$$\frac{x^2 + 2}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{x-2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

یعنی انتگرال مورد نظر به صورت بسیار ساده تر زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2}{(x-2)(x+1)^2} dx &= \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2}{3} \ln |x-2| + \frac{1}{3} \ln |x+1| + \frac{1}{x+1} + C \end{aligned}$$

نکته اصلی در پیدا کردن انتگرال این توابع کسری پیچیده این است که بتوانیم آنها را به صورت بالا بسط دهیم. برای اینکار نیاز به دانستن دو قضیه مهم جبر دارید (سیلورمن، بخش ۷,۶ را ببینید).

● البته برخی انتگرال های کسری را می توان بسیار راحت تر حل کرد:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+5}{x-2} dx &= \int \frac{(x-2) + 2 + 5}{x-2} dx = \int \left(1 + \frac{7}{x-2} \right) dx = x + 7 \ln |x-2| + C \\ \int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx &= \int \frac{(x^2+1) - 1 - 1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{2}{x^2+1} \right) dx = x - 2 \arctan x + C \end{aligned}$$

تمرین های مربوط به انتگرال توابع گویا

$$\int \frac{8x-3}{4x+1} dx \quad \cdot 9 \checkmark$$

$$\int \frac{x}{x-2} dx \quad \cdot 8 \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{(x+2)(3x+4)} \quad \cdot 11 \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x-77} \quad \cdot 10 \checkmark$$

$$\int \frac{x}{x^2-x-6} dx \quad \cdot 13 \checkmark$$

$$\int \frac{x^2+2}{x^2-1} dx \quad \cdot 12 \checkmark$$

$$\int \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^2 dx \quad \cdot 15 \checkmark$$

$$\int \frac{x}{(2x+1)(2x+3)} dx \quad \cdot 14 \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{x^3+1} \quad \cdot 17 \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} \quad \cdot 16 \checkmark$$

$$\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)} dx \quad \cdot 19 \checkmark$$

$$\int \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} dx \quad \cdot 18 \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2} \quad \cdot 21 \checkmark$$

$$\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx \quad \cdot 20 \checkmark$$

$$\int \frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2} dx \quad \cdot 23 \checkmark$$

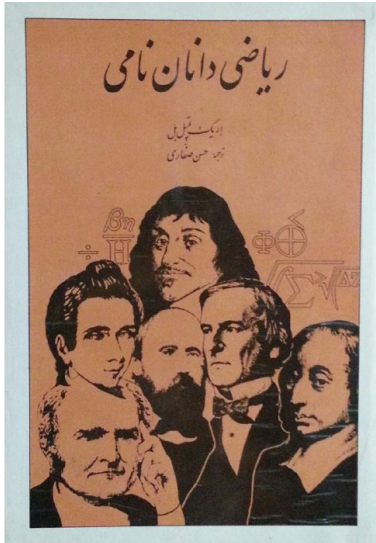
$$\int \frac{dx}{x^4-1} \quad \cdot 22 \checkmark$$

نکات مهم این درس

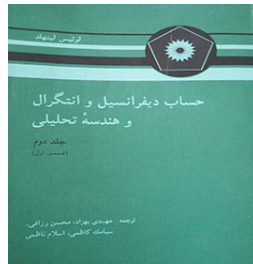
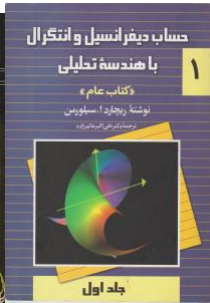
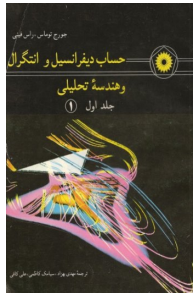
انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید نکات اصلی روش های انتگرال گیری اشاره شده در اینجا را بیان کنید.

اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید. هرچند، پیشنهاد بهتر آن است که بخش روش های انتگرال گیری یک کتاب استاندارد حساب دیفرانسیل و انتگرال را مطالعه کنید.

برای آشنایی با تاریخچه حسابان به کتاب های تاریخ ریاضیات مراجعه کنید.



از منابع اصلی برای یادگیری حسابان استفاده کنید: سیلورمن، توماس، لیتلهد، آپوستل.



کلاس درس دکتر سیاوش شهشهانی از دانشگاه صنعتی شریف (برای دروس ریاضی عمومی) را می توانید از آپارات دریافت کنید.

با سپاس از توجه شما

