

مبانی گرانش نیوتنی قانون گرانش جهانی نیوتن

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



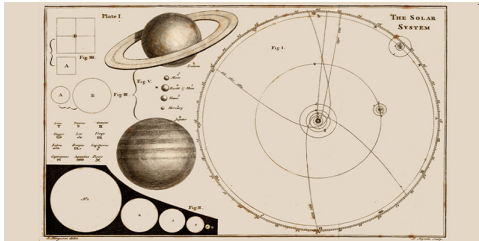
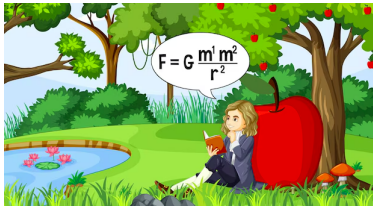
دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ قانون گرانش جهانی نیوتن
- قانون گرانش جهانی نیوتن
- گرانش در نزدیکی سطح زمین

سرفصل های گرانش نیوتنی

- مبحث "گرانش نیوتنی" یک موضوع بسیار گسترده است و در درس های فیزیک پایه ۱، مکانیک تحلیلی، نسبیت، گرانش، کیهان شناسی و ... کاربرد خواهد داشت. سرفصل های این درس به صورت ساده به قرار زیرند:



- ۱ قانون گرانش جهانی نیوتن
- ۲ مردی که دنیا را وزن کرد
- ۳ گرانش اجرام گسترده و قضیه های پوسته
- ۴ انرژی پتانسیل گرانشی
- ۵ قوانین کپلر و حرکت سیارات و ماهواره ها
- ۶ تاریخچه مکانیک سماوی
- ۷ مبانی گرانش اینشتین
- ۸ مسائل روز گرانش و کیهان شناسی
- مباحث پیشرفته تر در دروس مکانیک تحلیلی، نسبیت و درس های دیگر مطرح خواهند شد.

کشف اولین قانون بنیادی نیرو

شما احتمالا این داستان را شنیده اید: نیوتن زیر درخت سیب نشسته بود و سببی به سرش برخورد کرد. در نتیجه این اتفاق نیوتن استدلال کرد که احتمالا همه اجرام در عالم به سمت همدیگر جذب می شوند (همانطور که سیب به سمت زمین جذب می شود).! نیوتن داده های مربوط به حرکت ماه به دور زمین را بررسی کرد و از اینجا به این نتیجه بسیار مهم رسید که

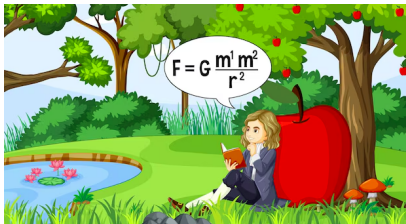
قانون نیروی حاکم در حرکت سیارات دقیقا همان قانون نیروی حاکم در حرکت سیب است.

این قانون را قانون گرانش جهانی نیوتن می نامند. این برای اولین بار در تاریخ بشر بود که حرکت اجرام زمینی و آسمانی با یک قانون توصیف می شد!

این داستان احتمالا چندان درست نیست و به ویژه شکل ریاضیاتی قانون گرانش نیز از آن نتیجه نمی شود. بررسی دقیق نوشته ها و نامه نگاری های نیوتن نشان می دهد که قانون گرانش بیشتر

به دلیل بررسی دقیق حرکت اجرام سماوی کشف شده است تا اجرام زمینی. هرچند، بررسی اجرام زمینی تاثیر عمیقی بر کشف قوانین حرکت (سه قانون نیوتن) داشته است.

تاریخچه کشف مکانیک نیوتنی و پیشرفت های مکانیک سماوی را در ادامه این درس خواهیم دید.



قانون گرانش جهانی نیوتن

- دنباله‌دار بزرگ ۱۶۸۰، که به دنباله‌دار کرچ (Kirch's Comet) هم مشهور است، نخستین دنباله‌داری است که با استفاده از تلسکوپ کشف شده‌است.
- در سال ۱۶۸۱ فلمستد (Flamsteed) پیشنهاد کرد که دنباله‌دارهایی که در نوامبر و دسامبر سال ۱۶۸۰ مشاهده شده‌اند، در واقع یک شیء‌اند. این شیء در ابتدا به سوی خورشید حرکت کرده و سپس از آن دور می‌شود.
- نیوتن در ابتدا با این پیشنهاد مخالف بود؛ ولی پس از مشاهده رصدهای فلمستد حدس زد که احتمالاً مدار این دنباله‌دار یک بیضی بسیار کشیده است.
- ادموند هالی این سوال را مطرح کرد که ”اگر مدار سیارات بیضی شکل باشد، آنگاه نیروی بین خورشید و سیارات به چه صورت با فاصله تغییر می‌کند؟“



قانون گرانش جهانی نیوتن

• هوک و نیوتن هر دو اعتقاد داشتند که نیروی گرانش به صورت عکس مجذور فاصله $F \propto 1/r^2$ تغییر می کند. ولی فقط نیوتن توانست اثبات ریاضی درست برای این گزاره را بیابد. در این راه نیوتن کتاب ”اصول ریاضی فلسفه طبیعی (۱۶۸۷)” را نوشت که به نظر بسیاری مهم ترین کتاب علمی نوشته شده تاکنون می باشد.



آیزاک نیوتن اصول ریاضی فلسفه طبیعی

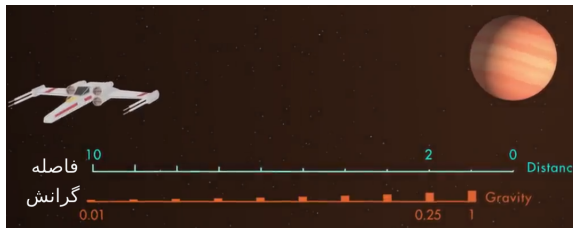
ترجمه
بهنام شیخ باقری



اندازه نیروی گرانش

- اندازه گیری های دقیق آزمایشگاهی و شواهد محکم نجومی به ما می گویند که اندازه نیروی گرانش بین دو جسم به سه عامل بستگی دارد:
- به جرم جسم اول.
- به جرم جسم دوم (یعنی حاصلضرب دو جسم)
- عکس مجذور فاصله (و یا عکس توان دوم فاصله).
- بنابراین به لحاظ ریاضیاتی می توان نوشت (علامت $\propto$ یعنی متناسب است با):

$$\text{نیروی گرانش} \propto \frac{\text{جرم جسم دوم} \times \text{جرم جسم اول}}{\text{فاصله} \times \text{فاصله}}$$



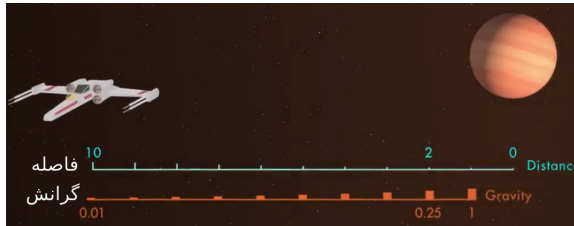
اندازه نیروی گرانش

نیروی گرانش:

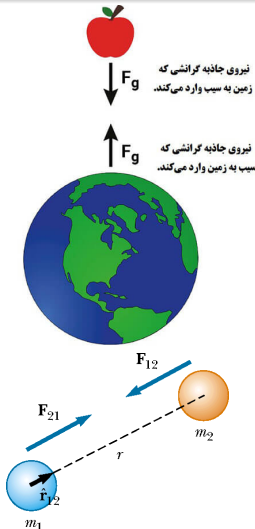
$$\text{نیروی گرانش} \propto \frac{\text{جرم جسم دوم} \times \text{جرم جسم اول}}{\text{فاصله} \times \text{فاصله}}$$

مثلا در شکل زیر، اگر جرم سفینه دو برابر شود، نیروی گرانش بین سفینه و سیاره دو برابر خواهد شد. اگر جرم سیاره نیز دو برابر شود، باز هم نیروی گرانش بین این دو جسم دو برابر خواهد شد.

همچنین، اگر فاصله بین سفینه و سیاره ده برابر شود، نیروی گرانش بین سفینه و سیاره به مقدار $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$ برابر کوچکتر خواهد شد.



ویژگی های دیگر نیروی گرانش



نیروی گرانش همیشه جاذبه است. از طرفی نیروی الکتریکی می تواند جاذبه و یا دافعه باشد.

نیروی گرانش وارد شده از جسم اول به جسم دوم دقیقا برابر، ولی در جهت مخالف، نیروی گرانش وارد شده از جسم دوم به جسم اول است.

چون دو نیرو با هم برابر هستند، اگر یکی از دو جسم بسیار بزرگتر از جسم دیگر باشد، جسم بزرگ عملا ثابت باقی می ماند و جسم کوچک به سمت آن حرکت می کند.

مثلا سیب و زمین به همدیگر نیرویی برابر وارد می کنند. ولی از آنجا که سیب بسیار سبک تر از زمین است، سیب حرکت می کند ولی زمین تقریبا ثابت باقی می ماند.

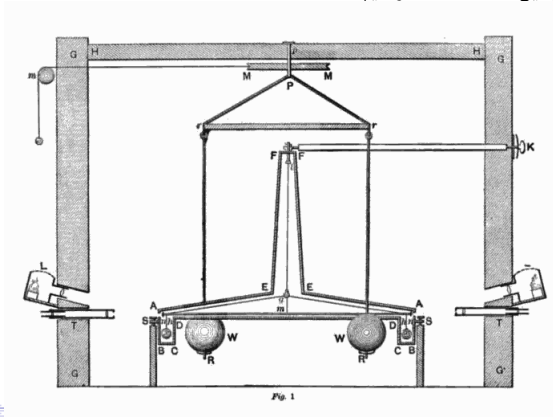
شکل دقیق ریاضیاتی قانون گرانش نیوتن را در زیر می بینید (حرف G نشان دهنده ثابت نیوتن است.)

$$F_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{12} \quad F_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{21}$$

قانون گرانش نیوتن و سه قانون حرکت نیوتن تا حد خوبی همه پدیده های گرانشی در منظومه شمسی، و فراتر از آن، را توصیف می کنند.

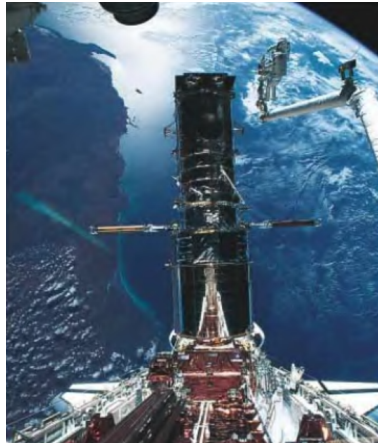
ثابت گرانش جهانی نیوتن

نیروی گرانش ضعیف ترین نیرو در بین چهار نیروی بنیادی طبیعت است و به همین دلیل اندازه گیری دقیق این نیرو واقعا چالش برانگیز است. در واقع در حال حاضر برخی از پیشرفته ترین آزمایشگاه های فیزیک (مانند LIGO) به اندازه گیری نیروی گرانش اختصاص دارند. در نتیجه، تعیین ثابت گرانش جهانی G نیز همیشه مشکل بوده است. در جلسه بعد درباره یک روش برای تعیین این ثابت بحث خواهیم کرد.

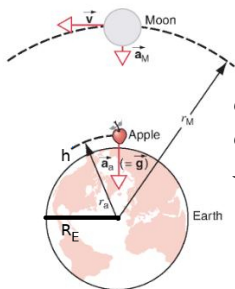


شتاب جاذبه در زندگی روزمره ما

- بنا به قانون گرانش نیوتن که در بخش قبل دیدیم، نیروی گرانش (و بنابراین شتاب سقوط آزاد) به فاصله بستگی دارد. با این وجود ما همیشه نیروی گرانش (وزن) در نزدیکی سطح زمین را برابر با $W = mg$ و شتاب گرانش را برابر با g فرض می کنیم. چرا؟



گرانش در نزدیکی سطح زمین با تقریب خوبی ثابت است.



آزمایش های دقیق نشان داده اند که گرانش در نزدیکی سطح زمین تقریباً ثابت است و مقدار آن برابر $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ می باشد.

البته ما انتظار چنین رفتاری را با توجه به قانون گرانش نیوتن داریم. فرض کنید که سیبی به جرم m در فاصله h از سطح زمین قرار دارد. در این صورت، اندازه نیروی وارده از طرف زمین به سیب (و بالعکس) برابر است با

$$F = G \frac{m M_E}{(R_E + h)^2}$$

که در آن M_E جرم زمین و $r_a = R_E + h$ فاصله سیب تا مرکز زمین است. این فاصله با شعاع زمین، یعنی $R_E = 6370 \text{ km}$ ، تقریباً برابر است (یعنی $h \ll R_E$). با توجه به مقدار جرم زمین (جدول انتهای کتاب) و مقدار ثابت نیوتن، شتاب حرکت سیب به سمت زمین به صورت زیر به دست می آید:

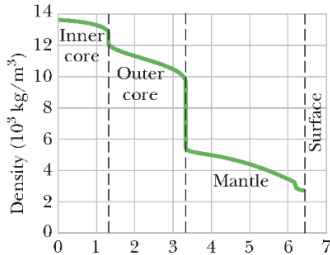
$$a = \frac{F}{m} = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24}}{(6.37 \times 10^6)^2} \simeq 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

کاهش مقدار شتاب سقوط آزاد با افزایش فاصله نسبت به سطح زمین (h برحسب کیلومتر) را در جدول مقابل می بینید.

TABLE 14.1 Free-Fall Acceleration g' at Various Altitudes Above the Earth's Surface

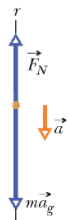
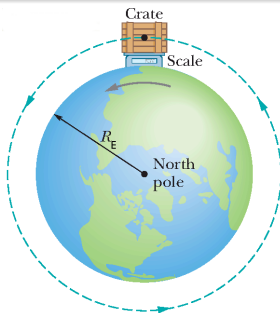
Altitude h (km)	g' (m/s^2)
1 000	7.33
2 000	5.68
3 000	4.53
4 000	3.70
5 000	3.08
6 000	2.60
7 000	2.23
8 000	1.93
9 000	1.69
10 000	1.49
50 000	0.13
∞	0

عوامل موثر بر شتاب سقوط آزاد



- به دلایل بسیاری، مانند پخ بودن کره زمین، ناهمگونی های توزیع جرم زمین و چرخش زمین مقدار شتاب گرانش در همه نقاط نزدیک به سطح دقیقاً برابر نیست.
- تغییرات چگالی زمین (از هسته تا پوسته) را در شکل مقابل می بینید.
- تاثیر تقریبی عوامل مختلف در اندازه گیری شتاب گرانش را در شکل زیر ببینید.



تأثیر چرخش زمین بر اندازه گیری g 

● شکل مقابل را در نظر بگیرید. می خواهیم وزن یک جعبه F_N را در استوای زمین بیابیم. معمولاً برای چنین مساله ای می نویسیم

$$F_N - ma_g = 0 \Rightarrow F_N = ma_g = m \frac{GM_E}{R_E^2} \Rightarrow g = \frac{GM_E}{R_E^2}$$

یعنی فرض می کنیم که زمین یک دستگاه لخت است و بنابراین نیروی وارده به ترازو برابر با نیروی گرانش زمین است.

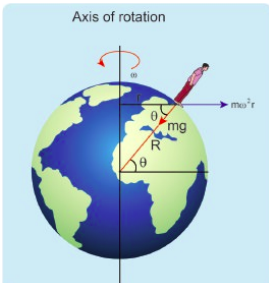
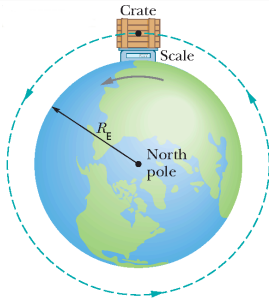
● ولی در واقع زمین یک دستگاه لخت نیست، بلکه با شتاب نسبتاً کوچکی (نسبت به g) در حال حرکت است. مثلاً، با توجه به اینکه زمین به دور محور خود با سرعت زاویه ای $\omega = 2\pi/24 \text{ h}$ در حال دوران است، جعبه شتابی برابر با $R_E \omega^2$ را درک خواهد کرد. بنابراین می توان نوشت:

$$F_N - ma_g = -mR_E \omega^2 \Rightarrow g = \frac{GM_E}{R_E^2} - R_E \omega^2$$

پرسش: چرا جهت شتاب $a = R_E \omega^2$ به سمت مرکز است؟

● بنابراین دوران زمین بر اندازه گیری شتاب سقوط آزاد اثر خواهد گذاشت.

● حالا مساله را از دید ناظر نالخت ببینید. ↓↓↓↓

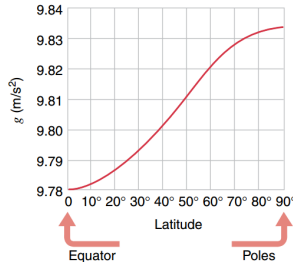
تأثیر چرخش زمین بر اندازه گیری g 

- از دید یک ناظر نالخت، یک نیروی گریز از مرکز معادل با $mR_E\omega^2$ وارد خواهد شد. در نتیجه باز هم شتاب سقوط آزاد به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$F_N - ma_g + mR_E\omega^2 = 0 \Rightarrow g = \frac{GM_E}{R_E^2} - R_E\omega^2$$

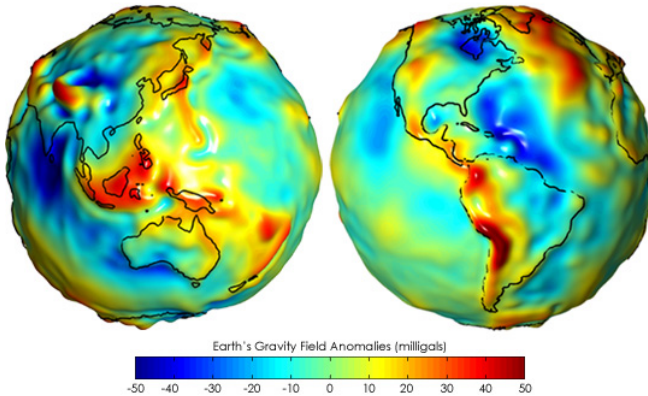
- اگر اندازه گیری در عرض های جغرافیایی بالاتر و یا پایین تر از خط استوا انجام شود، شعاع دوران کاهش پیدا کرده و در نتیجه مقدار شتاب $r\omega^2$ کمتر می شود. بنابراین، با افزایش عرض جغرافیایی شتاب سقوط آزاد عموماً افزایش می یابد و در قطبین به بیشترین مقدار خود می رسد.
توجه:

$$r = R_E \cos \theta$$



اندازه گیری ماهواره ای و دقیق g

- نتایج اندازه گیری g از ماهواره GRACE را ببینید.



تمرین

- تمرین: الف) فرض کنید فضاوردی به ارتفاع $l = 1/70 \text{ m}$ در شاتل خود در فاصله $r = 10^6 \times 6/77$ از مرکز زمین ایستاده است و پای او به سمت مرکز زمین است. اختلاف شتاب گرانشی وارد شده به سر و کف پای فضاورد را بیابید.
- ب) اگر این فضاورد در همین فاصله از مرکز یک سیاهچاله به جرم $M = 1/99 \times 10^{31} \text{ kg}$ در حال دوران باشد، اختلاف شتاب گرانشی وارد شده به سر و کف پای فضاورد را بیابید.



تمرین

- تمرین: الف) فرض کنید فضاوردی به ارتفاع $l = 1/70 \text{ m}$ در شاتل خود در فاصله $r = 6/77 \times 10^6 \text{ m}$ از مرکز زمین ایستاده است و پای او به سمت مرکز زمین است. اختلاف شتاب گرانشی وارد شده به سر و کف پای فضاورد را بیابید.
- ب) اگر این فضاورد در همین فاصله از مرکز یک سیاهچاله به جرم $M = 1/99 \times 10^{31} \text{ kg}$ در حال دوران باشد، اختلاف شتاب گرانشی وارد شده به سر و کف پای فضاورد را بیابید.
- پاسخ: می توان پاسخ این تمرین را با استفاده از محاسبه زیر یافت:

$$a_t - a_f = \frac{GM_E}{(r+l)^2} - \frac{GM_E}{r^2}$$

این محاسبه را انجام دهید و نتیجه را بیابید.

ولی راه بهتر استفاده از حساب دیفرانسیل است. با توجه به اینکه ارتفاع فضاورد نسبت به فاصله او تا مرکز زمین بسیار کوچکتر است، می توان نوشت:

$$da = -2 \frac{GM_E}{r^3} dr = -2 \frac{6/67 \times 10^{-11} \times 5/98 \times 10^{24}}{(6/77 \times 10^6)^3} \times 1/70 = -4/37 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$$

این اختلاف شتاب باعث یک نیروی جذر و مدی می شود. همچنین برای سیاهچاله مورد نظر داریم:

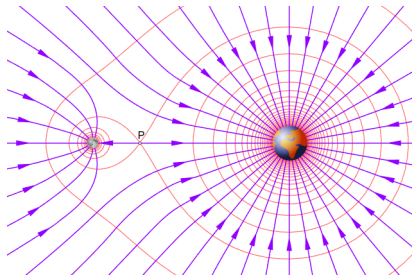
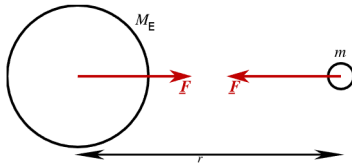
$$da = -2 \frac{GM}{r^3} dr = -2 \frac{6/67 \times 10^{-11} \times 1/99 \times 10^{31}}{(6/77 \times 10^6)^3} \times 1/70 = -14/5 \text{ m/s}^2$$

اسپاگتی شدن!

- این پدیده در نزدیکی سیاهچاله واقعا رخ می دهد و آن را اسپاگتی شدن می نامند.



میدان گرانشی



تا وقتی که درباره نظریه نیوتنی گرانش بحث می کنیم، منظور از میدان گرانش همان g است.

فرض کنید می خواهیم میدان گرانشی یک جسم مانند کره زمین را در یک نقطه مشخص تعیین کنیم. برای اینکار یک جسم آزمون (جسمی با جرم بسیار کوچکتر از جسم اصلی) مانند یک سیب به جرم m را در آن نقطه قرار داده و نیروی F وارده به آن از طرف زمین را اندازه می گیریم. در این صورت اندازه میدان گرانشی زمین در آن نقطه برابر است با

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM_E m}{r^2 m} = \frac{GM_E}{r^2}$$

و جهت میدان گرانشی همان جهت نیروی وارد شده است.

به خطوط (برداری) میدان گرانشی سیستم زمین و ماه در شکل مقابل دقت کنید.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید مفهوم قانون گرانش جهانی نیوتن را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

۱ نیروی گرانش بین دو جرم به چه پارامترهایی بستگی دارد؟

۲ درباره مسیرهای ممکن برای حرکت سیارات تحت تاثیر قانون گرانش نیوتن تحقیق کنید.

۳ درباره نظریه های گرانش قبل از گالیله تحقیق کنید.

۴ درباره نظریه های گالیله درباره گرانش تحقیق کنید.

۵ درباره نحوه پیشرفت گرانش نیوتنی تحقیق کنید.

۶ درباره نظریه گرانش اینشتین (نسبیت عام) تحقیق کنید.

۷ درباره روش های اندازه گیری نیروی گرانش تحقیق کنید.

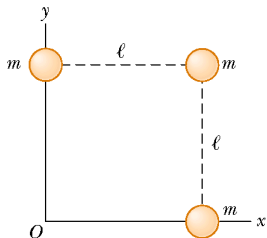
۸ سه عامل اصلی در مقدار افت و خیز در گرانش محلی را توضیح دهید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

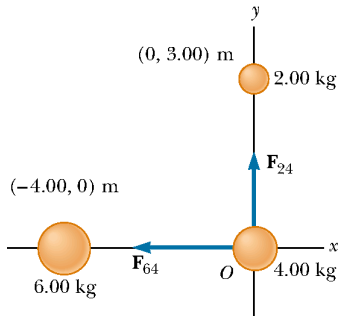
فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.



تمرین

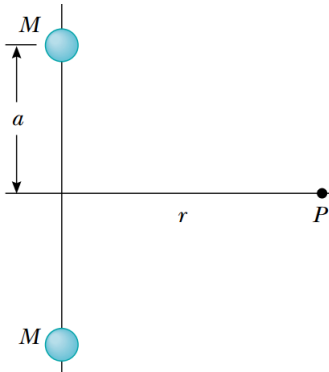


مطابق شکل مقابل، سه جسم با جرم برابر m در سه گوشه یک مربع قرار گرفته اند. اندازه و جهت میدان گرانشی g را در گوشه چهارم این مربع بیابید.



سه جسم همگن به جرم های 2.00 kg ، 4.00 kg و 6.00 kg مطابق شکل مقابل در نزدیکی هم قرار گرفته اند. اندازه و جهت نیروی وارده به جرم 4.00 kg از طرف دو جرم دیگر را بیابید.

تمرین

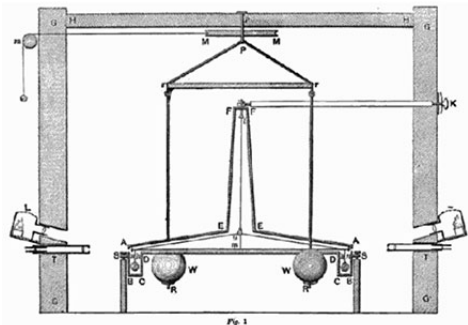


اندازه و جهت میدان گرانشی سیستم مقابل را در نقطه P بیابید.

سوال بسیار بسیار سخت: با توجه به سه عامل اصلی یاد شده در گرانش موضعی، به نظر شما مقدار شتاب جاذبه در کدام نقطه ایران کمترین و در کجا بیشترین است؟

مبحث بعدی: مردی که دنیا را وزن کرد

- در جلسه بعد با روش کاوندیش در استفاده از ترازوی پیچشی برای اندازه گیری ثابت گرانش جهانی نیوتن G آشنا خواهیم شد. پس از تعیین G می توان به راحتی جرم زمین را اندازه گیری کرد.



H. Cavendish

منابع

- ❶ Halliday, David, Robert Resnick, and Jearl Walker; Fundamentals of physics, 10th edn. John Wiley & Sons, 2014.
- ❷ Halliday, D., R. Resnick, and K. S. Krane. "Physics, 5th edn." (2002).
- ❸ Ohanian, Hans C., and John T. Markert. Physics for engineers and scientists, 3th edn. 2007.
- ❹ Young, Hugh D., Roger A. Freedman, and Albert Lewis Ford. Sears and Zeman-sky's university physics, 13th edn. Pearson education, 2006.

با سپاس از توجه شما

