

فیزیک الکتریسیته و مغناطیس

فصل دهم: قانون القای فارادی و مقدمه ای بر قوانین ماکسول

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در بهار سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

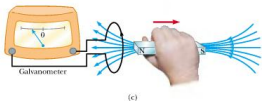
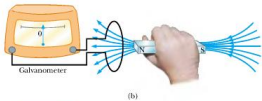
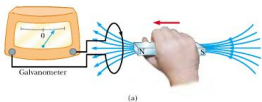
فصل دهم: قانون القای فارادی و مقدمه ای بر قوانین ماکسول

میدان مغناطیسی القایی و تعمیم قانون آمپر

قوانین ماکسول



یادآوری قانون القای فارادی



اندازه نیروی محرکه القایی در یک مدار برابر است با آهنگ تغییر در شار مغناطیسی نسبت به زمان:

$$|\mathcal{E}| = \left| \frac{d\Phi_B}{dt} \right|$$

در اینجا نیروی محرکه القایی برابر است با انتگرال میدان الکتریکی روی حلقه بسته مورد نظر؛ یعنی

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

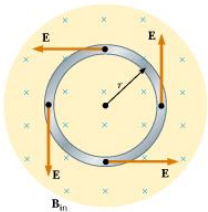
قانون لنز برای تعیین جهت جریان القایی: شار میدان مغناطیسی ناشی از جریان القایی به صورتی است که با تغییر شار عامل القا مقابله می کند. شکل مقابل را ببینید.

جمع بندی قانون القای فارادی: هرگاه میزان شار مغناطیسی که از یک مدار بسته می گذرد تغییر کند، نیروی محرکه ای در آن القا می شود که بزرگی آن با آهنگ تغییرات شار مغناطیسی متناسب است:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

شکل ها از ویکی پدیا و مبانی فیزیک.

نیروی محرکه القا شده و میدان الکتریکی



شکل از مبانی فیزیک.

پس با استفاده از قانون القای فارادی داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$E = - \frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

فرض کنید که حلقه رسانایی مطابق شکل مقابل درون میدان مغناطیسی متغیری قرار گرفته است. تغییر در میدان مغناطیسی باعث بوجود آمدن نیروی محرکه الکتریکی القایی می شود؛ بنابراین، میدان الکتریکی در حلقه وجود خواهد داشت. می خواهیم این میدان الکتریکی را بیابیم.

با توجه به تقارن مساله، اندازه میدان الکتریکی روی تمام نقاط حلقه یکسان است؛ هرچند جهت آن تغییر می کند. بنابراین داریم

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint E ds \cos 0 = E \oint ds = E(2\pi r)$$

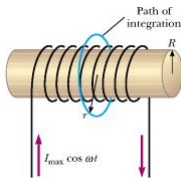
تمرین: نشان دهید که همین نتیجه را می توان با بررسی کار نیروی الکتریکی وارد بر یک بار آزمون در حلقه مورد نظر هم به دست آورد.

شار میدان مغناطیسی گذرنده از حلقه نیز برابر است با $\Phi_B = \pi r^2 B$. بنابراین، تغییر در شار میدان مغناطیسی برابر است با

$$\frac{d}{dt} \Phi_B = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

زیرا که شعاع حلقه ثابت است.

نیروی محرکه الکتریکی القا شده در یک سیموله



شکل از مبانی فیزیک .

پاسخ ب) حلقه در این حالت داخل سیموله قرار می گیرد. این حلقه در شکل بالا نشان داده نشده است. شار مغناطیسی گذرنده از حلقه مورد نظر برابر است با $BA = B\pi r^2$. بنابراین از قانون القای فارادی داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} = -\pi r^2 \mu_0 n \frac{dI}{dt}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \pi n I_{max} r^2 \mu_0 \omega \sin \omega t$$

از طرفی داریم $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E(2\pi r)$ ؛ بنابراین

$$E = \frac{\mu_0 \omega n I_{max}}{2} r \sin \omega t$$

سیموله طولی به شعاع R شامل n دور سیم بر واحد طول می باشد. جریان گذرنده از سیموله به صورت

$$I(t) = I_{max} \cos \omega t$$

با زمان تغییر می کند. در اینجا I_{max} بیشینه جریان و ω فرکانس زاویه ای تغییر در جریان است. اندازه میدان الکتریکی القا شده در نتیجه تغییر جریان را در الف) خارج و ب) داخل سیموله به فاصله r از مرکز آن به دست آورید.

پاسخ الف) حلقه آبی رنگ در شکل مقابل را در نظر بگیرید. میخواهیم قانون القای فارادی را برای این حلقه به شعاع r محاسبه کنیم. میدان مغناطیسی درون سیموله برابر است با $B = \mu_0 n I$ و میدان خارج سیموله برابر صفر می باشد. شار مغناطیسی گذرنده از حلقه آبی رنگ برابر است با $BA = B\pi R^2$. بنابراین از قانون القای فارادی داریم:

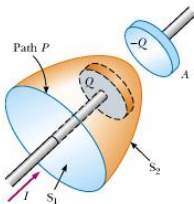
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\pi R^2 \frac{dB}{dt} = -\pi R^2 \mu_0 n \frac{dI}{dt}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \pi n I_{max} R^2 \mu_0 \omega \sin \omega t$$

از طرفی داریم $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E(2\pi r)$ ؛ بنابراین

$$E = \frac{R^2 \mu_0 \omega n I_{max}}{2r} \sin \omega t$$

میدان مغناطیسی القایی و جریان جابه جایی



شکل از مبانی فیزیک هالیدی .

شکل مقابل یک خازن در حال شارژ را نشان می دهد. جریان I از سمت چپ به سمت راست وجود دارد. اگر مسیر حلقوی P با سطح S_1 را در نظر بگیریم، آنگاه می توانیم با استفاده از قانون آمپر

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \Rightarrow B \neq 0 \text{ for } S_1$$

میدان مغناطیسی را در اطراف سیم به دست آوریم. هرچند، اگر مسیر حلقوی P را اینبار با سطح S_2 در نظر بگیریم، آنگاه می توانیم ببینیم که جریان محصور در حلقه صفر بوده و بنابراین میدان مغناطیسی به دست آمده از قانون آمپر

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \Rightarrow B = 0 \text{ for } S_2$$

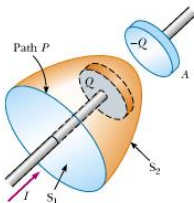
نیز صفر خواهد بود. این یک تناقض است! نتیجه فیزیکی در دنیای واقعی نمی تواند به انتخاب ریاضیاتی ما برای سطوح، حلقه ها، دستگاه مختصات و ... ربط داشته باشد.

ماکسول با نبوغ خود فهمید که اگر تغییر در شار میدان مغناطیسی باعث القای میدان الکتریکی می شود (قانون القای فارادی)، تغییر در شار میدان الکتریکی نیز باید باعث القای میدان مغناطیسی شود. او همچنین فهمید که اضافه کردن یک جمله متناسب با تغییر در شار میدان الکتریکی به صورت

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

در قانون آمپر می تواند تناقض بالا را حل کند و تقارن با قانون القای فارادی را حفظ کند.

میدان مغناطیسی القایی و جریان جابه جایی



حل تناقض: وقتی بار به خازن منتقل می شود، میدان الکتریکی با آهنگ یکنواخت dE/dt تغییر می یابد. خطوط این میدان الکتریکی از سطح S_1 عبور می کنند؛ بنابراین، ماکسول دریافت که تغییر در شار میدان الکتریکی گذرنده از سطح S_2 باید یک میدان مغناطیسی ایجاد کند.

قانون آمپر-ماکسول به صورت عمومی

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

نوشته می شود.

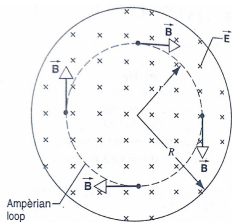
$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

کمیت

را جریان جابه جایی می نامند. هرچند واقعا این کمیت به جریان الکتریکی ربطی ندارد (یعنی شارش ذرات باردار اتفاق نمی افتد)؛ ولی با توجه به اینکه در سمت راست قانون آمپر-ماکسول از نظر ریاضیاتی نقش یک جریان را بازی می کند، به این نام مشهور شده است.

شکل از مبانی فیزیک هالیدی .

مثال



یک خازن تخت دایروی به شعاع R ، مانند شکل صفحه قبل، در حال شارژ شدن است. میدان مغناطیسی القا شده در اثر تغییر در میدان الکتریکی را برای شعاع های داخل و خارج خازن بیابید.

میدان مغناطیسی القا شده در داخل خازن:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \Rightarrow B(2\pi r) = \mu_0 \epsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}$$

شکل از فیزیک هالیدی .

جریان جابه جایی در هر دو حالت را می توان به راحتی با استفاده از رابطه

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

به دست آورد.

داخل: $I_d = \epsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}$

خارج: $I_d = \epsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt}$

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 \epsilon_0 r \frac{dE}{dt} \quad \text{for } r \leq R$$

میدان مغناطیسی القا شده در خارج خازن:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \Rightarrow B(2\pi r) = \mu_0 \epsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt}$$

$$B = \frac{\mu_0 \epsilon_0 R^2}{2r} \frac{dE}{dt} \quad \text{for } r \geq R$$

جمع بندی قوانین ماکسول

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Gauss's law

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

Gauss's law in magnetism

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Faraday's law

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Ampère–Maxwell law

شکل از مبانی فیزیک.

دسته معادلات بالا به قوانین الکترومغناطیس ماکسول مشهور هستند. این معادلات (به علاوه نیروی لورنتز و نسبیت خاص) اساس توصیف فرایندهای الکترومغناطیسی هستند و طیف بسیار گسترده ای از پدیده های را توصیف می کنند. در واقع معادلات ماکسول در توصیف تمام پدیده های روزمره، علمی و فنی (به جز گرانش) سهم دارند. این معادلات، در ریز مقیاس، فیزیک ذرات تشکیل دهنده ماده را به دقت پیش بینی کرده و در بزرگ مقیاس تابش زمینه کیهانی و توزیع ماده در جهان را به دست می دهند.

معادلات ماکسول



تمام دستگاه های الکتریکی، بدون استثنا، بر اساس بررسی دقیق معادلات ماکسول ساخته شده اند.

مهندسی انگلیسی به نام هویساید، با ابداع فرمولبندی برداری و دیگر نوآوری های ریاضی، توانست اهمیت این معادلات را به جامعه علمی بشناساند.

مهندسی ایتالیایی به نام مارکونی توانست با استفاده از این معادلات اولین سیگنال رادیویی را ارسال و دریافت کند.

علاوه بر کاربردهای بیشمار علمی و فنی، اهمیت معادلات ماکسول در اینجاست که این دسته معادله اولین و بزرگترین "قوانین وحدت" در فیزیک را به دست می دهند.

پیش از این قوانین، مباحث الکتریسیته، مغناطیس و نور کاملاً مجزا محسوب می شدند. ولی، ماکسول نشان داد که همه این پدیده ها را می توان با استفاده از چهار معادله بالا توصیف کرد.

ماکسول توانست نشان دهد که نور یک موج الکترومغناطیسی است و سرعت نور با استفاده از رابطه

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

به دست می آید.

شکل ها از ویکی پدیا .

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید ویژگی های مهم القای مغناطیسی و قوانین ماکسول را بیان کنید. برای اینکار لازم است بتوانید به سوال های زیر پاسخ دهید:

۱. القای مغناطیسی چیست و چگونه رخ می دهد؟
۲. جریان جابه جایی چیست؟
۳. چرا قانون آمپر به خودی خود ناقص است؟ چگونه می توان آن را تکمیل کرد؟
۴. قوانین ماکسول را بنویسید.
۵. سرعت نور چه ارتباطی با ثوابت گذردهی الکتریکی و مغناطیسی خلاء دارد؟

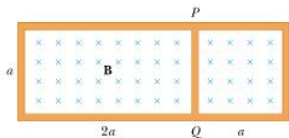
اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای جذب مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوال زیر محک زده و تقویت کنید.



تمرین

نیروی محرکه القا شده در حلقه:



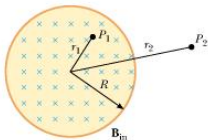
در شکل مقابل، حلقه در یک میدان مغناطیسی وابسته به زمان به صورت $B = (100 \times 10^{-3} \text{ T/s}) t$ قرار داده شده است. فرض کنید که مقاومت بر واحد طول حلقه برابر $1 \Omega/m$ می باشد.

مقدار جریان القا شده در بخش PQ مدار به طول $a = 65 \text{ cm}$ را بیابید.

شکل از مبانی فیزیک هالیدی.

تمرین

نیروی محرکه القایی:



شکل از مبانی فیزیک هالیدی.

در شکل مقابل میدان مغناطیسی درون سو به صفحه کاغذ است و با زمان به صورت $B = (0.30t^2 + 1.40) T$ تغییر می کند. میدان در دایره ای به شعاع $R = 2.50 \text{ cm}$ وجود دارد.

الف) اندازه و جهت میدان الکتریکی القا شده در نقطه P_1 را در زمان $t = 3.00 \text{ s}$ و به فاصله $r_1 = 0.20 \text{ m}$ بیابید.

ب) اندازه و جهت میدان الکتریکی القا شده در نقطه P_2 را در زمان $t = 3.00 \text{ s}$ و به فاصله $r_2 = 3.00 \text{ cm}$ بیابید.

تمرین

تعمیم قوانین ماکسول:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Gauss's law

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

Gauss's law in magnetism

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Faraday's law

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Ampère–Maxwell law

شکل از مبانی فیزیک هالیدی.

اگر تک قطبی مغناطیسی وجود داشته باشد و آن را با qm نشان دهیم، آنگاه معادلات ماکسول چگونه تغییر می کنند؟

مباحث بعدی

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Gauss's law

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

Gauss's law in magnetism

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Faraday's law

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Ampère–Maxwell law

شکل از مبانی فیزیک.

حال که قوانین ماکسول را در دست داریم می توانیم بسیاری از نتایج الکترومغناطیس را، حتی با ریاضیات مفروض در این درس، به دست آوریم. به این منظور در آینده، خواص مغناطیسی مواد، القاییدگی، جریان های AC و امواج الکترومغناطیسی را در نظر خواهیم گرفت.

مراجع

- ❶ Halliday, D., R. Resnick, and K. S. Krane. "Physics, 5th edn." (2002).
- ❷ Halliday, David, Robert Resnick, and Jearl Walker; Fundamentals of physics, 10th edn. John Wiley & Sons, 2014.
- ❸ Ohanian, Hans C., and John T. Markert. Physics for engineers and scientists, 3th edn. 2007.
- ❹ Young, Hugh D., Roger A. Freedman, and Albert Lewis Ford. Sears and Zeman-sky's university physics, 13th edn. Pearson education, 2006.

با سپاس از توجه شما

