

مقدمه روش های ریاضی در علوم فیزیکی

آشنایی با سری های نامتناهی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

خلاصه ای از سری ها

سری ها جمع بندی هستند؛ بنابراین ویژگی های اصلی عمل جمع بندی برای آنها هم برقرار است:

$$\sum_{i=m}^n (Af(i) + Bg(i)) = A \sum_{i=m}^n f(i) + B \sum_{i=m}^n g(i)$$

مثال:

$$\sum_{i=1}^5 (3i - 2i^2) = 3 \sum_{i=1}^5 i - 2 \sum_{i=1}^5 i^2$$

تمرین: نشان دهید که دو طرف رابطه بالا برابرند.
قاعده مهم لغزاندن اندیس ها:

$$\sum_{i=m}^{n+m} f(i) = \sum_{i=0}^n f(i+m)$$

تمرین: با نوشتن چند جمله اول از دو طرف رابطه بالا، نشان دهید که دو طرف رابطه با هم برابر هستند.

تمرین: نشان دهید که

$$\sum_{i=1}^n 1 = n$$

نماد Σ را سیگما می نامند (یکی از حروف یونانی).

در ریاضیات معمولاً یک سری به عنوان مجموع یک دنباله معرفی می شود:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

به حد بالا و حد پایین سری توجه کنید. سری ها می توانند نامتناهی نیز باشند:

$$\sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

سه نقطه در انتهای سری به معنی نامتناهی بودن آن است.
به مثال های دیگری از سری ها توجه کنید:

$$\sum_{i=0}^n t^i = t^0 + t^1 + t^2 + \dots + t^n$$

$$\sum_{m=0}^6 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$\sum_{m=-3}^2 \frac{1}{m+1} = \frac{1}{-2} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

یک سری را در حالت کلی می توان به صورت زیر نشان داد:

$$\sum_{i=m}^{\infty} f(i)$$

تمرین



نشان دهید که ❶

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

اثبات (منسوب به گوس):

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$S = n + n-1 + n-2 + \dots + 1$$

با جمع طرفین رابطه بالا با هم داریم:

$$2S = n(n+1) \Rightarrow S = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

نشان دهید که ❷

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

راهنمایی: اتحاد زیر را n بار با هم جمع کنید:

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

نشان دهید که ❸

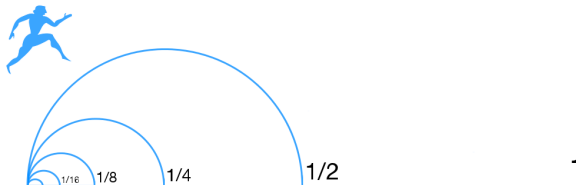
$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

سری های نامتناهی: یادگار فلسفه باستان

- پارادوکس زنو (در واقع یکی از پارادوکس های حرکت زنو): آنچه که در حرکت است باید قبل از رسیدن به هدف، به نیمه راه برسد. ولی قبل از رسیدن به میانه مسیر باید یک چهارم مسیر را طی کند، پیش از آن باید یک هشتم مسیر را طی کند و پیش از آن یک شانزدهم مسیر را، و همین طور تا بی نهایت. زنو نتیجه می گیرد هیچ حرکت آغازینی وجود ندارد؛ زیرا همیشه قبل از آن حرکت دیگری هست که باید اول انجامش داد. مشکل کجاست؟!
- می توان نشان داد که حل ریاضیاتی مساله بالا معادل است با پیدا کردن مقدار سری $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ که بینهایت جمله دارد.

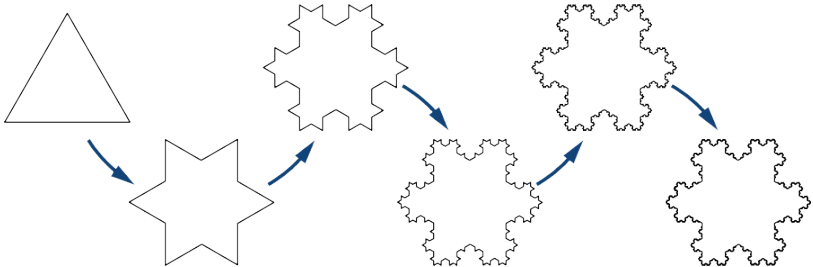
یک سری با تعداد بینهایت جمله را ”سری نامتناهی“ می نامیم.

تمرین: مقدار $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ را بیابید.



سری های نامتناهی: سری هایی با بینهایت جمله

- تکنیک سری های نامتناهی احتمالا پرکاربردترین تکنیک ریاضی در فیزیک است. این بیشتر به آن دلیل است که ما می توانیم از این سری ها برای نمایش توابع استفاده کنیم (مثلا روش سری های فوریه). همچنین سری های نامتناهی پایه روش پرکاربرد "اختلال" در فیزیک است. به علاوه از این روش می توان برای حل عددی مساله ها استفاده کرد.
- بنابراین بسیار مهم است که بتوانیم بسط های سری را بنویسیم و اعمال جبری را بر روی آنها اعمال کنیم. در واقع یکی از موضوعات مورد علاقه ما بسط سری توابع است. موضوع بسیار مهم دیگر نیز مبحث همگرایی و واگرایی سری های نامتناهی است که آن را به تفصیل بررسی خواهیم کرد.



معرفی سری های نامتناهی

• یک دنباله با جمله عمومی u_n را در نظر بگیرید:

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

مجموع جملات این دنباله تا جمله i ام را با

$$s_i = \sum_{n=1}^i u_n$$

نشان می دهیم. البته جمع بندی بالا یک جمع بندی محدود است (که آن را سری جزئی می نامیم)
(و بالاخره یک مقدار مشخص عددی خواهد داشت.

• ولی اگر تعداد جملات بینهایت باشد چه؟

$$S = \lim_{i \rightarrow \infty} s_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^i u_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

در اینصورت اگر جمع بندی بالا به یک مقدار مشخص میل کند، سری را همگرا و در غیر اینصورت واگرا می نامند.

• ناگفته پیداست که یک شرط لازم برای همگرایی سری این است که جملات با اندیس بسیار بزرگ به سمت صفر میل کنند:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \quad *$$

پرسش: چرا؟

ولی شرط بالا برای تضمین همگرا بودن کافی نیست. ادامه بحث را ببینید.

معیار کوشی

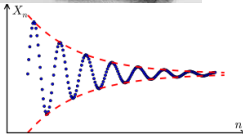


شرط بسیار مهم همگرایی سری یعنی $S = \lim_{i \rightarrow \infty} S_i$ را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد که آن را معیار کوشی می نامند.

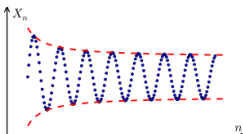
می گوئیم سری مورد نظر در معیار کوشی (شرط همگرایی) صدق می کند اگر به ازای هر عدد بسیار کوچک $\epsilon > 0$ ، یک شمارنده مانند N وجود داشته باشد به صورتی که برای همه $i, j > N$ داشته باشیم

$$|S_j - S_i| < \epsilon$$

این شرط بدان معنی است که با افزایش تعداد جملات، مجموع جملات به سمت مقدار مشخصی میل می کند. شکل میانی را ببینید.



برخی سری ها واگرا هستند، به این معنی که مجموع جملات به سمت $\pm \infty$ میل می کند. مقدار برخی سری ها نیز بین دو نقطه مشخص در حال نوسان است. این نوع سری ها را نوسانی (oscillatory) می نامند که باز هم واگرایند. شکل پایین را ببینید. مثال از سری نوسانی



$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

سری هندسی

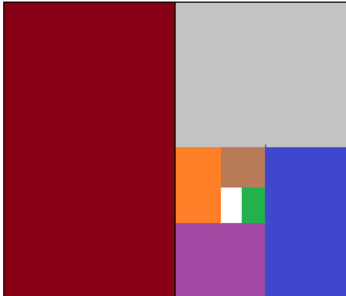
• بسیار مهم است که بدانیم تحت چه شرایطی یک سری همگرا می شود. در ادامه این موضوع را با چند مثال و چند روش پی خواهیم گرفت.

• یک دنباله را هندسی می گویند اگر هر جمله از ضرب جمله قبلی در یک عدد ثابت مثل r به دست آمده باشد.
 $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \dots$

مجموع جملات این دنباله را نیز سری هندسی می نامند که برابر است با

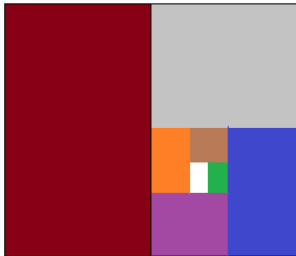
$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^{n-1} = a \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

تمرین: این نتیجه را اثبات کنید.



سری هندسی

● اثبات:



$$S_n = a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \dots + \cancel{ar^{n-1}}$$

$$-rS_n = -\cancel{ar} - \cancel{ar^2} - \dots - \cancel{ar^{n-1}} - ar^n$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

● تمرین: با محاسبه حد $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ نشان دهید که اگر $|r| > 1$ آنگاه سری هندسی واگراست و اگر $|r| < 1$ سری هندسی همگراست.

● تمرین: با استفاده از معیار کوشی نشان دهید که سری هندسی وقتی $|r| < 1$ همگراست.

● تمرین: نشان دهید که اگر $|r| < 1$ آنگاه می توان نوشت

$$s_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1-r}$$

تمرین: نشان دهید که مجموع زانو برابر یک است. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$

این موضوع را با استفاده از شکل هندسی بالا نیز توضیح دهید.

سری هارمونیک

سری زیر را سری هارمونیک می نامند:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

توجه کنید که جملات این سری در بینهایت به سمت صفر میل می کنند، ولی با این وجود سری هارمونیک همگرا نیست.

اثبات واگرا بودن سری هارمونیک: با گروه بندی جملات در سری بالا، متوجه می شویم که مقدار

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

ما نشان خواهیم داد که سری زیر بینهایت می شود؛ در نتیجه سری هارمونیک هم بینهایت است.

$$\begin{aligned} & 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots \\ & = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

بنابراین برای سری جدید پس از جمله n ام داریم: $s_n = 1 + \frac{n}{4}$. پس سری جدید واگراست؛ بنابراین سری هارمونیک هم واگراست.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید سری های نامتناهی و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ منظور از دنباله چیست؟ منظور از سری چیست؟
- ۲ دنباله حسابی و سری حسابی را توضیح دهید.
- ۳ دنباله هندسی و سری هندسی را توضیح دهید.
- ۴ درباره پارادوکس های زنو تحقیق کنید.
- ۵ منظور از سری نامتناهی چیست؟ شرط همگرا بودن و واگرا بودن سری های نامتناهی چیست؟
- ۶ معیار کوشی را با ذکر یک مثال توضیح دهید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.

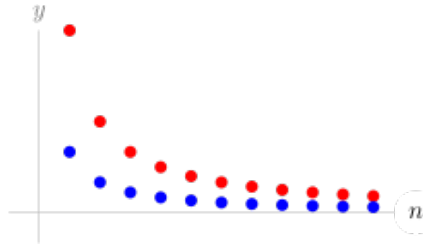


تمرین ها

- تمرینات موجود در متن درس را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: آزمون های همگرایی سری ها

- در جلسه بعد با برخی آزمون های همگرایی سری های نامتناهی آشنا خواهیم شد.



منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)

با سپاس از توجه شما

