

فیزیک الکتریسیته و مغناطیس

فصل چہارم: پتانسیل الکتریکی و انرژی پتانسیل الکتریکی

حسین شناور

گروہ فیزیک، دانشکده علوم

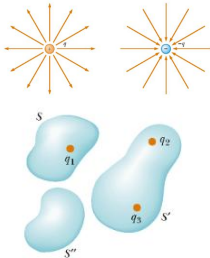
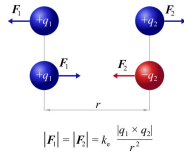


دانشگاه هرمزگان

۱ فصل چهارم: پتانسیل الکتریکی و انرژی پتانسیل الکتریکی

- انرژی پتانسیل الکتریکی
- پتانسیل الکتریکی
- پتانسیل سیستم های گسسته
- سطوح هم پتانسیل

یادآوری



قانون کولن

برهمکنش مستقیم $\Leftarrow$ نیرو؛ برهمکنش غیر مستقیم $\Leftarrow$ میدان.

میدان الکتریکی در هر نقطه برابر است با نیروی وارد شده بر یک بار آزمون در آن نقطه بخش بر واحد بار:

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q_0}$$

اصل برهم نهی

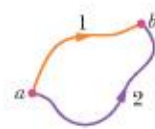
تکنیک المان ها

قانون گوس: شار الکتریکی گذرنده از هر سطح بسته $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$
(برابر است با بار درون آن سطح بسته q_{in}) تقسیم بر ϵ_0 ؛
یعنی

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

شکل ها به ترتیب از ویکی و مبانی فیزیک هالیدی،
ویرایش دهم.

یادآوری- نیروهای پایستار و ناپایستار



۱ اگر کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ به مسیر انجام کار بستگی نداشته باشد، آنگاه آن نیرو را پایستار می نامیم.

۲ برای نیروهای پایستار، می توان اختلاف انرژی پتانسیل بین نقاط b و a را به صورت منفی کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ بین آن دو نقطه تعریف کرد:

$$\Delta U = U_b - U_a \equiv -W_{ab} = - \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

۳ که در آن $d\vec{s}$ المان جابه جایی است.

۴ تعریف اختلاف انرژی پتانسیل برای نیروهای ناپایستار مفید نیست. چرا؟
نیروهای گرانش، کولن، هوک و واندروالس مثال هایی از نیروهای پایستارند.

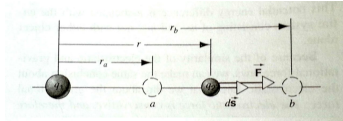
۵ نیروی های اتلافی، مانند اصطکاک، ناپایستارند.

۶ واحد کار و انرژی پتانسیل در SI ژول J می باشد.

تمام نیروهای "بنیادی" طبیعت پایستار هستند.

۷ برای توضیحات مفصل درباره نیروهای پایستار و ناپایستار به فصل ۸ فیزیک هالیدی مراجعه کنید.

کار نیروی الکتریکی در یک مسیر یک بعدی



دو بار الکتریکی هم علامت q_1 و q_2 را در نظر بگیرید (شکل مقابل). فرض کنید که بار q_1 ثابت است و بار q_2 ، در اثر برهمکنش الکتریکی با بار دیگر، از نقطه a به نقطه b منتقل می شود.

الف) کار انجام شده توسط نیروی الکتریکی $\vec{F}$ در این فاصله را بیابید.
ب) اختلاف انرژی الکتریکی بین نقاط a و b چقدر است؟

شکل از فیزیک هالیدی، ویرایش پنجم.

پاسخ الف: از آنجا که نیروی $\vec{F}$ و المان جابه جایی $d\vec{s}$ همجهت هستند، داریم:

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = F ds \cos 0^\circ = F ds$$

بنابراین می توان نوشت (با توجه به قانون کولن $F = Kq_1q_2/s^2$):

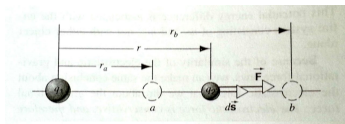
$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{r_a}^{r_b} \frac{Kq_1q_2}{s^2} ds$$

در اینجا فاصله (یا همان جابه جایی) را با s نشان داده ایم.

$$W_{ab} = \int_{r_a}^{r_b} \frac{Kq_1q_2}{s^2} ds = -Kq_1q_2 \left[\frac{1}{s} \right]_{r_a}^{r_b}$$

$$W_{ab} = -Kq_1q_2 \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right)$$

انرژی پتانسیل نیروی الکتریکی در یک مسیر یک بعدی



دو بار الکتریکی هم علامت q_1 و q_2 را در نظر بگیرید (شکل مقابل). فرض کنید که بار q_1 ثابت است و بار q_2 ، در اثر برهمکنش الکتریکی با بار دیگر، از نقطه a به نقطه b منتقل می شود.
الف) کار انجام شده توسط نیروی الکتریکی $\vec{F}$ در این فاصله را بیابید.
ب) اختلاف انرژی الکتریکی بین نقاط a و b چقدر است؟

شکل از فیزیک هالیدی، ویرایش پنجم.

به صورت کلی می توان انرژی پتانسیل الکتریکی بین دو بار الکتریکی q_1 و q_2 در فاصله r از یکدیگر را به صورت زیر تعریف کرد:

$$U(r) = \frac{Kq_1q_2}{r} + C$$

پارامتر C را در ریاضی ثابت انتگرال گیری می نامند. در فیزیک، این کمیت نشان دهنده صفر انرژی پتانسیل است. همیشه می توان C را برابر با صفر فرض کرد

$$C = 0$$

زیرا مشاهدات فیزیکی فقط و فقط به ΔU ربط دارند.

پاسخ ب: با توجه به نتیجه قسمت الف، و همچنین تعریف اختلاف پتانسیل الکتریکی

$$\Delta U = - \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

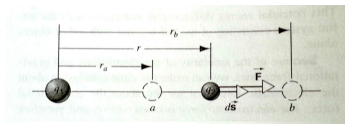
داریم:

$$\Delta U = W_{ab} = +Kq_1q_2 \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right)$$

و یا

$$U_b - U_a = \frac{Kq_1q_2}{r_b} - \frac{Kq_1q_2}{r_a}$$

انرژی پتانسیل نیروی الکتریکی در یک مسیر یک بعدی



دو بار الکتریکی هم علامت q_1 و q_2 را در نظر بگیرید (شکل مقابل). فرض کنید که بار q_1 ثابت است و بار q_2 ، در اثر برهمکنش الکتریکی با بار دیگر، از نقطه a به نقطه b منتقل می شود.

الف) کار انجام شده توسط نیروی الکتریکی $\vec{F}$ در این فاصله را بیابید.
ب) اختلاف انرژی الکتریکی بین نقاط a و b چقدر است؟

تحلیل:

اگر بار q_1 از بار q_2 دور شود (یعنی $r_b > r_a$)، آنگاه

$$\Delta U < 0$$

تحلیل کنید:

اگر دوبار یاد شده غیر همنام باشند، یعنی $q_1 q_2 < 0$ ، چه اتفاقی خواهد افتاد؟

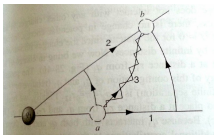
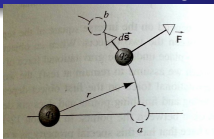
یعنی انرژی پتانسیل سیستم کاهش می یابد. این منطقی است زیرا دو بار همنام به صورت طبیعی می خواهند از هم دور شوند و بنابراین انرژی پتانسیل سیستم را کاهش دهند.

اگر بار q_1 توسط یک عامل خارجی به بار q_2 نزدیک شود (یعنی $r_b < r_a$)، آنگاه

$$\Delta U > 0$$

یعنی انرژی پتانسیل سیستم افزایش می یابد. این هم منطقی است زیرا دو بار همنام به صورت طبیعی می خواهند از هم دور شوند و بنابراین انرژی پتانسیل سیستم را کاهش دهند. ولی در این مورد، کار یک عامل خارجی باعث افزایش انرژی پتانسیل سیستم شده است.

کار در یک مسیر دلخواه— مفهوم انرژی پتانسیل



اگر جابه جایی و نیرو بر هم عمود باشند، کار انجام شده صفر خواهد بود، یعنی

$$\vec{F} \perp d\vec{s} \Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{s} = F ds \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

شکل مقابل (بالا) را ببینید. بنابراین، در حالتی که جابه جایی بر نیرو عمود باشد، تغییری در انرژی پتانسیل الکتریکی رخ نخواهد داد:

$$\Delta U = 0 \quad \text{if} \quad \vec{F} \perp d\vec{s}$$

بنا به نکته بالا، کار در مسیرهای ۱ و ۲ در شکل مقابل (پایین) برابر خواهد بود. یعنی

$$W_1 = W_2$$

بنابراین

$$\Delta U_1 = \Delta U_2$$

یک حرکت دلخواه در حالت کلی تشکیل شده است از جابه جایی هایی عمود بر نیرو (که کار آنها صفر است) به علاوه جابه جایی های همجهت با نیرو (که کار آنها در اسلایدهای قبل محاسبه شده است). شکل مقابل (پایینی) را ببینید.

شکل از فیزیک هالیدی، ویرایش پنجم.

نتیجه بسیار مهم:

کار نیروی الکتریکی به مسیر انجام کار ربطی ندارد:

$$W_1 = W_2 = W_3 = \dots$$

بنابراین نیروی الکتریکی یک نیروی پایستار است و می توان برای آن انرژی پتانسیل تعریف کرد.

چرا "پایستار"؟

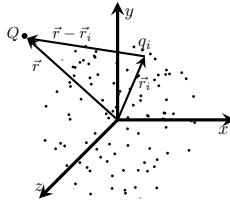
برای نیروهای پایستار می توان اثبات کرد که مجموع انرژی جنبشی $K \equiv \frac{1}{2}mv^2$ و انرژی پتانسیل یک مقدار ثابت (پایسته) است:

$$K + U = constant$$

به این دلیل این نوع نیروها را پایستار می نامند. این ثابت بسیار مهم حرکت را انرژی می نامند:

$$E \equiv K + U.$$

اصل برهمه‌نی و انرژی پتانسیل الکتریکی سیستم ذرات



بنا به اصل برهمه‌نی، انرژی پتانسیل الکتریکی باری مانند Q در کنار یک مجموعه از ذرات باردار برابر است با

$$U = KQ \frac{q_1}{r_1} + KQ \frac{q_2}{r_2} + KQ \frac{q_3}{r_3} + \dots = KQ \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}$$

می باشد که در آن N تعداد کل ذرات است، U انرژی پتانسیل الکتریکی کل بار Q می باشد، $\frac{KQq_i}{r_i}$ انرژی پتانسیل الکتریکی بار Q در اثر بار q_i (که به فاصله r_i از بار Q قرار دارد) می باشد .

نکته مهم در اصل برهمه‌نی آن است که اندازه انرژی پتانسیل الکتریکی ناشی از هرکدام از ذرات مستقل از وجود ذرات دیگر است.

با استفاده از اصل برهمه‌نی می توان بسیاری از مسائل الکترواستاتیک را حل کرد.

ساده سازی بیشتر مساله

۱ اختلاف انرژی پتانسیل الکتریکی کمیتی اسکالر است که بین دو ذره باردار تعریف می شود (نیرو هم بین دو ذره تعریف می شود ولی برداری است). از طرفی می توان، محض ساده سازی بیشتر مساله، کمیتی تعریف کرد که اسکالر بوده و فقط به یک ذره مربوط است. این کمیت را اختلاف پتانسیل الکتریکی می نامیم.

۲ اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه a و b برابر است با اختلاف انرژی پتانسیل الکتریکی بر واحد بار:

$$\Delta V_{ab} = \frac{\Delta U_{ab}}{q_0}$$

که در آن q_0 مقدار بار آزمون است.

۳ واحد اختلاف پتانسیل در سیستم SI برابر J/C است که آن را ولت می نامیم:

$$V = J/C$$

۴ واحد اتمی انرژی الکترون ولت (eV) نام دارد و برابر است با مقدار انرژی که یک الکترون به بار $e = 1.6 \times 10^{-19} C$ در یک پتانسیل یک ولتی به دست می آورد:

$$eV = 1.6 \times 10^{-19} C \times 1V = 1.6 \times 10^{-19} J$$

۵ پتانسیل الکتریکی ساده ترین کمیت قابل تعریف در الکتروستاتیک است و بنابراین بیشترین کاربرد را نیز به خود اختصاص داده است.

پتانسیل الکتریکی

اختلاف پتانسیل ایجاد شده توسط بار q بین دو نقطه r_a و r_b برابر است با

$$V_b - V_a = \frac{Kq}{r_b} - \frac{Kq}{r_a}$$

در حالت کلی می توان پتانسیل الکتریکی یک نقطه به فاصله r از بار را به صورت

$$V(r) = \frac{Kq}{r} + C$$

تعریف کرد که در آن پارامتر C ثابت پتانسیل (ثابت انتگرال گیری) است.

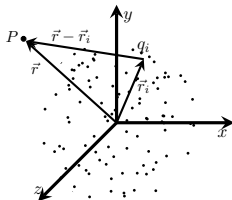
معمولا فرض می کنیم که ثابت انتگرال گیری صفر است:

$$C = 0$$

بنابراین پتانسیل الکتریکی ایجاد شده توسط یک بار تنهای q در فاصله r از آن برابر است با

$$V = \frac{Kq}{r}.$$

اصل برهمه‌نی و پتانسیل الکتریکی سیستم ذرات



• بنا به اصل برهمه‌نی، پتانسیل الکتریکی که یک مجموعه از ذرات باردار در نقطه ای مانند P ایجاد می کنند برابر با

$$V = \frac{Kq_1}{r_1} + \frac{Kq_2}{r_2} + \frac{Kq_3}{r_3} + \dots = \sum_{i=1}^N \frac{Kq_i}{r_i}$$

می باشد که در آن N تعداد کل ذرات است، V پتانسیل الکتریکی کل در نقطه P ، $\frac{Kq_i}{r_i}$ پتانسیل الکتریکی ناشی از بار q_i در نقطه P به فاصله r_i می باشد.

• نکته مهم در اصل برهمه‌نی آن است که اندازه پتانسیل الکتریکی ناشی از هرکدام از ذرات مستقل از وجود ذرات دیگر است.

• با استفاده از اصل برهمه‌نی می توان بسیاری از مسائل الکتروستاتیک را حل کرد.



پتانسیل ناشی از یک دوقطبی الکتریکی

بنا به اصل برهم‌نهی، پتانسیل الکتریکی کل دوقطبی در نقطه P برابر است با مجموع پتانسیل های ناشی از بارهای مثبت و منفی:

$$V = \frac{Kq}{r_+} - \frac{Kq}{r_-}$$

و یا با مخرج مشترک گیری:

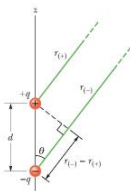
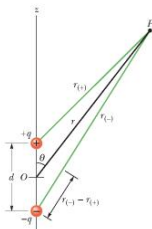
$$V = \frac{Kq (r_- - r_+)}{r_+ r_-}$$

در فواصل خیلی دور داریم (چرا؟):

$$r_- - r_+ \simeq d \cos \theta$$

$$r_- r_+ \simeq r^2$$

۹



شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش دهم.

پتانسیل ناشی از یک دوقطبی الکتریکی

بنابراین، در نقاط خیلی دور از دوقطبی داریم

$$V = K \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

که در آن p اندازه بردار ممان دوقطبی الکتریکی است.

پتانسیل در صفحه عمود بر دوقطبی برابر صفر است:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow V = 0$$

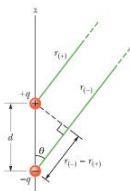
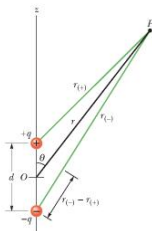
رفتار عمومی دوقطبی: پتانسیل دو قطبی در نقاط دور به صورت

$$V \propto 1/r^2$$

با فاصله کاهش می یابد.

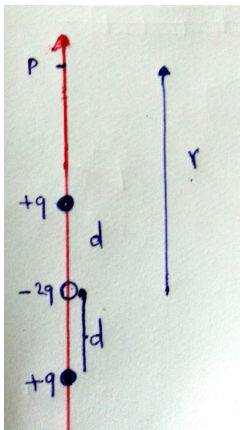
در اینجا، در مقایسه با مسائل مربوط به میدان و نیرو، جهتی در کار نیست.

بنابراین انجام محاسبات بسیار راحت تر است.



شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش دهم.

پتانسیل ناشی از یک چهارقطبی الکتریکی



با توجه به اصل برهمه‌نی داریم:

$$V = k \left(\frac{q}{r-d} + \frac{-2q}{r} + \frac{q}{r+d} \right)$$

که پس از مخرج مشترک گرفتن به

$$V = K \frac{2qd^2}{r(r^2 - d^2)}$$

تبدیل می شود.

رفتار عمومی: پتانسیل چهارقطبی در نقاط بسیار دور، یعنی $d \gg r$ ، به صورت

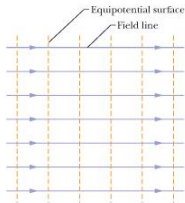
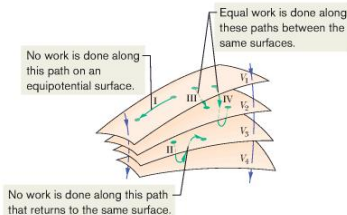
$$V = K \frac{Q}{r^3}$$

تغییر می کند که در آن $Q = 2qd^2$ همان چهارقطبی است.

خصوصاً به رفتار $V \propto \frac{1}{r^3}$ چهارقطبی در فواصل دور دقت کنید.

در اینجا، در مقایسه با مسائل مربوط به میدان و نیرو، جهتی در کار نیست. بنابراین انجام محاسبات بسیار راحت تر است.

ویژگی های سطوح هم پتانسیل



۱ مکان هندسی نقاطی از فضا، در اطراف یک توزیع بار الکتریکی، که پتانسیل الکتریکی یکسانی دارند را یک سطح هم پتانسیل می نامند.

۲ اگر بار الکتریکی بر روی یک سطح هم پتانسیل حرکت کند، هیچ کاری بر روی آن انجام نخواهد شد زیرا:

$$W = -\Delta U = 0$$

مسیر I را ببینید.

۳ اگر حتی ذره سطوح هم پتانسیل دیگر را قطع کند، ولی دست آخر به سطح اولیه بازگردد، مثل مسیر II ، باز هم هیچ کاری انجام نخواهد شد.

۴ کار انجام شده بین دو سطح هم پتانسیل مشخص همیشه یکسان خواهد بود. مسیر های III و IV را ببینید.

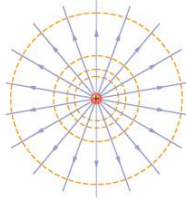
۵ در شکل پایینی، سطوح هم پتانسیل (با رنگ نارنجی) و خطوط میدان (پیکان های آبی رنگ) مربوط به یک میدان الکتریکی ثابت را ملاحظه می کنید. در این مورد داریم:

$$\Delta V = -E\Delta x$$

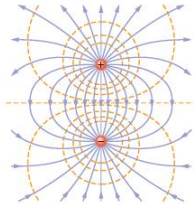
۶ خطوط میدان همیشه بر سطوح هم پتانسیل عمود هستند. چرا؟

شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش دهم.

سطوح هم پتانسیل دو توزیع بار دیگر

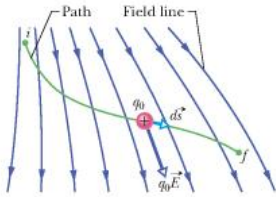


سطوح هم پتانسیل مربوط به یک تک قطبی الکتریکی (بالا) و یک دو قطبی الکتریکی (پایین) را در شکل مقابل ملاحظه می کنید.



شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش دهم.

چگونگی به دست آوردن پتانسیل از میدان



شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش دهم.

پتانسیل الکتریکی با استفاده از میدان:

$$V_P = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

۱ فرض کنید که بار آزمون q_0 از نقطه i به نقطه f حرکت می کند. می خواهیم اختلاف پتانسیل بین این دو نقطه را بیابیم.

۲ بنابه تعریف، این اختلاف پتانسیل برابر است با:

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{\Delta U}{q_0} = \frac{-W_{if}}{q_0}$$

و یا اینکه (با توجه به تعریف کار):

$$\Delta V = \frac{-\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s}}{q_0} = \frac{-q_0 \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}}{q_0} = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

۳ معمولاً پتانسیل در بی نهایت صفر فرض می شود، یعنی فرض می شود که باری در بی نهایت نیست. بنابراین پتانسیل در یک نقطه مشخص فضا مانند P برابر است با:

$$V_P - V_{\infty} = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید ویژگی های مهم پتانسیل الکتریکی و انرژی پتانسیل الکتریکی را بیان کنید. برای اینکار لازم است بتوانید به سوال های زیر پاسخ دهید:

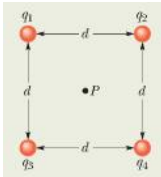
۱. تعریف عمومی تغییر در انرژی پتانسیل را برحسب کار بنویسید.
۲. پتانسیل الکتریکی و انرژی پتانسیل الکتریکی چه نوع کمیت هایی هستند؟ اسکالر یا برداری؟
۳. چرا نیروی الکتریکی نیرویی پایستار است؟
۴. واحدهای مربوط به پتانسیل الکتریکی و انرژی پتانسیل الکتریکی در سیستم بین المللی را بیان کنید.
۵. رابطه بین $\vec{E}$ و $\vec{V}$ و ΔU و ΔV را بنویسید.
۶. رابطه بین $\vec{E}$ و $\vec{V}$ و ΔU و ΔV را بنویسید.
۷. چرا استفاده از پتانسیل الکتریکی و انرژی پتانسیل الکتریکی به میدان و نیرو ارجحیت دارد؟
۸. ویژگی های سطوح هم پتانسیل؟
۹. چطور پتانسیل را از میدان به دست آوریم؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای جذب مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل مسائلی زیر محک زده و تقویت کنید.



تمرین

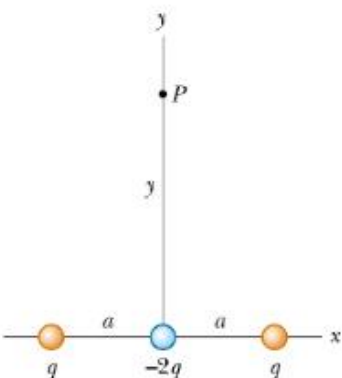


در شکل مقابل داریم $d = ۲/۵ \text{ m}$ و مقادیر بارها نیز معلوم اند.
پتانسیل الکتریکی در مرکز مربع را بیابید

$$\begin{aligned} q_1 &= +12 \text{ nC}, & q_3 &= +31 \text{ nC}, \\ q_2 &= -24 \text{ nC}, & q_4 &= +17 \text{ nC}. \end{aligned}$$

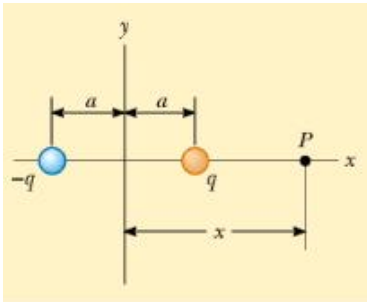
شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش دهم.

تمرین



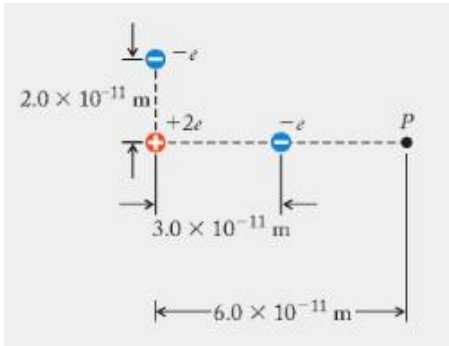
پتانسیل الکتریکی یک چهارقطبی:
(الف) در شکل مقابل پتانسیل الکتریکی V در
نقطه P واقع بر محور y را حساب کنید (ب)
اگر نقطه P در فاصله بسیار دوری قرار گرفته
باشد، یعنی $y \gg a$ ، مقدار پتانسیل چقدر
است؟ راهنمایی: $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots$
شکل از هالیدی، ویرایش هشتم.

تمرین



پتانسیل الکتریکی یک دوقطبی:
الف) در شکل مقابل پتانسیل الکتریکی V
در نقطه P واقع بر محور x را حساب کنید
ب) اگر نقطه P در فاصله بسیار دوری
قرار گرفته باشد، یعنی $x \gg a$ ، مقدار
پتانسیل چقدر است؟
شکل از هالیدی، ویرایش هشتم.

تمرین



بار الکتریکی الکترون برابر است با

$$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}.$$

با توجه به شکل مقابل پتانسیل در
نقطه P را بیابید.
شکل از او هانیان.

- در جلسه بعد از اصل برهم‌نهی و روش المان‌ها استفاده کرده و پتانسیل الکتریکی و انرژی پتانسیل الکتریکی توزیع بارهای پیوسته را به دست خواهیم آورد.
- در حل چنین مسائلی به وضوح خواهیم دید که اسکالر بودن پتانسیل الکتریکی و انرژی پتانسیل الکتریکی انجام محاسبات را به وفور آسان‌تر می‌کند.
- همچنین، درباره ارتباط دقیق ریاضیاتی این دو کمیت با نیرو و میدان هم به تفصیل صحبت خواهیم کرد.

با سپاس از توجه شما