

مفاهیم بنیادی مکانیک کوانتومی

تغییر پایه های فضا در مکانیک کوانتومی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ تغییر پایه های فضا در مکانیک کوانتومی
- عملگر تبدیل و ماتریس تبدیل
- قطری سازی

آنچه گذشت: رابطه عدم قطعیت در مکانیک کوانتومی

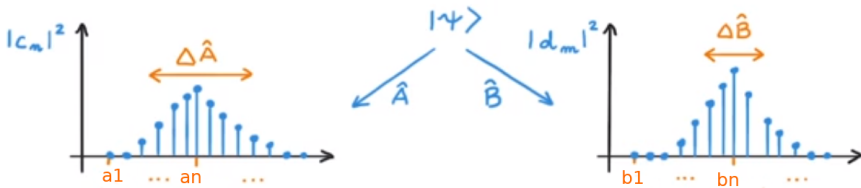
- قضیه: فرض کنید دو مشاهده پذیر مانند A و B داریم. آنگاه برای هر حالت ممکن سیستم کوانتومی خواهیم داشت:

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$$

این رابطه را رابطه عدم قطعیت (گاهی اصل عدم قطعیت) می نامند که ارتباط بین پراکندگی در اندازه گیری دو مشاهده پذیر را به دست می دهد.

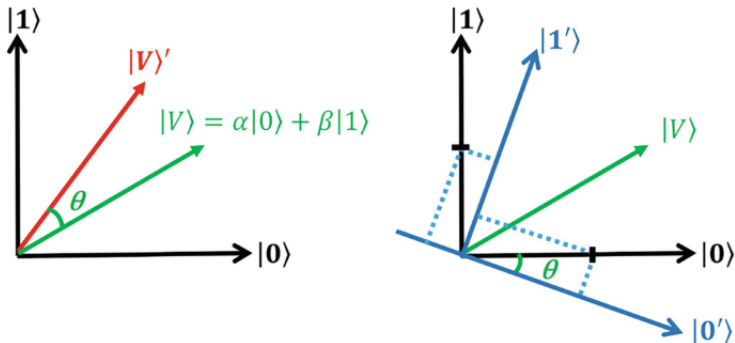
- اگر دو مشاهده پذیر A و B ناسازگار باشند $[A, B] \neq 0$ ، آنگاه بنا به رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ "حاصلضرب پهنای نمودار توزیع احتمال این دو مشاهده پذیر نمی تواند از یک مقدار کمینه کمتر شود":

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$$

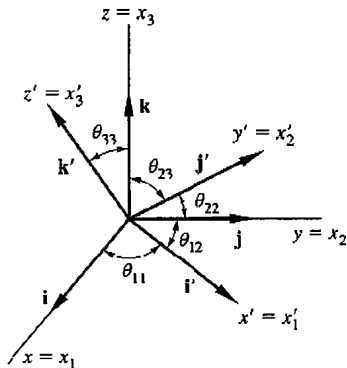


اهداف این جلسه

- فرض کنید که دو مشاهده پذیر ناسازگار مانند S_x و S_z داریم. در این وضعیت کت حالت سیستم را می توان در ویژه پایه های اولی و یا دومی (به ترتیب به صورت $|S_x; \pm\rangle$ و $|S_z; \pm\rangle$) بسط داد. البته این دو دسته ویژه کت فضای یکسانی را بسط خواهند داد؛ ولی بیشتر اوقات لازم است بدانیم که این دو توصیف چطور به هم مربوط می شوند. دلیل این موضوع این است که گاهی مجبور می شویم (برای حل راحت تر مساله) پایه های فضا را تغییر دهیم. در این جلسه این موضوع را بررسی خواهیم کرد.



دوران دستگاه مختصات در فیزیک کلاسیک



$$R = \begin{pmatrix} \hat{x} \cdot \hat{x}' & \hat{x} \cdot \hat{y}' & \hat{x} \cdot \hat{z}' \\ \hat{y} \cdot \hat{x}' & \hat{y} \cdot \hat{y}' & \hat{y} \cdot \hat{z}' \\ \hat{z} \cdot \hat{x}' & \hat{z} \cdot \hat{y}' & \hat{z} \cdot \hat{z}' \end{pmatrix}$$

کاری که می خواهیم در اینجا انجام دهیم بسیار شبیه است به کاری که برای دوران دستگاه مختصات در فیزیک کلاسیک انجام می دهیم.

برداری را در نظر بگیرید که در دستگاه بدون پرایم به صورت $\vec{r} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j} + r_z \hat{k}$ و در دستگاه پرایم دار به صورت $\vec{r} = r'_x \hat{i}' + r'_y \hat{j}' + r'_z \hat{k}'$ نوشته می شود. دقت کنید که بردار تغییری نکرده است ولی نحوه توصیف ما از بردار تغییر کرده است. برای اینکه این دو بردار را به هم تبدیل کنیم می توانیم از ماتریس تبدیل R استفاده کنیم.

مولفه های این ماتریس ضرب داخلی پایه های فضا در دو دستگاه مختلف مورد نظر ما هستند. چنین ماتریسی را ماتریس تبدیل می نامند.

هدف ما در اینجا این است که ارتباط بین نمایش های مختلف یک کت حالت یکسان در دو مجموعه ویژه پایه متفاوت را بیابیم.

قضیه

● قضیه: اگر دو مجموعه کامل و یکامتعامل (مانند $|a_i\rangle$ و $|b_i\rangle$) از کت های پایه داشته باشیم که فضای هیلبرت یکسانی را توصیف می کنند، آنگاه یک عملگر یکانی U وجود دارد به طوری که

$$|b_i\rangle = U|a_i\rangle$$

تعریف عملگر یکانی: عملگر یکانی (unitary) عملگری است که در شرایط زیر صدق کند. به عبارت دیگر مزدوج هرمیتی و وارون یک عملگر یکانی با هم برابرند:

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1 \quad \Leftrightarrow \quad U^\dagger = U^{-1}$$

اثبات قضیه: برای اثبات قضیه بالا یک عملگر یکانی را معرفی خواهیم کرد که کار خواسته شده را انجام خواهد داد:

$$U = \sum |b_k\rangle \langle a_k|$$

با استفاده از این عملگر می توان ویژه پایه های $|a_i\rangle$ را در جهت $|b_i\rangle$ چرخاند:

$$U|a_i\rangle = \sum_k |b_k\rangle \langle a_k | a_i \rangle = \sum_k |b_k\rangle \delta_{ki} = |b_i\rangle$$

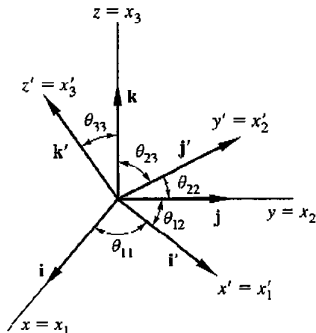
همچنین عملگر U یکانی است زیرا

$$U^\dagger U = \sum_k |a_k\rangle \langle b_k| \sum_j |b_j\rangle \langle a_j| = \sum_k \sum_j |a_k\rangle \langle b_k | b_j \rangle \langle a_j|$$

$$U^\dagger U = \sum_k \sum_j \delta_{kj} |a_k\rangle \langle a_j| = \sum_k |a_k\rangle \langle a_k| = 1$$

تمرین: حالا تساوی $UU^\dagger = 1$ را اثبات کنید.

ماتریس تبدیل



$$R = \begin{pmatrix} \hat{x} \cdot \hat{x}' & \hat{x} \cdot \hat{y}' & \hat{x} \cdot \hat{z}' \\ \hat{y} \cdot \hat{x}' & \hat{y} \cdot \hat{y}' & \hat{y} \cdot \hat{z}' \\ \hat{z} \cdot \hat{x}' & \hat{z} \cdot \hat{y}' & \hat{z} \cdot \hat{z}' \end{pmatrix}$$

اگر ویژه کت های $|a_i\rangle$ را پایه های قدیم و ویژه کت های $|b_i\rangle$ را پایه های جدید بنامیم، آنگاه می توانیم ماتریس تبدیل U را در هر کدام از این پایه ها بنویسیم. مثلاً در پایه های قدیم داریم:

$$|b_i\rangle = U|a_i\rangle \Rightarrow \langle a_k | b_i \rangle = \langle a_k | U | a_i \rangle$$

پس در واقع می توان درایه های ماتریس تبدیل U را با استفاده از حاصلضرب داخلی پایه های فضای قدیم و جدید ساخت.

تشابه این وضعیت با ماتریس دوران در فضای سه بعدی حالا واضح است.

ماتریس U با درایه های $\langle a_k | U | a_i \rangle$ را ماتریس تبدیل (transformation matrix) می نامند. این ماتریس چگونه عمل می کند؟

ماتریس تبدیل

یک کت حالت دلخواه مانند $|\alpha\rangle$ را در نظر بگیرید. درایه های ماتریس این کت در پایه های قدیم به صورت $\langle a_i | \alpha \rangle$ و در پایه های جدید به صورت $\langle b_i | \alpha \rangle$ نوشته می شوند. می خواهیم بدانیم این پایه ها چه رابطه ای با هم دارند. به محاسبه زیر دقت کنید:

$$\langle b_k | \alpha \rangle = \langle b_k | \hat{1} | \alpha \rangle = \langle b_k | \left(\sum_j |a_j\rangle \langle a_j| \right) | \alpha \rangle = \sum_j \langle b_k | a_j \rangle \langle a_j | \alpha \rangle$$

$$\langle b_k | \alpha \rangle = \sum_j \langle a_k | U^\dagger | a_j \rangle \langle a_j | \alpha \rangle \quad \text{و یا}$$

مفهوم رابطه بالا: ماتریس ستونی $|\alpha\rangle$ در پایه های جدید را می توان از حاصلضرب ماتریس مربعی $U^\dagger$ در ماتریس $|\alpha\rangle$ (نوشته شده در پایه های قدیم) به دست آورد. یعنی

$$\begin{pmatrix} \langle b_1 | \alpha \rangle \\ \langle b_2 | \alpha \rangle \\ \langle b_3 | \alpha \rangle \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}^\dagger & U_{12}^\dagger & \cdots \\ U_{21}^\dagger & U_{22}^\dagger & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle a_1 | \alpha \rangle \\ \langle a_2 | \alpha \rangle \\ \langle a_3 | \alpha \rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

و یا حالت سیستم در پایه های جدید را می توان با استفاده از رابطه $(\text{New}) = (U^\dagger) (\text{Old})$ از پایه های قدیم به دست آورد.

پرسش: در ماتریس بالا مولفه های ماتریس تبدیل $U^\dagger$ در پایه های قدیم کدام اند؟

تبدیل تشابهی

- به همین ترتیب می توان یک ماتریس مانند X را در پایه های جدید و قدیم نوشت و آن ها را به هم تبدیل کرد. مثلاً داریم:

$$\langle b_k | X | b_l \rangle = \langle b_k | \hat{1} X \hat{1} | b_l \rangle = \langle b_k | \left(\sum_m | a_m \rangle \langle a_m | \right) X \left(\sum_n | a_n \rangle \langle a_n | \right) | b_l \rangle$$

$$\langle b_k | X | b_l \rangle = \sum_m \sum_n \langle a_k | U^\dagger | a_m \rangle \langle a_m | X | a_n \rangle \langle a_n | U | a_l \rangle$$

معنای ماتریسی رابطه بالا چنین است:

$$\begin{pmatrix} X'_{11} & X'_{12} & \cdots \\ X'_{21} & X'_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}^\dagger & U_{12}^\dagger & \cdots \\ U_{21}^\dagger & U_{22}^\dagger & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots \\ X_{21} & X_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots \\ U_{21} & U_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

به عبارت ساده تر روابط $X' = U^{-1} X U$ یا $X' = U^\dagger X U$ را داریم که در آن X' ماتریس در دستگاه جدید، X ماتریس در دستگاه قدیم و U ماتریس یکانی است. این تبدیل را تبدیل تشابهی (similarity transformation) می گویند.

- کمیت هایی که مستقل از نمایش هستند (بدون تغییرند) بسیار مهم هستند. ما در ادامه رد (trace) ماتریس را بررسی خواهیم کرد که یک کمیت ثابت است و از نمایشی به نمایش دیگر تغییر نمی کند.

رد یک عملگر و یا ماتریس

- رد یک عملگر و یا ماتریس برابر است با مجموع جملات روی قطر اصلی آن ماتریس:

$$\text{tr}(X) = \sum_i \langle a_i | X | a_i \rangle$$

مقدار این کمیت در هر مجموعه پایه دیگری نیز همین مقدار خواهد بود:

$$\text{tr}(X) = \sum_i \langle a_i | X | a_i \rangle = \sum_i \langle a_i | \hat{U} X \hat{U}^\dagger | a_i \rangle =$$

$$\text{tr}(X) = \sum_i \langle a_i | \left(\sum_l | b_l \rangle \langle b_l | \right) X \left(\sum_m | b_m \rangle \langle b_m | \right) | a_i \rangle = \sum_m \langle b_m | X | b_m \rangle$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

تمرین: نتیجه بالا را با جزییات به دست آورید.

تمرین: روابط بسیار مهم زیر را اثبات کنید.

$$\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX),$$

$$\text{tr}(U^\dagger X U) = \text{tr}(X),$$

$$\text{tr}(|a'\rangle \langle a''|) = \delta_{a',a''},$$

$$\text{tr}(|b'\rangle \langle a'|) = \langle a' | b' \rangle.$$

یادآوری و اثبات

- حال به اثبات رابطه اول رد ماتریس ها دقت کنید:

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\mathbf{AB}) &= \sum_j \langle \phi_j | \mathbf{AB} | \phi_j \rangle = \sum_{jk} \langle \phi_j | \mathbf{A} | \psi_k \rangle \langle \psi_k | \mathbf{B} | \phi_j \rangle \\ &= \sum_{jk} \langle \psi_k | \mathbf{B} | \phi_j \rangle \langle \phi_j | \mathbf{A} | \psi_k \rangle = \sum_k \langle \psi_k | \mathbf{BA} | \psi_k \rangle \\ &= \text{Tr}(\mathbf{BA})\end{aligned}$$

به همین طریق می توان ثابت کرد: $\text{Tr}(\mathbf{ABC}) = \text{Tr}(\mathbf{BCA}) = \text{Tr}(\mathbf{CAB})$

- یادآوری مفهوم دترمینان:

$$\det(\mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

حال می توان ثابت کرد: $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$

و همچنین برای $\mathbf{A} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}$ می توان اثبات کرد که دترمینان دو طرف برابر است:

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}) = \det(\mathbf{X}^{-1}) \det(\mathbf{B}) \det(\mathbf{X})$$

$$= \det(\mathbf{X})^{-1} \det(\mathbf{X}) \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B})$$

قطری سازی یک عملگر

فرض کنید که عملگر B در ویژه پایه های عملگر A ، که آنها را با $|a_i\rangle$ نشان می دهیم، نوشته شده است. در حالت کلی B در این ویژه پایه ها قطری نیست. سوال این است که چطور می توان ویژه مقادیر و ویژه پایه های عملگر B را یافت.

می توان نشان داد که این مساله معادل است با مساله یافتن یک عملگر یکانی که عملگر B را قطری می کند. چطور؟!

پاسخ: ما می خواهیم پایه های $|b_i\rangle$ را بیابیم به صورتی که $|b_i\rangle$ ها ویژه کت های عملگر B باشند؛ یعنی $B|b_i\rangle = b_i|b_i\rangle$ این رابطه را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\langle a_j|B|b_i\rangle = b_i \langle a_j|b_i\rangle \Rightarrow \langle a_j|B\left(\sum_k |a_k\rangle\langle a_k|\right)|b_i\rangle = b_i \langle a_j|b_i\rangle$$

$$\sum_k \langle a_j|B|a_k\rangle\langle a_k|b_i\rangle = b_i \langle a_j|b_i\rangle \quad \text{و یا}$$

حال اگر داشته باشیم $B_{jk} = \langle a_j|B|a_k\rangle$ و $C_k^i = \langle a_k|b_i\rangle$ ، آنگاه رابطه بالا در واقع یک معادله ماتریسی به شکل $\sum_k B_{jk}C_k^i = b_i C_j^i$ می باشد؛ و یا (توجه ۱: $i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, N$ که در آن N نشان دهنده بعد فضای هیلبرت است. توجه ۲: بدون فرض نمادگذاری اینشتین روی i .)

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots \\ B_{21} & B_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^i \\ C_2^i \\ \vdots \end{pmatrix} = b_i \begin{pmatrix} C_1^i \\ C_2^i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

قطری سازی

معادله ویژه مقداری:

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots \\ B_{21} & B_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^i \\ C_2^i \\ \vdots \end{pmatrix} = b_i \begin{pmatrix} C_1^i \\ C_2^i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

از درس ریاضی-فیزیک می دانیم که چنین معادله ای تنها در صورتی جواب غیربدیهی خواهد داشت که معادله مشخصه $\det(B - \lambda \hat{1}) = 0$ برقرار باشد. این دترمینان البته یک معادله جبری درجه N به ما خواهد داد که باید برای متغیر λ حل شود. چنین معادله ای بنا به قضیه اساسی جبر N ریشه دارد. البته، از آنجا که B هرمیتی است، ویژه مقادیر آن حقیقی اند. پس مرحله اول حل معادله، پیدا کردن ویژه مقادیر $\lambda = b_i$ است. پس از آن، هرکدام از مقادیر λ را در معادله ماتریسی بالا قرار داده و ویژه بردارهای C_k^i را می یابیم.

با مقایسه ماتریس ستونی $C_k^i = \langle a_k | b_i \rangle$ و عناصر ماتریس یکانی $\langle a_k | U | a_i \rangle = \langle a_k | b_i \rangle$ که در ابتدای درس به دست آوردیم، به این نتیجه می رسیم که ماتریس یکانی در واقع ماتریسی است که از کنار هم گذاشته شدن ستون های ماتریس برداری $C_k^i = \langle a_k | b_i \rangle$ در کنار هم تشکیل شده است.

$$U = \begin{pmatrix} C_1^1 & C_1^2 & C_1^3 & \cdots \\ C_2^1 & C_2^2 & C_2^3 & \cdots \\ C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

اهمیت هرمیتی بودن ماتریس

پرسش: در روند توصیف شده، هرمیتی بودن ماتریس بسیار مهم است. چرا؟

مثال: عملگر نردبانی

$$S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

را در نظر بگیرید که به وضوح غیرهرمیتی است. این ماتریس را نمی توانیم به روش گفته شده قطری کنیم.

توجه: ما در آینده با ویژه کت های یک عملگر غیر هرمیتی خاص برخورد خواهیم کرد. ولی این ها پایه های یکامتعامل کاملی برای فضا تشکیل نمی دهند.

سوال: ویژه کت های چه عملگرهایی می توانند پایه های کاملی برای فضا تشکیل دهند؟ پاسخ این سوال را قضیه طیفی (Spectral theorem) در جبر خطی به ما می دهد. بنا به این قضیه، اگر عملگر مورد نظر فشرده و نرمال (compact and normal) باشد، آنگاه ویژه کت های آن یکامتعامل خواهند بود و فضا را بسط می دهند.

مشاهده پذیرهایی که با یک تبدیل یکانی به هم تبدیل می شوند.

- چه رابطه ای بین S_x , S_y و S_z وجود دارد؟ پاسخ: این ها می توانند با یک تبدیل یکانی به هم مربوط شوند. قضیه زیر را ببینید.
- قضیه: دو مجموعه یکامتعامد $\{|a_i\rangle\}$ و $\{|b_i\rangle\}$ را در نظر بگیرید که توسط رابطه $U|a_i\rangle = |b_i\rangle$ به هم مربوط می شوند. حال می توان با دانستن ماتریس یکانی U تبدیل یکانی عملگر A را به صورت UAU^{-1} ساخت که ویژه مقادیر یکسانی با عملگر A دارد. می گوئیم این دو مشاهده پذیر یکانی-همسان (unitary – equivalent) هستند؛ یعنی مجموعه $\{|b_i\rangle\}$ ویژه کت های عملگر UAU^{-1} با ویژه مقادیر a_i هستند.
- اثبات: معادله ویژه مقادیری عملگر A را در نظر بگیرید:

$$A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$$

می توان نوشت:

$$UAU^{-1}U|a_i\rangle = a_iU|a_i\rangle \Rightarrow (UAU^{-1})|b_i\rangle = a_i|b_i\rangle$$

پس عملگرهای یکانی-همسان ویژه مقادیر (طیف) یکسانی دارند.

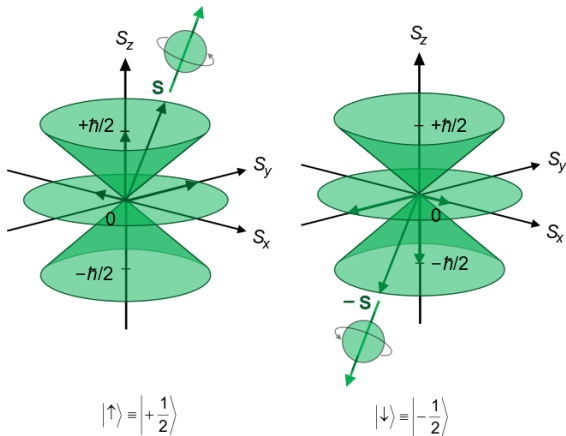
- توجه کنید که بردارهای $\{|b_i\rangle\}$ ویژه کت های عملگر B هم هستند:

$$B|b_i\rangle = b_i|b_i\rangle$$

حال با مقایسه با نتیجه بالا می توان فهمید که عملگرهای B و UAU^{-1} را می توان با استفاده از پایه های $|b_i\rangle$ به صورت همزمان قطری کرد.

آیا عملگرهای B و UAU^{-1} یکسان هستند؟

- آیا عملگرهای B و UAU^{-1} یکسان هستند؟ پاسخ: همیشه نه، ولی در اکثر اوقات بله!
- مثلاً عملگرهای S_x و S_z را در نظر بگیرید که می توانند با یک دوران 90° درجه حول محور y به همدیگر تبدیل شوند. این دو عملگر ویژه مقادیر یکسانی هم دارند.



تمرین

ویژه کت های عملگر S_z را با $|\pm\rangle$ نشان می دهیم. همچنین داریم

$$|S_x; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm |-\rangle) \quad |S_y; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm i|-\rangle)$$

الف) ویژه کت های $|\pm\rangle$ را به عنوان پایه های قدیم و ویژه کت های $|S_x; \pm\rangle$ را به عنوان پایه های جدید فرض می کنیم. چه تبدیل یکانی این دو پایه ها را به هم تبدیل می کند؟

ب) کت های $|\pm\rangle$ در پایه های $|S_x; \pm\rangle$ چگونه نوشته می شوند؟

پ) ویژه کت های $|\pm\rangle$ را به عنوان پایه های قدیم و ویژه کت های $|S_y; \pm\rangle$ را به عنوان پایه های جدید فرض می کنیم. چه تبدیل یکانی این دو پایه ها را به هم تبدیل می کند؟

ت) کت های $|\pm\rangle$ در پایه های $|S_y; \pm\rangle$ چگونه نوشته می شوند؟

ه) نشان دهید که عملگرهای U به دست آمده در بخش های الف و پ یکانی هستند، یعنی

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1$$

جزئیات پاسخ این تمرین را می توانید در لینک زیر ببینید.

<https://www.phenix.bnl.gov/WWW/publish/seto/quantum/qm12.pdf>

pdf

تمرین

ویژه کت های عملگر S_z را با $|\pm\rangle$ نشان می دهیم. همچنین داریم

$$|S_x; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm |-\rangle) \quad |S_y; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm i|-\rangle)$$

الف) ویژه کت های $|\pm\rangle$ را به عنوان پایه های قدیم و ویژه کت های $|S_x; \pm\rangle$ را به عنوان پایه های جدید فرض می کنیم. چه تبدیل یکانی این دو پایه ها را به هم تبدیل می کند؟ پاسخ:

$$\hat{U} \doteq \begin{pmatrix} \langle \text{old}_1 | \text{new}_1 \rangle & \langle \text{old}_1 | \text{new}_2 \rangle \\ \langle \text{old}_2 | \text{new}_1 \rangle & \langle \text{old}_2 | \text{new}_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle + | S_x + \rangle & \langle + | S_x - \rangle \\ \langle - | S_x + \rangle & \langle - | S_x - \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \langle + | (|+\rangle + |-\rangle) \rangle & \langle + | (|+\rangle - |-\rangle) \rangle \\ \langle - | (|+\rangle + |-\rangle) \rangle & \langle - | (|+\rangle - |-\rangle) \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ب) کت های $|\pm\rangle$ در پایه های $|S_x; \pm\rangle$ چطور نوشته می شوند؟ پاسخ:

$$|+\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |-\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

پ) ویژه کت های $|\pm\rangle$ را به عنوان پایه های قدیم و ویژه کت های $|S_y; \pm\rangle$ را به عنوان پایه های جدید فرض می کنیم. چه تبدیل یکانی این دو پایه ها را به هم تبدیل می کند؟

ت) کت های $|\pm\rangle$ در پایه های $|S_y; \pm\rangle$ چطور نوشته می شوند؟

ه) نشان دهید که عملگرهای U به دست آمده در بخش های الف و پ یکانی هستند، یعنی

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I$$

تمرین

- حالت دلخواه اسپینی $|\chi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید که نرمال است: $|a|^2 + |b|^2 = 1$. برای این حالت موارد خواسته شده را محاسبه کنید. دقت کنید که ضرایب a و b مختلط هستند.

(a) $\langle S_x \rangle$

(b) $\langle S_y \rangle$

(c) $\langle S_z \rangle$

(d) $\langle S_x^2 \rangle$

(e) $\langle S_y^2 \rangle$

(f) $\langle S_z^2 \rangle$

(g) Check that $\langle S_x^2 \rangle + \langle S_y^2 \rangle + \langle S_z^2 \rangle = \langle S^2 \rangle$.

جزئیات پاسخ این تمرین را می توانید در لینک زیر ببینید.

[https://faculty.washington.edu/seattle/physics541/11solved.](https://faculty.washington.edu/seattle/physics541/11solved.pdf)

pdf

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید تغییر پایه های فضا و مفهوم آن را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

۱ منظور از عملگر تبدیل و ماتریس تبدیل چیست؟

۲ چه عملگری را یکانی می نامند؟

۳ منظور از رابطه $|b_i\rangle = U|a_i\rangle$ چیست؟

۴ منظور از رابطه $X' = U^\dagger X U$ چیست؟

۵ دو روش گفته شده برای قطری کردن یک ماتریس غیرقطری را توضیح دهید.

اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراوش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.

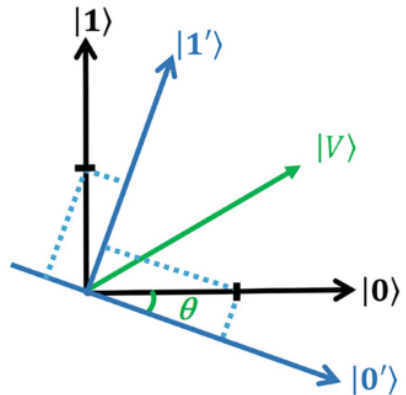
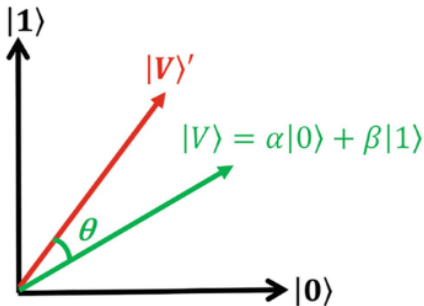


تمرین ها: زمان تحویل ۳۰ آذرماه

- لطفا تمرین های ۲۱ تا ۲۳ از فصل اول کتاب ساکورایی را پاسخ دهید.
- لطفا تمرین ها و پرسش های بالا را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: تبدیل های یکانی در مکانیک کوانتومی

- در جلسه بعد درباره ویژگی های تبدیل های یکانی و دلیل اهمیت آنها در مکانیک کوانتومی بحث می کنیم.



منابع

- ❶ Modern Quantum Mechanics, 3rd Edition, by J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge University Pr.
- ❷ Principles of Quantum Mechanics by Ramamurti Shankar, Plenum Press
- ❸ Quantum Mechanics: Concepts and Applications, 2nd Edition by Nouredine Zettili
- ❹ Introduction to Quantum Mechanics by David J. Griffiths
- ❺ Quantum Mechanics: An Introduction by Walter Greiner
- ❻ Quantum Physics I by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>
- ❼ Quantum Physics II by Prof. Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare
<https://ocw.mit.edu/courses/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/>
- ❽ Professor M does Science,
<https://www.youtube.com/@ProfessorMdoesScience>

با سپاس از توجه شما