

مقدمه روش های ریاضی در علوم فیزیکی

بسط تیلور و سری های توانی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

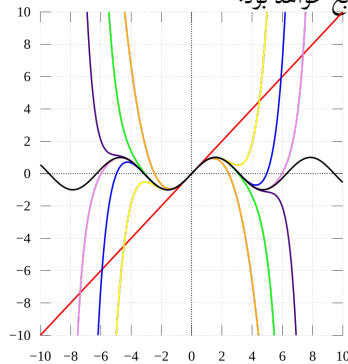
- حسین شناور مقدمه روش های ریاضی در علوم فیزیکی

۱ بسط تیلور و سری های توانی

- بسط تیلور
- سری های توانی

بسط تیلور

- بسط تیلور یک روش بسیار قوی برای محاسبه، استدلال و اثبات در روش های ریاضی-فیزیک است. در این روش در واقع ما یک تابع را به صورت مجموع جملاتی می نویسیم که (معمولا) به ترتیب از اهمیت آنها کاسته می شود. سپس جملات را تا تقریبی (دقتی) که نیاز داریم نگه داشته و بقیه را دور میریزیم. جملاتی که از آنها صرف نظر می کنیم را باقیمانده سری تیلور می نامند. اگر باقیمانده سری تیلور از دقت مورد نظر ما کوچکتر باشد، بسط تیلور تابع مورد نظر یک "تقریب درست" از آن تابع خواهد بود.



به دست آوردن بسط تیلور

- فرض کنید که تابع $f(x)$ در بازه $x \in [a, b]$ تا مرتبه n مشتق پذیر و مشتق آن پیوسته است. ما می خواهیم n بار از تابع مشتق n ام، یعنی $f^{(n)}(x)$ ، انتگرال بگیریم. مثلاً در اولین انتگرال گیری داریم:

$$\int_a^x f^{(n)}(x_1) dx_1 = f^{(n-1)}(x_1) \Big|_a^x = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)$$

همچنین در دومین و سومین انتگرال گیری به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} \int_a^x dx_2 \int_a^{x_2} f^{(n)}(x_1) dx_1 &= \int_a^x dx_2 \left[f^{(n-1)}(x_2) - f^{(n-1)}(a) \right] \\ &= f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(a) - (x-a)f^{(n-1)}(a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^x dx_3 \int_a^{x_3} dx_2 \int_a^{x_2} f^{(n)}(x_1) dx_1 &= f^{(n-3)}(x) - f^{(n-3)}(a) \\ &\quad - (x-a)f^{(n-2)}(a) - \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(n-1)}(a). \end{aligned}$$

به دست آوردن بسط تیلور

- اگر همینطور انتگرال گیری را ادامه دهیم، در n امین انتگرال گیری از تابع $f^{(n)}(x)$ خواهیم داشت:

$$\int_a^x dx_n \cdots \int_a^{x_2} f^{(n)}(x_1) dx_1 = f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) \\ - \cdots - \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a).$$

حال می توان با تعریف انتگرال سمت چپ به عنوان باقیمانده سری

$$R_n = \int_a^x dx_n \cdots \int_a^{x_2} dx_1 f^{(n)}(x_1).$$

بسط تیلور تابع $f(x)$ حول نقطه $x = a$ را به دست آورد:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) \\ + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n,$$

- دقت کنید که عبارت بالا کاملاً دقیق است و فعلاً هیچ جمله ای کنار گذاشته نشده است.

شکل لاگرانژی تابع باقیمانده

● شکل انتگرالی تابع باقیمانده را می توان با محاسبه انتگرال ها به صورت ساده تری در آورد که ”شکل لاگرانژی تابع باقیمانده” نامیده می شود:

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

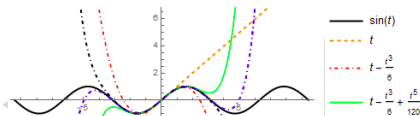
می توان از شکل انتگرالی تابع باقیمانده انتگرال گرفت و شکل دیفرانسیلی آن را به دست آورد.
اثبات: برای اینکار می توانید از قضیه مقدار میانگین، یعنی $\int_a^x g(x)dx = (x-a)g(\xi)$ استفاده کنید (که در آن $a \leq \xi \leq x$ ، ξ بخوانید کسای، زای و یا کسی) و n بار انتگرال بگیرید. مثلاً

$$R_n = \int_a^x \dots \int_a^{x_2} f^{(n)}(x_1) dx_1 = \int_a^x \dots \int_a^{x_2} dx_2 f^{(n)}(\xi)(x_2 - a)$$

$$R_n = f^{(n)}(\xi) \int_a^x \dots \int_a^{x_2} dx_2 (x_2 - a) = f^{(n)}(\xi) \int_a^x \dots \int_a^{x_2} dx_2 \frac{(x_2 - a)^2}{2!}$$

$$R_n = \dots = f^{(n)}(\xi) \frac{(x-a)^n}{n!}$$

● در واقع در نوشتن بسط توابع با استفاده از بسط تیلور، مساله همگرایی سری چندان مطرح نیست بلکه این مساله جایگزین می شود که ”آیا تابع باقیمانده R_n به اندازه کافی کوچک هست و یا خیر؟“



بسط تیلور

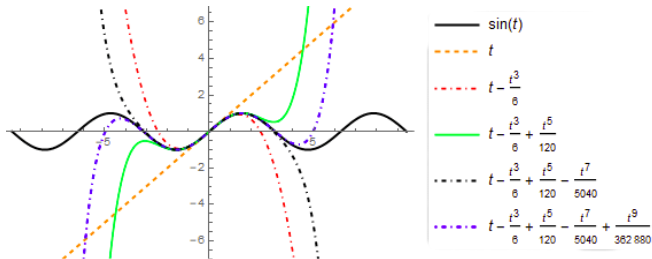
• اگر تابع $f(x)$ به صورتی باشد که $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ ، آنگاه می توان بسط تیلور تابع $f(x)$ را به صورت زیر نوشت

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

• تمرین: با یک تغییر متغیر نشان دهید که سری تیلور بالا را می توان به شکل زیر هم نوشت. تفسیر این سری چیست؟

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)$$



سری توانی و بسط تیلور

در بسیاری از مواقع لازم است که بسط تیلور را حول نقطه $x = 0$ بنویسیم. در واقع حتی اگر نقطه مورد نظر ما $x \neq 0$ باشد، همیشه می توان با یک تبدیل مختصات نقطه $x = 0$ را به عنوان نقطه مرجع بسط انتخاب کرد. در چنین حالتی بسط تیلور به صورت ساده تر زیر تبدیل می شود:

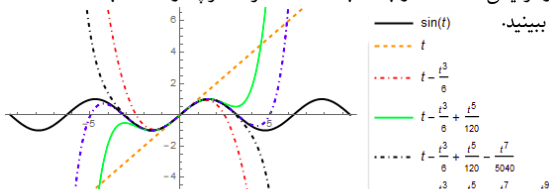
$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

با توجه به اینکه در اینجا تابع کلی $f(x)$ بر حسب توابع توانی x^n نوشته شده است، این بسط را بسط توانی تابع $f(x)$ نیز می نامند.

معنی این بسط چیست؟ پاسخ را با یک مثال نشان خواهیم داد. در ادامه اثبات خواهیم کرد که بسط مکلاورن (مکلاورن) تابع سینوس حول $x = 0$ به صورت زیر نوشته می شود.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

یعنی می توان به جای تابع سینوس در نزدیکی $x = 0$ از بسط بالا استفاده کرد. هرچقدر تعداد جملات بیشتر، دقت بسط بیشتر! شکل زیر را ببینید.



بسط مکلاورن تابع نمایی

- فرض کنید $f(x) = e^x$. می خواهیم بسط این تابع حول $x = 0$ را بیابیم. برای انجام اینکار باید مشتقات متوالی این تابع را در $x = 0$ بیابیم. می توان به راحتی دید که

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = f^{(1)}(x) = e^x \quad f^{(2)}(x) = e^x \quad \dots \quad f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f(0) = e^0 = 1 \quad f^{(1)}(0) = 1 \quad f^{(2)}(0) = 1 \quad \dots \quad f^{(n)}(0) = 1$$

این نتیجه را در بسط مکلاورن جایگزین می کنیم:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

بنابراین بسط مکلاورن تابع نمایی حول نقطه $x = 0$ برابر است با

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

- تمرین: با استفاده از آزمون نسبت دالامبر نشان دهید که این سری همگراست.

باقیمانده بسط چطور رفتار می کند؟

- می خواهیم بدانیم که باقیمانده بسط تابع $f(x) = e^x$ حول نقطه $x = 0$ چطور رفتار می کند. پاسخ: با استفاده از فرمول باقیمانده می توان نوشت:

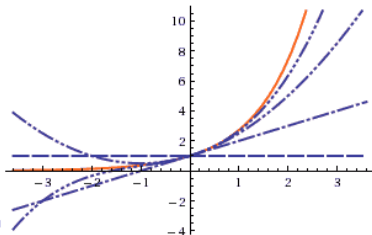
$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\xi) = \frac{x^n}{n!} e^{\xi}$$

که در آن ξ عددی در بازه 0 و x می باشد. در واقع x می تواند منفی باشد و می توان نوشت

$$R_n \leq \frac{|x|^n}{n!} e^{|x|}$$

سوال: چرا مقدار ξ در نما با مقدار $|x|$ جایگزین شد؟

- نکته مهم اینجاست که هرچقدر هم $|x|$ افزایش یابد، همیشه می توان عددی مانند n را یافت که برای آن $n!$ بتواند بر صورت کسر بالا غلبه کند؛ یعنی باقیمانده به سمت صفر میل می کند و در نتیجه بسط تابع $f(x) = e^x$ در بازه $-\infty < x < \infty$ به صورت مطلق همگراست.



بازنویسی بسط مکلورن

فرض کنید "عملگر" مشتق یعنی $\frac{d}{dx}$ را با $D = \frac{d}{dx}$ نشان دهیم. در اینصورت می توان از بسط مکلورن

زیر استفاده کرد

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

و نوشت:

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n D^n}{n!} f(x) = e^{hD} f(x)$$

این نوع نوشتن بسیار فشرده بسط مکلورن هم می تواند گاهی اوقات بسیار مفید باشد.

بسط تابع لگاریتمی

• تابع $f(x) = \ln(1+x)$ را در نظر بگیرید. می توان مشتقات متوالی این تابع را محاسبه کرد و نشان داد

$$f'(x) = (1+x)^{-1},$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n}.$$

در نتیجه بسط توانی تابع لگاریتمی $f(x) = \ln(1+x)$ حول نقطه $x = 0$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + R_n \\ &= \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} \frac{x^p}{p} + R_n. \end{aligned}$$

که در آن باقیمانده برابر است با

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq x \\ &\leq \frac{x^n}{n}, \quad 0 \leq \xi \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

بنابراین برای $0 \leq x \leq 1$ تابع باقیمانده با افزایش مقدار n به سمت صفر میل می کند.

بسط تابع لگاریتمی

تمرین: با استفاده از آزمون نسبت دالامبر نشان دهید که بسط

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

در بازه $0 < x < 1$ همگراست.

تمرین: با استفاده از معیار لایبنیتس نشان دهید که سری زیر در $x = 1$ همگراست.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

تمرین: مقدار سری در $x = 1$ را به دست آورید. پاسخ:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1}.$$

تمرین: نشان دهید که مقدار سری بالا در $x = -1$ واگراست زیرا در $x = -1$ سری هارمونیک را داریم.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید بسط تیلور و سری های توانی و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

۱. بسط تیلور را بنویسید. شرایط درستی بسط تیلور کدامند؟
۲. بسط مکلورن را بنویسید. شرایط درستی بسط مکلورن کدامند؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.



تمرین ها

- تمرینات موجود در متن درس را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: ویژگی های سری توانی

- در جلسه بعد با اصلی ترین ویژگی های سری توانی آشنا خواهیم شد. همچنین قضیه یکتایی را بررسی خواهیم کرد.

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty,$$

منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)

با سپاس از توجه شما

