

مقدمه روش های ریاضی در علوم فیزیکی

قضیه بسط دوجمله ای

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ قضیه بسط دوجمله ای
- قضیه بسط دوجمله ای
- یادآوری استقرای ریاضی

قضیه بسط دوجمله ای

• یک کاربرد بسیار مهم بسط مکلورن استفاده از این بسط برای اثبات قضیه بسط دوجمله ای است.

• فرض کنید $f(x) = (1+x)^m$. در اینجا m می تواند هر عدد حقیقی مثبت و یا منفی باشد. حال با استفاده از بسط مکلورن، یعنی

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

خواهیم داشت

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + R_n.$$

که در آن تابع باقیمانده عبارت است از

$$R_n = \frac{x^n}{n!} (1+\xi)^{m-n} m(m-1) \dots (m-n+1),$$

که در آن ξ عددی بین 0 و x می باشد.

• تمرین: نتیجه بالا را اثبات کنید.

• حال می خواهیم همگرایی و شعاع همگرایی بسط توانی بالا را بررسی کنیم. در واقع می خواهیم رفتار ضرایب بسط برای m های صحیح مثبت، صحیح منفی و غیر صحیح را مطالعه کنیم.

بسط دوجمله ای وقتی m عددی طبیعی است.

- می توان به راحتی دید که وقتی m عددی طبیعی (صحیح و مثبت) است، بسط دوجمله ای تعداد جملات محدودی دارد. در واقع ضرایب بسط در اینجا همان اعداد موجود در مثلث خیام-پاسکال هستند:

		1			
	1		1		
	1	2	1		
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

$$(x + 1)^1 = x + 1$$

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

$$(x + 1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$

$$(x + 1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$$

$$(x + 1)^7 = x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1$$

$$(x + 1)^8 = x^8 + 8x^7 + 28x^6 + 56x^5 + 70x^4 + 56x^3 + 28x^2 + 8x + 1$$

$$(x + 1)^9 = x^9 + 9x^8 + 36x^7 + 84x^6 + 126x^5 + 126x^4 + 84x^3 + 36x^2 + 9x + 1$$

$$(x + 1)^{10} = x^{10} + 10x^9 + 45x^8 + 120x^7 + 210x^6 + 252x^5 + 210x^4 + 120x^3 + 45x^2 + 10x + 1$$

بررسی ضرایب بسط دوجمله ای

- با توجه به اینکه بسط دوجمله ای در محاسبات به صورت مکرر ظاهر می شود، ضرایب جملات این بسط را با نمادگذاری خاصی نشان می دهند. بخوانید (از نظریه ترکیبیات آمده) ترکیب n از m :

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!}$$

و بنابراین قضیه بسط دوجمله ای را می توان به شکل فشرده تر زیر نوشت:

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$$

- تمرین: روابط زیر را اثبات کنید.

$$(1+x)^{-\frac{3}{4}} = 1 - \frac{3x}{4} + \frac{21x^2}{32} - \frac{77x^3}{128} + O(x^4)$$

$$(1+x)^{-\pi} = 1 - \pi x + \frac{1}{2}(\pi + \pi^2)x^2 + \frac{1}{6}(-2\pi - 3\pi^2 - \pi^3)x^3 + O(x^4)$$

$$(1+x)^{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}x + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - 1\right)x^3 + O(x^4)$$

- توجه، مهم: نمادگذاری $O(x^4)$ به معنی صرفنظر کردن از نوشتن جملات با مراتب برابر و بزرگتر از x^4 است. با این نمادگذاری در کتاب های فیزیکی به وفور روبرو خواهیم شد.

بررسی ضرایب بسط دوجمله ای وقتی m عددی صحیح و منفی است.

وقتی m عددی طبیعی است، ضرایب بسط دوجمله ای به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! (m-n)!}$$

برای اعداد صحیح و منفی m می توان عدد مثبت و صحیح $p = -m$ تعریف کرد. سپس ضریب بسط دوجمله ای به صورت زیر به دست می آید.

$$\binom{-p}{n} = (-1)^n \frac{p(p+1) \cdots (p+n-1)}{n!} = \frac{(-1)^n (p+n-1)!}{n! (p-1)!}$$

تمرین: روابط زیر را اثبات کنید.

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \infty$$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \infty$$

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots \infty$$

$$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \infty$$

$$(1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - \dots \infty$$

$$(1-x)^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 + \dots \infty$$

ضرایب بسط دوجمله ای وقتی m عددی غیر صحیح است.

- برای مقادیر غیر صحیح m بهتر است از نمادگذاری پُخهامر (پوکهامر Pochhammer symbol) استفاده کنیم. این نمادگذاری برای عدد دلخواه a و عدد حسابی (صحیح نامنفی) n به صورت $(a)_n$ نوشته شده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_1 = a, \quad (a)_{n+1} = a(a+1) \cdots (a+n), \quad (n \geq 1)$$

- تمرین: روابط پُخهامر زیر را اثبات کنید. مقادیر $(x)_5$ و $(x)_6$ را بیابید.

$$(x)_0 = 1$$

$$(x)_1 = x$$

$$(x)_2 = x^2 + x$$

$$(x)_3 = x^3 + 3x^2 + 2x$$

$$(x)_4 = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$$

- نتیجه: برای مقادیر صحیح و غیر صحیح m می توان ضرایب بسط دوجمله ای را با استفاده از نمادگذاری پُخهامر به صورت زیر نوشت:

$$\binom{m}{n} = \frac{(m-n+1)_n}{n!}$$

نمادگذاری فاکتوریل دوگانه

تاکنون نمادگذاری های متنوعی برای توصیف ضرایب بسط دوجمله ای ابداع شده اند. یکی از مهم ترین انواع این نمادگذاری ها نماد فاکتوریل دوگانه است. این نمادگذاری را با مثال زیر توضیح خواهیم داد.

بسط دوجمله ای تابع $f(x) = 1/\sqrt{1+x}$ را بنویسید.
پاسخ: این بسط را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} - \frac{63x^5}{256} + O(x^6)$$

این ضرایب چطور به دست آمده اند؟ پاسخ: ضریب جمله n ام برابر است با

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-1}{2}\right) \\ &= (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \end{aligned}$$

در اینجا علامت فاکتوریل دوگانه نشان دهنده ضرب اعداد زوج و یا فرد در یکدیگر است:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = (2n-1)!!$$

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = (2n)!!.$$

می توان به راحتی نشان داد که روابط زیر بین فاکتوریل ها برقرار است (توجه $1 = (-1)!! = (0)!!$):

$$(2n)!! = 2^n n! \quad \text{and} \quad (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

بسط انرژی نسبیتی یک ذره

● انرژی کل یک ذره نسبیتی به جرم m و سرعت v با استفاده از رابطه زیر داده می شود:

$$E = mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}$$

که در اینجا c نشان دهنده سرعت نور است. حال می توان عبارت حاصله را برحسب کمیت $x = -v^2/c^2$ بسط داد (دقت کنید که $|x| < 1$). در این صورت می توان نوشت :

$$E = mc^2 \left[1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{3}{8} \left(-\frac{v^2}{c^2} \right)^2 - \frac{5}{16} \left(-\frac{v^2}{c^2} \right)^3 + \dots \right]$$

$$= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}mv^2 \left(\frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{5}{16}mv^2 \left(-\frac{v^2}{c^2} \right)^2 + \dots$$

اگر انرژی سکون ذره (mc^2) را جدا کنیم، مابقی جملات را می توان به صورت بسط انرژی جنبشی نسبیتی ذره در نظر گرفت:

$$E_{\text{kinetic}} = \frac{1}{2}mv^2 \left[1 + \frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} + \frac{5}{8} \left(-\frac{v^2}{c^2} \right)^2 + \dots \right]$$

اولین جمله عبارت بالا همان انرژی جنبشی کلاسیک ذره است.

تعمیم بسط دوجمله ای

• بسط دوجمله ای را می توان برای اعداد مثبت n به صورت زیر تعمیم داد:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \sum \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_m^{n_m}$$

که در آن به اندازه m بار جمع بندی داریم. در واقع جمع بندی باید بر روی همه مقادیر $n_1, n_2, \dots, n_m$ تا n_m انجام شود. این شمارنده ها طبیعی هستند و برای آنها داریم $\sum_{i=1}^m n_i = n$.

• تمرین: فرمول لایبنیتس برای مشتق n ام حاصلضرب دو تابع $u(x)v(x)$ را اثبات کنید.

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (u(x)v(x)) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{d^i u(x)}{dx^i}\right) \left(\frac{d^{n-i} v(x)}{dx^{n-i}}\right)$$

استقرای ریاضی



استقرای ریاضی روشی از اثبات است. با این نوع استدلال پیشتر در دبیرستان آشنا شده اید، ولی از آنجا که از این روش اثبات در مسائل ریاضی فیزیک به وفور استفاده می شود، ما این روش را در اینجا مرور خواهیم کرد.

در این روش، ما متوجه می شویم که یک گزاره برای تعدادی عدد صحیح متوالی درست است. با این وجود این سوال مطرح می شود که آیا گزاره مورد نظر برای اعداد صحیح دلخواه نیز برقرار است و یا نه. اساس روش استقرای ریاضی به صورت زیر است:

۱ نشان دهید که گزاره مورد نظر برای یک مقدار اولیه مانند n_0 درست است.

۲ فرض کنید که گزاره مورد نظر برای n درست است و از اینجا نشان دهید که گزاره برای $n + 1$ هم درست است.

۳ پس گزاره برای $n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$ هم درست خواهد بود.

روش استقرای ریاضی را اولین بار کرجی معرفی کرده است.

مثال اول از استقرا

- نشان دهید که مجموع n عدد طبیعی به صورت زیر به دست می آید:

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- اثبات: درستی رابطه را برای چند عدد چک کنید:

$$S(1) = 1 = \frac{1 \times (1+1)}{2} = 1$$

$$S(2) = 1 + 2 = \frac{2 \times (2+1)}{2} = 3$$

$$S(3) = 1 + 2 + 3 = \frac{3 \times (3+1)}{2} = 6$$

حال فرض کنید $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ درست است و درستی $S(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ را نشان دهید:

$$S(n+1) = 1 + 2 + 3 + \dots + n + n+1 = (1 + 2 + 3 + \dots + n) + n+1$$

$$S(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

پس رابطه بالا برای همه $n \geq 1$ درست است.

مثال اول از استقرا

• درستی رابطه زیر را نشان دهید:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

• اثبات: لطفا درستی رابطه را برای $n = 1, 2, 3$ چک کنید. ما مستقیما به سراغ مرحله دوم اثبات می رویم؛ یعنی فرض می کنیم که گزاره مورد نظر برای k درست است و از اینجا نشان می دهیم که گزاره برای $k+1$ هم درست است:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \left(\sum_{i=1}^k i^2 \right) + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6} (k+1) [k(2k+1) + 6(k+1)] \\ &= \frac{1}{6} (k+1) (2k^2 + 7k + 6) \\ &= \frac{1}{6} (k+1) (k+2) (2k+3) \end{aligned}$$

پس رابطه بالا برای همه $k \geq 1$ درست است.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید ویژگی های بسط دو جمله ای و استقرای ریاضی و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ شیوه اثبات بسط دوجمله ای را بیان کنید.
- ۲ بسط دوجمله ای وقتی m عددی طبیعی است چه ویژگی منحصر به فردی دارد؟
- ۳ ضرایب بسط دوجمله ای وقتی m عددی طبیعی است چگونه نوشته می شوند؟
- ۴ ضرایب بسط دوجمله ای وقتی m عددی صحیح و منفی است چگونه نوشته می شوند؟
- ۵ ضرایب بسط دوجمله ای وقتی m عددی حقیقی و دلخواه است چگونه نوشته می شوند؟
- ۶ نماد پنجاهم را توضیح دهید.
- ۷ نماد فاکتوریل دوگانه را توضیح دهید.
- ۸ سه مرحله اثبات به روش استقرا را توضیح دهید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.



تمرین ها

- تمرینات موجود در متن درس را پاسخ دهید.
- تمرینات موجود در صفحات ۳۶ تا ۴۰ از ویرایش هفتم آرفکن پاسخ دهید.
- تمرینات موجود در صفحه ۴۱ از ویرایش هفتم آرفکن پاسخ دهید.
- به روش استقرا درستی روابط زیر را اثبات کنید:

$$3 + \sum_{i=1}^n (3 + 5i) = \frac{(n+1)(5n+6)}{2}$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^n = \frac{1}{3} (4^{n+1} - 1)$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right)$$

مبحث بعدی: روش های کاربردی در بسط توانی توابع

- در جلسه بعد با برخی روش های کاربردی در بسط توانی توابع آشنا خواهیم شد.

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty,$$

منابع

- 1. Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- 2. Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- 3. Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- 4. Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- 5. Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)

با سپاس از توجه شما

