

مقدمه روش های ریاضی در علوم فیزیکی

سری های متناوب

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

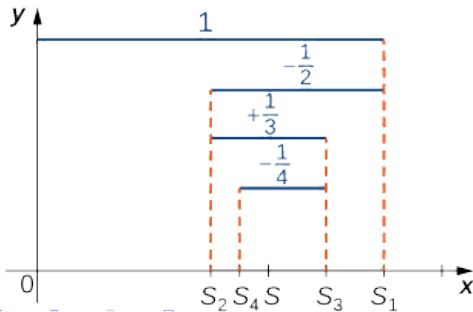
۱ سری های متناوب

• سری های متناوب

• سری های مطلق-همگرا و شرطی-همگرا

سری های متناوب

- تاکنون خود را به سری ها با جملات صرفا مثبت محدود کرده ایم. بدیهی است که سری های با جملات صرفا منفی نیز شرایط مشابهی خواهند داشت. ولی در محاسبات غالبا با سری هایی مواجه می شویم که علامت جملات در آنها یک در میان مثبت و منفی است. چنین سری هایی را سری های متناوب (alternating series) می نامند. در چنین حالتی جملات مثبت و منفی کم و بیش مجموع سری را تضعیف می کنند؛ در نتیجه اینگونه سری ها سریعتر همگرا می شوند.
- در ادامه معیار کلی لایبنیتس برای همگرایی سری های متناوب را معرفی و اثبات خواهیم کرد. البته برخی سری ها تغییر علامت بسیار پیچیده تری را از خود بروز می دهند. در این حالت غالبا آزمون انتگرال کاراست.



معیار لایبنتس برای همگرایی سری های متناوب

- معیار لایبنتس برای سری هایی به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ به شرط $a_n > 0$ بیان می کند که اگر a_n یکنوا نزولی باشد (یعنی $a_{n+1} < a_n$) و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ، آنگاه سری مورد نظر همگراست.
- اثبات: جملات انتهایی سری پس از جمله شماره $2n$ را در نظر می گیریم و آنها را با هم جمع می کنیم. اگر این باقیمانده (Remainder) سری محدود بود، سری نیز محدود است. جملات باقیمانده انتهایی را می توان به دو شکل نوشت:

$$R_{2n} = (a_{2n+1} - a_{2n+2}) + (a_{2n+3} - a_{2n+4}) + \dots$$

$$= a_{2n+1} - (a_{2n+2} - a_{2n+3}) - (a_{2n+4} - a_{2n+5}) - \dots$$

حال از آنجا که جملات سری کاهشی هستند، بنا به اولین رابطه می توان نتیجه گرفت که $R_{2n} > 0$ در حالی که بنا به دومین نتیجه داریم $R_{2n} < a_{2n+1}$. بنابراین می توان نتیجه گرفت:

$$0 < R_{2n} < a_{2n+1}$$

که نشان می دهد R_{2n} مثبت ولی محدود است. البته حد بالای R_{2n} را می توان با انتخاب شمارنده های بزرگ n کوچک و کوچکتر کرد.

- فرض کنید که جملات سری متناوب را تا شماره n نگه داشته و از بقیه صرف نظر کرده ایم. این کار را برش سری (truncation) می نامند.

- تمرین: نشان دهید که خطای برش سری متناوب (به شرط یکنوا نزولی بودن جملات a_n) هم علامت با آخرین جمله ای است که نگه داشته ایم و مقدار آن کمتر از اولین جمله ای است که از آن صرف نظر کرده ایم. راهنمایی: مانند اثبات بالا جملات سری را بنویسید.

مثال هایی از معیار لایبنیتس

● مثال ۱: سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

همگراست زیرا اولاً نزولی است $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$ و ثانیاً حد جمله عمومی وقتی n به سمت بینهایت میل

می کند صفر است: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

● مثال ۲: سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$$

همگراست زیرا اولاً نزولی است

$$\frac{n+1}{2^{n+1}} < \frac{n}{2^n} \Rightarrow n+1 < 2n \Rightarrow n > 1$$

و ثانیاً: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$

● مثال ۳: سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

همگراست زیرا اولاً نزولی است

$$\frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

و ثانیاً: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}} = 0$

مثال هایی از معیار لایبنیتس

● مثال ۴: سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$$

واگراست. دقت کنید که شرط نزولی بودن در اینجا وجود ندارد:

$$\frac{n+1}{n+2} < \frac{n}{n+1} \Rightarrow (n+1)^2 < n^2 + 2n \Rightarrow 1 < 0 \quad \text{false}$$

و شرط دوم هم درست نیست:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

در واقع از رابطه اخیر نتیجه می گیریم که سری بالا واگراست.

● یادآوری: در جلسه دوم از این مجموعه نتیجه گرفتیم که شرط لازم برای همگرایی سری این است که جملات با اندیس بسیار بزرگ به سمت صفر میل کنند:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

● تمرین (اختیاری): یک کد بنویسید و نشان دهید که سری بالا واگراست. راهنمایی: مقدار

$$\sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$$

را به ازای $2 + 10^5$, $10^5 + 1$, 10^5 , $10^5 - 1$ را محاسبه کنید. چه رفتاری می بینید؟

تعیین حد برای باقیمانده سری

● مثال ۱: برای سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

داریم:

$$|R_{10}| \leq a_{11} = \frac{1}{11^2} \approx 0.008265$$

● مثال ۱: برای سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

داریم:

$$|R_{20}| \leq a_{21} = \frac{1}{21} \approx 0.047619$$

● توجه: چند مثال بالا از آدرس زیر برداشته شده اند:

<https://math.libretexts.org/>

تغییر علامت های پیچیده تر در سری های متناوب

● معیار لایبنیتس اساسا به تغییر علامت یک در میان جملات سری وابسته است. هرگونه تغییر علامت پیچیده تر می تواند به واگرایی سری منجر شود. مثال بعد را ببینید.

● مثال: ثابت کنید که سری زیر

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} = -\ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right)$$

برای $0 < x < 2\pi$ همگراست.

پاسخ: تغییر علامت این سری به صورتی "نیست" که معیار لایبنیتس معرفی می کند و پیچیده تر از آن است (چک کنید!). برای اثبات همگرایی از آزمون انتگرال استفاده می کنیم (شکل شامل جزء صحیح و مشتق):

$$\sum_{n=N_1+1}^{N_2} f(n) = \int_{N_1}^{N_2} f(x) dx + \int_{N_1}^{N_2} (x - [x]) f'(x) dx$$

$$S = \int_1^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} dn + \int_1^{\infty} (n - [n]) \left[-\frac{x}{n} \sin(nx) - \frac{\cos(nx)}{n^2} \right] dn.$$

یعنی

برای محاسبه انتگرال اول داریم:

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} dn = \left[\frac{\sin(nx)}{nx} \right]_1^{\infty} + \frac{1}{x} \int_1^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} dn,$$

تغییر علامت های پیچیده تر در سری های متناوب

• انتگرال اخیر محدود است زیرا

$$\left| \int_1^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} dn \right| < \int_1^{\infty} \frac{dn}{n^2} = 1.$$

تمرین: به همین صورت نشان دهید که انتگرال شامل جمله $\cos(nx)/n^2$ نیز محدود است.
 • حال باید محدود بودن انتگرال زیر را بررسی کنیم:

$$\int_1^{\infty} (n - [n]) \frac{\sin(nx)}{n} dn.$$

برای محاسبه این انتگرال، فرض کنید $g'(n) = (n - [n]) \sin(nx)$. با این فرض می توان نوشت:

$$g(N) = \int_1^N (n - [n]) \sin(nx) dn$$

تمرین: ما شکل دقیق تابع بالا را نمی دانیم، ولی می دانیم که این تابع محدود است. چرا؟!
 حال با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء می توان نوشت:

$$\int_1^{\infty} (n - [n]) \frac{\sin(nx)}{n} dn = \int_1^{\infty} \frac{g'(n)}{n} dn = \left[\frac{g(n)}{n} \right]_{n=1}^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{g(n)}{n^2} dn,$$

حال از آنجا که تابع $g(n)$ یک تابع محدود است، حاصل انتگرال بالا نیز محدود است. در نتیجه سری

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$$

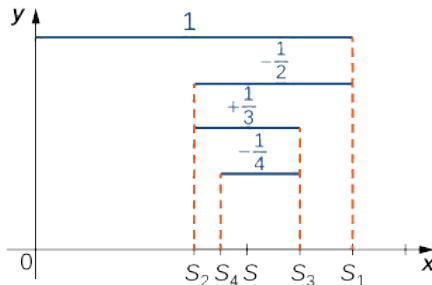
نیز محدود خواهد بود.

سری های مطلق-همگرا و شرطی-همگرا

- تعریف: می‌گوییم یک سری به صورت مطلق-همگراست اگر مجموع قدرمطلق جملات آن همگرا باشد. اگر سری همگرا باشد، ولی مطلق-همگرا نباشد آن سری را شرطی-همگرا می‌گوییم.
مثلا سری تناوبی هارمونیک شرطی-همگراست

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln(2)$$

- تمرین: همگرایی این سری را با استفاده از معیار لایبنیتس اثبات کنید.
هرچند سری بالا مطلق-همگرا نیست زیرا می‌دانیم که سری هارمونیک واگراست.



سری های مطلق-همگرا و شرطی-همگرا

- یک قضیه بسیار مهم: اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.
- اثبات: فرض کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگراست. در این صورت برای جملات این سری داریم $a_n = |a_n|$ و یا $a_n = -|a_n|$.

در نتیجه می توان نوشت $|a_n| + a_n = 2|a_n|$ و یا $|a_n| + a_n = 0$. بنابراین خواهیم داشت:

$$0 \leq |a_n| + a_n \leq 2|a_n|$$

حال با توجه به اینکه سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگراست، سری زیر نیز باید همگرا باشد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

در نتیجه سری

هم باید همگرا باشد.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید سری های متناوب و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

۱ معیار لایبنیتس را با ذکر یک مثال توضیح دهید.

۲ یک سری را بنویسید که شرطی-همگرا بوده ولی مطلق همگرا نباشد.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.

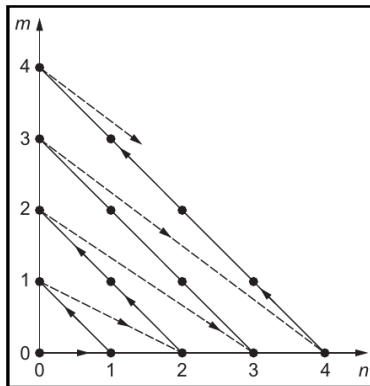


تمرین ها

- تمرینات موجود در متن درس را پاسخ دهید.
- تمرینات موجود در صفحه ۱۳ از ویرایش هفتم را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: سری های دوگانه و بازآرایش جملات آنها

- در جلسه بعد با سری های دوگانه آشنا خواهیم شد. اینها سری هایی هستند که دو اندیس (شمارنده) دارند. سپس بازآرایش جملات این سری ها را در نظر خواهیم گرفت. این روش در ساده سازی سری ها کمک بسیار بزرگی خواهد بود.



منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)

با سپاس از توجه شما

