

فیزیک مکانیک

فصل دهم: دوران

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در تابستان و پاییز سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

فصل دهم: دوران



گشتاور



قانون دوم نیوتن برای حرکت دورانی



کار و انرژی جنبشی برای حرکت دورانی



آنچه گذشت...

- قوانین حرکت:
یکی از راه های نوشتن قوانین حرکت، استفاده از سه قانون حرکت نیوتن است. این شکل از علم مکانیک کلاسیک را مکانیک نیوتنی می نامند. نوشتن قوانین مکانیک به شکل های دیگر، مانند مکانیک لاگرانژی، هامیلتونی و ... هم ممکن است.
- ما در این کتاب مکانیک نیوتنی را بررسی خواهیم کرد.
- قانون اول: وقتی برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر باشد، جسم حالت حرکت خود را حفظ خواهد کرد. یعنی اگر ساکن باشد، ساکن خواهد ماند و اگر با سرعت در حال حرکت باشد، با همان سرعت به حرکت خود ادامه خواهد داد.
- قانون دوم: رابطه شتاب و نیرو

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

قانون کولن برای دو بار نقطه ای:

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

قانون هوک برای جرم متصل به فنر

$$F = -kx$$

نیروی عمودی سطح، کشش نخ، نیروی ارشمیدس و ...

این دو دسته قانون، طیف بسیار گسترده ای از پدیده های فیزیکی را به درستی توضیح می دهند.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

قانون سوم نیوتن: هر عملی را عکس العملی است، با مقدار مساوی و در جهت خلاف آن

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

قوانین نیوتن فقط در دستگاه های لخت برقرار هستند.

پرشش: حرکت یک جسم صلب (یک نوع خاص از سیستم ذره که در آن فاصله ذرات تغییر نمی کند) چگونه است؟

جمع بندی روابط بین متغیرهای زاویه ای

سرعت زاویه ای لحظه ای عبارت است از مشتق موقعیت زاویه ای؛ به عبارت دیگر، سرعت زاویه ای شیب نمودار موقعیت زاویه ای است. از طرف دیگر، موقعیت زاویه ای برابر است با مساحت زیر نمودار سرعت زاویه ای-زمان:

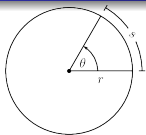
$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad d\theta = \omega(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta = \int_0^t \omega(t)dt$$

شتاب زاویه ای لحظه ای عبارت است از مشتق سرعت زاویه ای لحظه ای؛ به عبارت دیگر، شتاب زاویه ای شیب نمودار سرعت زاویه ای لحظه ای است. از طرف دیگر، سرعت زاویه ای برابر است با مساحت زیر نمودار شتاب زاویه ای-زمان:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad d\omega = \alpha(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\omega_i}^{\omega_f} d\omega = \int_0^t \alpha(t)dt$$

برای درک درست این روابط، به سه مثال زیر دقت کنید.

ارتباط بین متغیرهای دورانی و خطی



فرض کنید که جسم صلبی در حال دوران است. در این صورت، اگر نقطه ای از این جسم به اندازه زاویه θ بر حسب رادیان دوران کند، فاصله طی شده توسط این نقطه برابر است با

$$s = r\theta$$

یعنی فاصله خطی طی شده در طول دوران با فاصله زاویه ای طی شده رابطه دارد.

با توجه به اینکه فاصله نقطه مورد نظر تا محور دوران (یعنی r) تغییر نمی کند (چون جسم صلب است)، داریم:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} r\theta = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

$$v = r\omega$$

و یا

به همین صورت، می توانیم تغییر در اندازه بردار سرعت را بیابیم:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} r\omega = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

و یا شتاب مماسی (که در اثر تغییر در اندازه بردار سرعت بوجود می آید) برابر است با

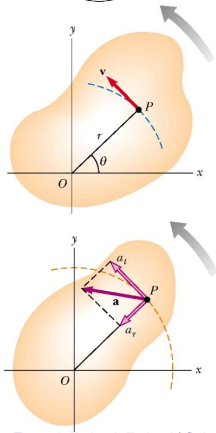
$$a_t = r\alpha$$

سه رابطه اساسی بالا فقط در صورتی برقرار هستند که کمیت های زاویه ای بر حسب رادیان سنجیده شوند.

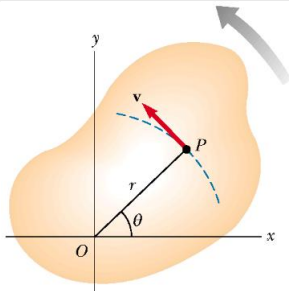
یادآوری شتاب مرکزگرا (که در اثر تغییر در جهت بردار سرعت بوجود می آید) برابر است با

$$a_r = v^2/r = r\omega^2$$

شکل ها از ویرایش هشتم مبانی فیزیک هالیدی.



انرژی جنبشی دوران و لختی دورانی



شکل از ویرایش دهم فیزیک هالیدی.

برای پیدا کردن انرژی جنبشی یک جسم در حال دوران، فرض می‌کنیم که این جسم از ذرات بسیار زیادی تشکیل شده است. جرم ذره i ام برابر m_i و سرعت آن برابر v_i می‌باشد. انرژی جنبشی این ذره خاص برابر است با

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

همچنین، انرژی جنبشی کل جسم برابر است با مجموع انرژی‌های جنبشی تک تک ذرات. یعنی

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n v_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$$

همچنین برای هر ذره i از یک جسم صلب داریم:

$$v_i = r_i \omega$$

زیرا تمام اجزاء جسم صلب با یک سرعت دورانی مشخص می‌چرخند (وگرنه جسم صلب نخواهد بود!). با توجه به این نکته می‌توانیم انرژی جنبشی کل را به صورت زیر بنویسیم:

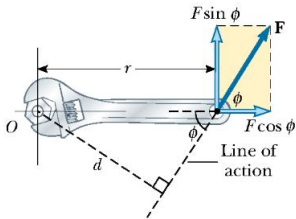
$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

کمیت زیر را لختی دورانی جسم (rotational inertia) حول محور z می‌نامند:

$$I_z = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$$

در اینجا محور z محور دوران است. لختی دورانی را در فارسی گاهی "ممان اینرسی" هم می‌نامند. در جلسه قبل درباره محاسبه لختی دورانی بحث کردیم.

چطور آچار را می پیچانیم؟



در هنگام باز کردن یک پیچ با آچار می فهمیم که:

هرچه قدر آچار بلندتر باشد، یعنی r بزرگتر باشد، پیچ راحت تر باز می شود.

هرچه قدر نیرو در جهت عمود بر محور آچار (یعنی $F \sin \phi$) بزرگتر باشد، پیچ راحت تر باز می شود.

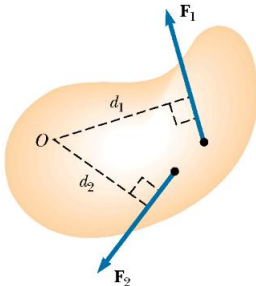
نیرو در راستای محور آچار (یعنی $F \cos \phi$) تاثیری در باز کردن پیچ ندارد.

گشتاور: گشتاور نیروی $\vec{F}$ که در موقعیت $\vec{r}$ نسبت به محور دوران جسم وارد می شود برابر است با

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

جهت گشتاور با استفاده از قاعده دست راست تعیین می شود. اندازه گشتاور برابر است با

$$\tau = r F \sin \phi$$



گشتاور عاملی است که باعث دوران جسم می شود، همان گونه که نیرو باعث حرکت مرکز جرم جسم می شود.

گشتاور همیشه "نسبت به یک محور مشخص" سنجیده می شود.

پرسش: واحد گشتاور چیست؟ بعد گشتاور چیست؟

شکل ها از ویرایش هشتم فیزیک هالیدی.

با فیزیک دوران و تاثیر گشتاور بارها در زندگی روزمره مواجه شده ایم.



پرش: چرا دستگیره در را همیشه با بیشترین فاصله ممکن از محور در تعبیه می کنند؟

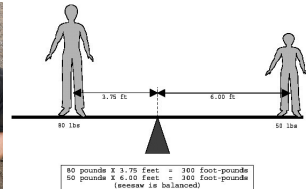
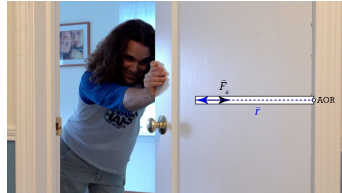
پرش: چرا با وارد کردن نیرو در جهت محور، در باز نمی شود؟

پرش: چرا باز کردن در برخی بطری ها مشکل است؟ چکار می توان کرد؟

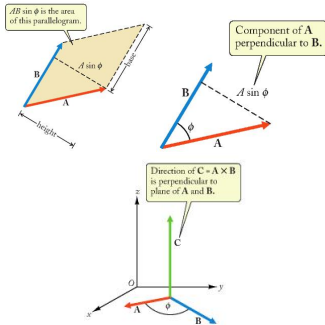
پرش: چرا آچارهای بزرگتر همیشه پیچ را بهتر باز می کنند؟

فیزیک الکلنگ.

شکل ها از نت.



یادآوری هندسه بردارها؛ ضرب خارجی (برداری) دو بردار



ضرب خارجی (برداری) دو بردار: عبارت $\vec{A} \times \vec{B}$ را به صورت $\vec{A}$ کراس $\vec{B}$ بخوانید. حاصل ضرب $\vec{A} \times \vec{B}$ یک بردار است. پس ضرب خارجی کمیتی جهت دار است.

اندازه حاصل ضرب خارجی دو بردار $\vec{A} \times \vec{B}$ برابر است با

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \phi$$

که همان مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده توسط دو بردار است (چرا؟).

راستای بردار $\vec{A} \times \vec{B}$ بر هر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ عمود است. همچنین، جهت $\vec{A} \times \vec{B}$ با استفاده از قاعده دست راست پیدا می شود؛ به این صورت که چهار انگشت دست راست را در جهت بردار اول قرار داده و آنها را به سمت بردار دوم می پیچانیم. آنگاه انگشت شست جهت بردار حاصل ضرب را نشان می دهد. با توجه به این نکته درمی یابیم که ضرب خارجی دو بردار خاصیت پادجابیه جایی دارد:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

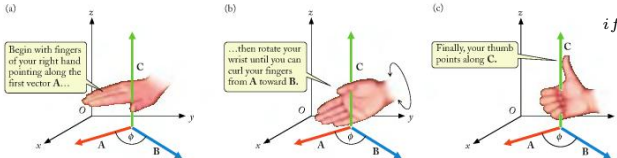
برای دو بردار هم راست داریم:

$$\text{if } \phi = 0 \Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$$

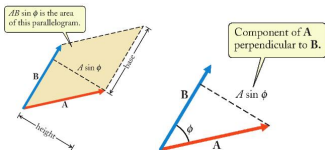
نمونه ضرب خارجی:
گشتاور

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

شکل ها از او هانیان.



یادآوری جبر بردارها؛ ضرب خارجی دو بردار



نتیجه ضرب خارجی دو بردار به صورت مولفه ای:

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} \\ &+ (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} \\ &+ (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}\end{aligned}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

ضرب خارجی خاصیت پادجابیه جایی دارد:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

برای پیدا کردن نتیجه جبری ضرب خارجی دو بردار، یعنی $\vec{A} \times \vec{B}$ ، باید در ابتدا نتیجه ضرب خارجی بردارهای پایه را بیابیم. برای اینکار، با توجه به تعامد بردارهای پایه متفاوت داریم:

$$\phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} = -\hat{j} \times \hat{i}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} = -\hat{k} \times \hat{j}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} = -\hat{i} \times \hat{k}$$

و همچنین با توجه به اینکه هر بردار با خودش همجهت است داریم:

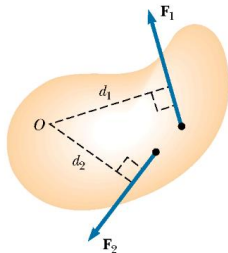
$$\phi = 0 \Rightarrow \hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$$

بنابراین حاصلضرب خارجی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر است با

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= A_x B_x \cancel{\hat{i} \times \hat{i}} + A_x B_y \hat{i} \times \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \times \hat{k} \\ &+ A_y B_x \hat{j} \times \hat{i} + A_y B_y \cancel{\hat{j} \times \hat{j}} + A_y B_z \hat{j} \times \hat{k} \\ &+ A_z B_x \hat{k} \times \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \times \hat{j} + A_z B_z \cancel{\hat{k} \times \hat{k}}\end{aligned}$$

شکل ها از اوهانیان.

چطور گشتاور را محاسبه کنیم؟ جهت گشتاور را چطور تعیین کنیم؟



دقت کنید که

$$r_1 \sin \phi_1 = d_1$$

$$r_2 \sin \phi_2 = d_2$$

چرا؟

در شکل مقابل گشتاور هر یک از نیروها و جهت آنها و همچنین گشتاور کل را بیابید. پاسخ: در شکل مقابل، نیروی $\vec{F}_1$ می خواهد جسم را به صورت پادساعتگرد بچرخاند (حول نقطه O) در حالی که نیروی $\vec{F}_2$ می خواهد جسم را به صورت ساعتگرد بچرخاند. دوران پادساعتگرد را مثبت و دوران ساعتگرد را منفی فرض می کنیم (شکل پایین را ببینید). در این صورت گشتاور این دو نیرو به ترتیب عبارتند از

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \Rightarrow \tau_1 = d_1 F_1$$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \Rightarrow \tau_2 = -d_2 F_2$$

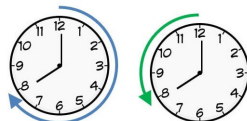
در نتیجه گشتاور کل برابر است با

$$\tau = \sum \tau_i = d_1 F_1 - d_2 F_2$$

شکل بالا از ویرایش هشتم فیزیک هالیدی. شکل پایین از teachoo.

teachoo.com

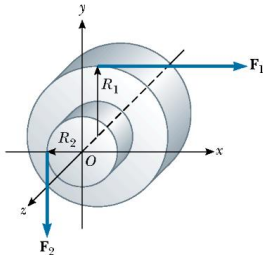
Clockwise and Anti-Clockwise



Clockwise

Anti-Clockwise

چطور گشتاور را محاسبه کنیم؟ جهت گشتاور را چطور تعیین کنیم؟



در شکل مقابل گشتاور هر یک از نیروها و جهت آنها و همچنین گشتاور کل را بیابید. پاسخ: در شکل مقابل، نیروی $\vec{F}_1$ می خواهد جسم را به صورت پادساعتگرد بچرخاند (حول نقطه O) در حالی که نیروی $\vec{F}_2$ می خواهد جسم را به صورت ساعتگرد بچرخاند. دوران پادساعتگرد را مثبت و دوران ساعتگرد را منفی فرض می کنیم (شکل پایین را ببینید). در این صورت گشتاور این دو نیرو به ترتیب عبارتند از

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \Rightarrow \tau_1 = -R_1 F_1$$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \Rightarrow \tau_2 = R_2 F_2$$

به عبارت دیگر بردار $\vec{\tau}_1$ در جهت $-z$ و بردار $\vec{\tau}_2$ در جهت z می باشد. در نتیجه گشتاور کل برابر است با

$$\tau = \sum \tau_i = -R_1 F_1 + R_2 F_2$$

شکل بالا از ویرایش هشتم فیزیک هالیدی. شکل پایین از teachoo.

teachoo.com

Clockwise and Anti-Clockwise

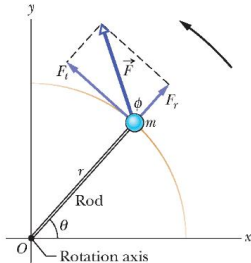


Clockwise



Anti-Clockwise

رابطه بین گشتاور و شتاب زاویه ای - مورد یک ذره



می خواهیم رابطه بین گشتاور وارد شده به یک جسم صلب و شتاب زاویه ای آن را به دست آوریم. برای به دست آوردن این رابطه، در ابتدا فقط دوران یک جرم نقطه ای را بررسی می کنیم (شکل بالا) و سپس بررسی خود را به یک جسم صلب کلی (شکل پایین) تعمیم خواهیم داد.

فرض کنید که نیروی $\vec{F}$ به جسم نقطه ای m وارد شده و این جسم را وادار به دوران حول یک دایره می کند. در شکل مقابل، داریم:

$$F_t = ma_t$$

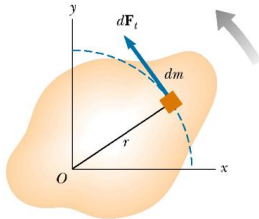
یعنی نیرو در جهت مماسی برابر است با جرم ضربدر شتاب در جهت مماسی. از طرفی گشتاور وارده از طرف این نیرو برابر است با

$$\tau = F_t r = ma_t r = m(\alpha r)r = (mr^2)\alpha = I\alpha$$

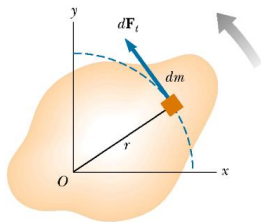
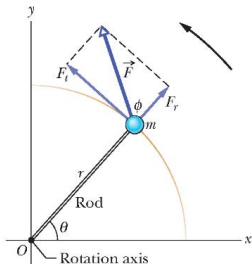
اگر نیروهای بیشتری نیز به این ذره وارد شوند، داریم:

$$\vec{\tau}_{tot} = \sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش های هشتم و دهم.



رابطه بین گشتاور و شتاب زاویه ای- مورد جسم صلب



برای پیدا کردن رابطه بین گشتاور و شتاب زاویه ای در یک جسم صلب کلی، جسم صلب مورد نظر را به تعداد زیادی جرم دیفرانسیلی dm تجزیه می کنیم.

برای جرم دیفرانسیلی dm در شکل داریم:

$$dF_t = dm a_t$$

یعنی نیروی دیفرانسیلی در جهت مماسی برابر است با جرم دیفرانسیلی ضربدر شتاب در جهت مماسی. از طرفی گشتاور وارده از طرف این نیرو برابر است با

$$d\tau = r dF_t = dm a_t r = dm (\alpha r) r = (r^2 dm) \alpha = dI \alpha$$

اگر جسم فقط در صفحه xy دوران کند، آنگاه گشتاورهای دیفرانسیلی به راحتی با هم جمع می شوند:

$$\vec{\tau}_{tot} = \int d\vec{\tau} = \vec{\alpha} \int r^2 dm = I \vec{\alpha}$$

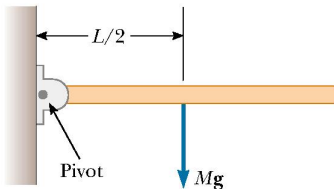
پرسش: چرا شتاب زاویه ای می تواند از انتگرال خارج شود؟

شکل دورانی قانون دوم نیوتن:

$$\sum \vec{\tau} = I \vec{\alpha}$$

شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش های هشتم و دهم.

شکل دورانی قانون دوم نیوتن- مثال اول



شکل از ویرایش هشتم مبانی هالیدی

یک میله همگن به طول L و جرم M از یک انتهایش به یک محور بدون اصطکاک وصل شده و می تواند به صورت آزادانه در این صفحه دوران کند. شکل مقابل را ببینید. میله ها می شود. الف: شتاب زاویه ای اولیه و ب: شتاب خطی در انتهای میله چقدر است؟

پاسخ: گشتاور نیروی وارد شده از طرف محور به میله صفر است. چرا؟ این نیرو سهمی در چرخاندن میله (گشتاور کل) ندارد.

نیروی دیگر وارد شده به میله نیروی گرانش نیوتن است. گشتاور این نیرو برابر است با

$$\tau = -Mg \frac{L}{2}$$

که ساعتگرد است. بنابراین بنابه شکل دورانی قانون دوم نیوتن، داریم:

$$\tau = I\alpha \quad \Rightarrow \quad -Mg \frac{L}{2} = I\alpha$$

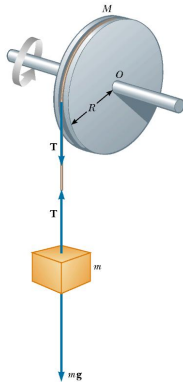
و یا با توجه به لختی دورانی میله حول یک انتهایش که در جلسه قبل به دست آمد ($I = ML^2/3$)، داریم:

$$-Mg \frac{L}{2} = \frac{ML^2}{3} \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{3g}{2L}$$

منفی بودن شتاب زاویه ای نشان دهنده جهت ساعتگرد حرکت است. شتاب خطی در انتهای میله نیز برابر است با

$$a_t = L\alpha = -\frac{3}{2}g$$

شکل دورانی قانون دوم نیوتن- مثال دوم



شکل از ویرایش هشتم مبانی
هالیدی

چرخ با شعاع R جرم M و لختی دورانی I بر روی یک محور بدون اصطکاک افقی مطابق شکل مقابل سوار شده است. طناب سبکی به دور چرخ پیچیده شده و از طرف دیگر به جسمی به جرم m متصل است. شتاب زاویه ای دوران چرخ، شتاب خطی حرکت جسم و کشش طناب را بیابید.

پاسخ: گشتاور نیروی وارد شده از طرف محور به چرخ، و همچنین گشتاور نیروی وزن چرخ، صفرند. چرا؟ این نیروها سهمی در چرخاندن چرخ (گشتاور کل) ندارند.

فقط نیروی کشش نخ T باعث دوران چرخ می شود. بنابراین، از شکل دورانی قانون دوم نیوتن داریم:

$$\sum \tau = TR = I\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{TR}{I}$$

از طرفی، جرم m فقط حرکت خطی دارد:

$$\sum F = mg - T = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{mg - T}{m}$$

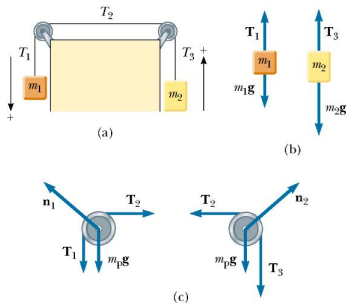
از طرف دیگر، رابطه بین شتاب زاویه ای و شتاب خطی به صورت $a = R\alpha$ می باشد؛ بنابراین

$$a = R\alpha = \frac{TR}{I} = \frac{mg - T}{m}$$

از حل دو معادله آخر برای کشش نخ، شتاب خطی و زاویه ای داریم:

$$T = \frac{mg}{1 + \frac{mR^2}{I}}, \quad a = \frac{g}{1 + \frac{I}{mR^2}}, \quad \alpha = \frac{g}{R + \frac{I}{mR}}$$

شکل دورانی قانون دوم نیوتن- مثال سوم



دو آجر با جرم های m_1 و m_2 به همدیگر از طریق یک طناب سبک و دو قرقره همسان بدون اصطکاک با لختی دورانی I متصل شده و حرکت می کنند. شتاب هر آجر و کشش نخ های T_1 ، T_2 و T_3 را بیابید.

پاسخ: گشتاور نیروهای گرانش وارد شده به قرقره ها و همچنین نیروهای عمودی سطح صفرند. چرا؟ این نیروها سهمی در چرخاندن چرخ (گشتاور کل) ندارند.

چرا نیروهای کشش نخ در طول طناب یکسان نیستند (با وجودی که طناب بدون جرم است)؟ زیرا قرقره ها در حال دوران هستند و بنابراین باید گشتاور کلی (مانند $R [T_1 - T_2]$) به آن ها وارد شود. نابرابر بودن کشش نخ در طول طناب نتیجه ای از وجود قرقره ها (یعنی جرم و دوران غیر صفر آنها) است.

قانون دوم نیوتن برای دو جسم m_1 و m_2 که حرکت خطی دارند:

$$m_1g - T_1 = m_1a \quad T_3 - m_2g = m_2a$$

همچنین، بنا به شکل دورانی قانون دوم نیوتن، برای قرقره های موجود داریم:

$$(T_1 - T_2)R = I\alpha \quad (T_3 - T_2)R = I\alpha$$

حال چهار معادله و پنج مجهول داریم؛ هرچند یک رابطه بین شتاب خطی و زاویه ای نیز وجود دارد:

$$a = R\alpha$$

اکنون می توان دستگاه مورد نظر را حل کرد.

شکل از ویرایش هشتم مبانی هالیدی

شکل دورانی قانون دوم نیوتن- مثال سوم

از معادلات حرکت خطی داریم:

$$T_1 - T_2 = (m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a$$

همچنین از معادلات حرکت دورانی داریم:

$$(T_1 - T_2)R = 2I\alpha$$

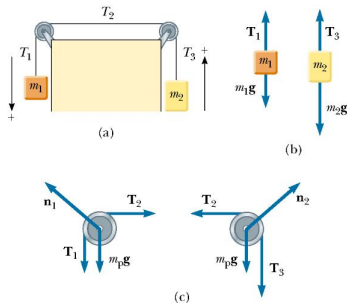
با ترکیب این دو معادله

$$[(m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a] R = 2I\alpha = 2I \frac{a}{R}$$

می توان شتاب را یافت:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{2I}{R^2}} g$$

پرسش: این رابطه را با نتیجه بسیار ساده به دست آمده در فصل پنجم (برای قرقره های بدون جرم) مقایسه کنید.



شکل از ویرایش هشتم مبانی هالیدی

کار، توان و قضیه کار-انرژی جنبشی در حرکت دورانی

آیا می توان حرکت دورانی را صرفا به کمک کمیت های اسکالر بررسی کرد؟ پاسخ: بله.

به کار دیفرانسیلی انجام شده در حرکت دورانی مقابل دقت کنید:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (F \sin \phi) r d\theta = \tau d\theta$$

توان در این حرکت برابر است با

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau \omega$$

قضیه کار-انرژی جنبشی: تغییر در انرژی دورانی یک جسم برابر است با کار انجام شده بر روی آن جسم:

$$W = \Delta K = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2$$

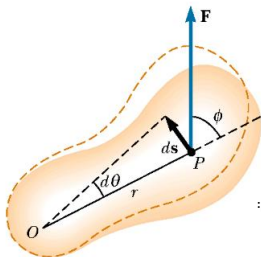
اثبات: قانون دوم نیوتن در حالت دورانی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum \tau = I \alpha = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = I \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

بنابراین کار انجام شده برابر است با

$$\int dW = \int \sum \tau d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I \omega \frac{d\omega}{d\theta} d\theta = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I \omega d\omega = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2$$

پایان اثبات.



تناظر روابط خطی و دورانی

Pure Translation (Fixed Direction)		Pure Rotation (Fixed Axis)	
Position	x	Angular position	θ
Velocity	$v = dx/dt$	Angular velocity	$\omega = d\theta/dt$
Acceleration	$a = dv/dt$	Angular acceleration	$\alpha = d\omega/dt$
Mass	m	Rotational inertia	I
Newton's second law	$F_{\text{net}} = ma$	Newton's second law	$\tau_{\text{net}} = I\alpha$
Work	$W = \int F dx$	Work	$W = \int \tau d\theta$
Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Power (constant force)	$P = Fv$	Power (constant torque)	$P = \tau\omega$
Work-kinetic energy theorem	$W = \Delta K$	Work-kinetic energy theorem	$W = \Delta K$

لختی دورانی چه نوع کمیتی است؟ (مطالعه آزاد)

این اسلاید را نادیده بگیرید!!!

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

در رابطه

لختی دورانی چه نوع کمیتی است؟ اسکالر و یا برداری؟

پاسخ: هیچکدام!! لختی دورانی کمیتی تانسوری (دو جهتی) است. در واقع شکل ماتریسی رابطه

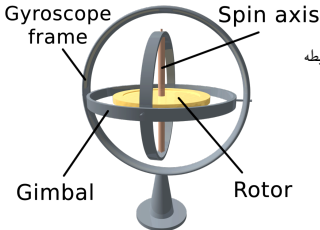
$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

به صورت زیر می باشد:

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

بررسی دقیق مسائل شامل دوران های کلی بسیار پیچیده تر از بحث حاضر است. ما در اینجا فقط موارد بسیار ساده ای را در نظر می گیریم که در آنها "دوران حول یک محور ثابت" انجام می شود. اگر محور دوران تغییر کند، حرکت ها پیچیده تر خواهند بود و خاصیت تانسوری لختی دورانی خود را نشان خواهد داد.

فیلم های حرکت ژيروسکوپ را ببینید.



نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید نکات اساسی گشتاور و شکل دورانی قانون دوم نیوتن را بیان کنید. برای اینکار لازم است بتوانید به سوال های زیر پاسخ دهید:

۱ گشتاور چیست؟

۲ گشتاور به چه عواملی بستگی دارد؟ جهت بردار گشتاور چگونه تعیین می شود؟

۳ شکل دورانی قانون دوم نیوتن را بیان کنید.

۴ تعریف کار در حرکت دورانی چیست؟

۵ تعریف توان در حرکت دورانی چیست؟

۶ شکل دورانی قضیه کار-انرژی دورانی را بیان کنید.

۷ لختی دورانی چه نوع کمیتی است؟

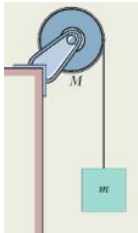
۸ ژيروسکوپ چیست؟

اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.

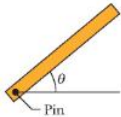


تمرین



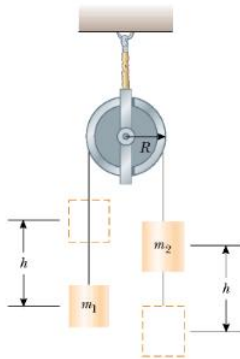
در شکل مقابل جرم قرقره $M = ۱/۵ \text{ kg}$ ، شعاع آن $R = ۱/۸ \text{ m}$ و جرم بلوکه $m = ۱/۶ \text{ kg}$ می باشد. در حین باز شدن نخ، اصطکاک مجموعه ناچیز است. با نوشتن قانون دوم نیوتن، کشش نخ T ، شتاب سقوط بلوکه a و شتاب زاویه ای دوران قرقره α را بیابید.

تمرین



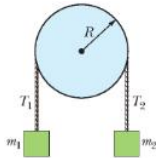
جسمی به شکل میله به جرم $M = 2 \text{ kg}$ و طول $L = 3 \text{ m}$ ، به صورت شکل زیر با زاویه $\theta = 60^\circ$ نسبت به زمین قرار دارد. الف) انرژی پتانسیل گرانشی جسم در این حالت چقدر است؟ راهنمایی: انرژی پتانسیل به مرکز جرم جسم بستگی دارد. ب) جسم را رها می کنیم. سرعت دورانی جسم در هنگام برخورد با زمین، یعنی ω ، را با استفاده از قضیه کار-انرژی جنبشی بدست آورید.

تمرین



در شکل مقابل لختی دورانی قرقره برابر I می باشد. دو قطعه به جرم های m_1 و m_2 به این قرقره متصل هستند. سیستم را رها میکنیم. از آنجا که $m_1 > m_2$ ، جسم m_1 به سمت پایین حرکت می کند و دو جسم پس از طی مسافت h به سرعت v_f می رسند. با استفاده از قضیه کار-انرژی جنبشی (و یا پایستگی انرژی مکانیکی) اندازه سرعت v_f را بیابید. راهنمایی: لختی دورانی دیسک برابر است با $\frac{1}{2}MR^2$.

تمرین

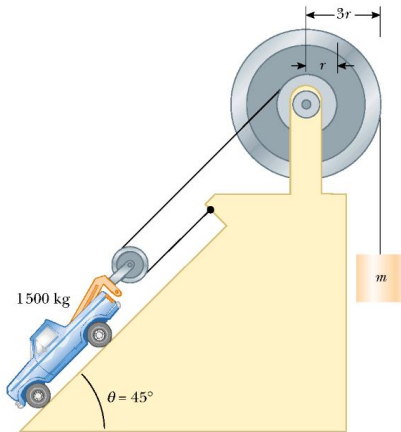


در شکل مقابل جرم قرقره $M = 4 \text{ kg}$ ، شعاع آن $R = 0.1 \text{ m}$ و جرم بلوکه ها $m_1 = 3 \text{ kg}$ و $m_2 = 2 \text{ kg}$ می باشد. جرم m_1 در حال حرکت به سمت پایین است و اصطکاک مجموعه ناچیز می باشد.

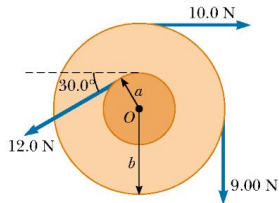
الف) معادلات حرکت خطی بلوکه ها و حرکت دورانی قرقره را بنویسید. راهنمایی: لختی دورانی قرقره $I = \frac{1}{2}MR^2$.
ب) با حذف T_1 و T_2 از معادلات قسمت (الف) شتاب حرکت سیستم a را بیابید. راهنمایی: $a = R\alpha$.

تمرین

- جرم m برای به تعادل درآوردن یک ماشین 1500 kg بر روی سطح شیبدار داده شده را بیابید. فرض کنید که قرقره ها بدون جرم و بدون اصطکاک هستند.
- شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.



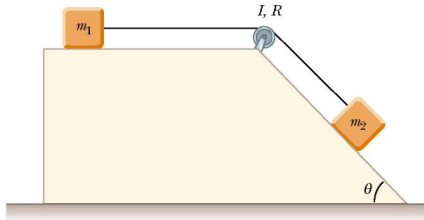
تمرین



گشتاور کل وارد شده حول محور O به چرخ در شکل مقابل را با فرض $a = 10^\circ \text{ cm}$ و $b = 25^\circ \text{ cm}$ بیابید.

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

تمرین

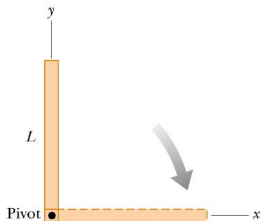


- در شکل مقابل جرم قرقه قابل صرفنظر کردن نیست؛ هرچند از اصطکاک قرقه و نخ صرفنظر می‌کنیم. اگر نخ بدون جرم فرض شود، جسم m_2 به سمت پایین حرکت کند و ضریب اصطکاک جنبشی بین جرم‌ها و سطح برابر μ_k باشد، شتاب مجموعه و کشش نخ (در سطح بالایی و همچنین سطح شیب‌دار) را بیابید.
- شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

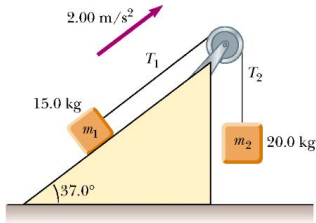
تمرین

میله ای همگن به طول L و جرم M مطابق شکل مقابل لولا شده است (لولا بدون اصطکاک است). میله را از حالت عمودی رها می کنیم. در لحظه ای که میله افقی شده است، سرعت و شتاب زاویه ای آن را بیابید. سرعت و شتاب خطی میله در مرکز جرم آن چقدر است؟

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.



تمرین



دو بلوک مانند شکل مقابل توسط ریسمان بدون جرمی و از طریق یک قرقره به شعاع $m/25^\circ$ و لختی دورانی I به هم متصل شده اند. بلوک بر روی سطح شیب دار (که اصطکاک ندارد) به سمت بالا حرکت می کند. شتاب مجموعه برابر 2.00 m/s^2 می باشد. کشش های نخ T_1 و T_2 را بیابید. لختی دورانی قرقره، یعنی I ، را بیابید.

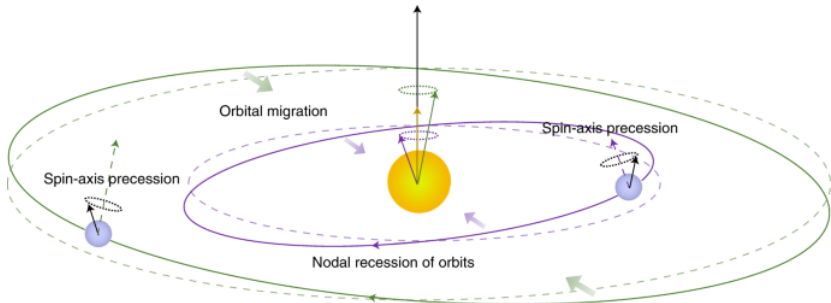
راهنمایی: قانون دوم نیوتن را برای دو بلوک و قرقره بنویسید. نمودار جسم آزاد فراموش نشود.

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

مبحث بعدی: جابجایی محور دوران جسم

تاکنون حرکت دورانی اجسام، وقتی که حول یک محور ثابت می چرخند، را بررسی کرده ایم. در دو جلسه آینده این موضوع را در نظر خواهیم گرفت که اگر محور دوران جسم جابجا شود، چطور می توان فیزیک مساله را بررسی کرد.

شکل از نیچر: <https://doi.org/10.1038/s41550-019-0701-7>



مراجع

- ❶ Halliday, David, Robert Resnick, and Jearl Walker; Fundamentals of physics, 10th edn. John Wiley & Sons, 2014.
- ❷ Halliday, D., R. Resnick, and K. S. Krane. "Physics, 5th edn." (2002).
- ❸ Ohanian, Hans C., and John T. Markert. Physics for engineers and scientists, 3th edn. 2007.
- ❹ Young, Hugh D., Roger A. Freedman, and Albert Lewis Ford. Sears and Zeman-sky's university physics, 13th edn. Pearson education, 2006.

کلاس های درس فیزیک یک دانشگاه صنعتی شریف (مثلا
کلاس درس دکتر محمد رضا اجتهادی و یا دکتر محمود بهمن
آبادی) را می توانید از مرکز آموزش های الکترونیک دانشگاه
صنعتی شریف (و یا حتی از سایت مکتب خونه) دریافت کنید.
<http://ocw.sharif.edu/>

کلاس درس دکتر والتر لوین از دانشگاه MIT در مرکز آموزش های الکترونیک این دانشگاه و یوتیوب:
<https://ocw.mit.edu/index.htm>
<https://www.youtube.com/watch?v=X9c0MRooBzQ>

Lec 01: Units, Dimensions, and Scaling Arguments | 8.01 Classical Mechanics (Walter Lewin)

387,915 views • Dec 9, 2014

[illegible]

با سپاس از توجه شما