

سینماتیک و دینامیک نسبیتی

اثر داپلر نسبیتی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

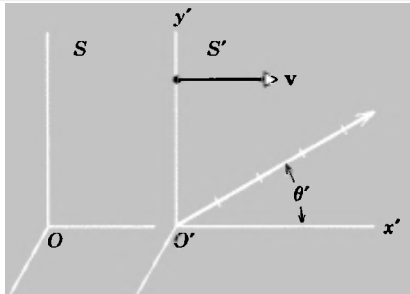
- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ اثر داپلر نسبیتی
- اثر داپلر کلاسیک
- اثر داپلر نسبیتی

آنچه تاکنون آموخته ایم: ابیراهی نور ستارگان

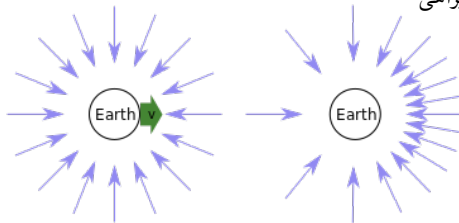


- در جلسه پیش دیدیم که با بررسی انتشار موج در دو دستگاه S و S' می توان روابط زیر را بین پارامترهای متفاوت موج در دو دستگاه یافت:

$$\frac{\cos \theta}{\lambda} = \frac{\cos \theta' + \beta}{\lambda' \sqrt{1 - \beta^2}} \quad \frac{\sin \theta}{\lambda} = \frac{\sin \theta'}{\lambda'}$$

$$\nu = \nu' \frac{\beta \cos \theta' + 1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \lambda \nu = \lambda' \nu'$$

- پس از آن دو رابطه زیر را برای پدیده ابیراهی نسبیتی نور یافتیم:



CMB Rest Frame

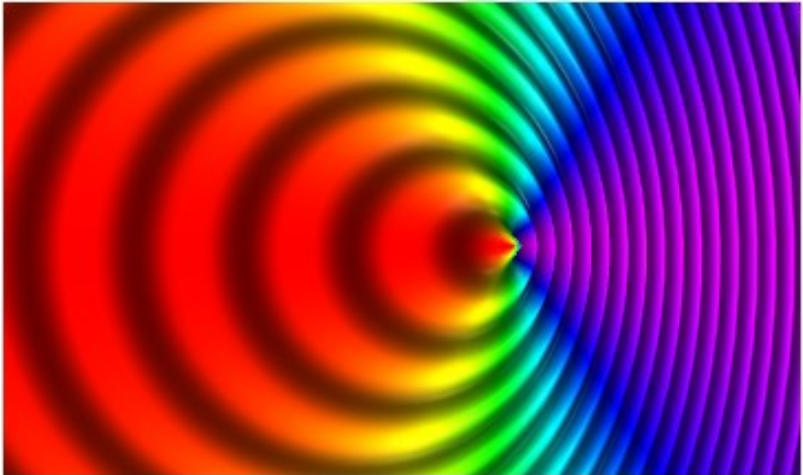
Earth's Rest Frame

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta' \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos \theta' + \beta}$$

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos \theta - \beta}$$

اهداف این جلسه: اثر داپلر نسبیتی

- در این جلسه می خواهیم پدیده داپلر را برای انتشار امواج نوری بررسی کنیم. البته در ابتدا این پدیده را از لحاظ کلاسیکی (انتشار موج صوتی در محیط) یاد آوری خواهیم کرد.

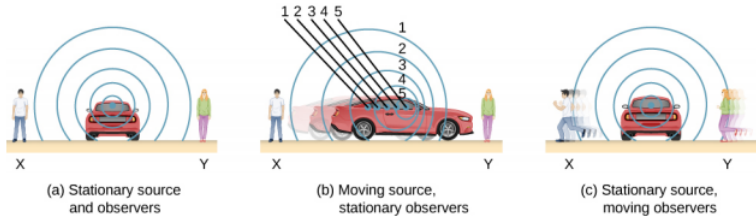


اثر داپلر غیر نسبیتی

- اثر داپلر (Doppler effect) در فیزیک امواج تغییر در بسامد یک موج بر اثر حرکت فرستنده یا گیرنده را توصیف می کند. در واقع اگر بسامد مشاهده شده را با f' نشان دهیم آنگاه

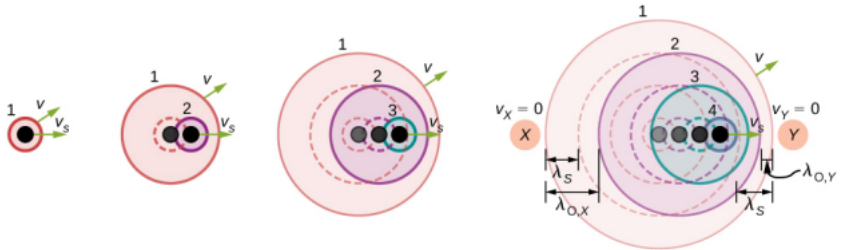
$$f' = f \frac{v \pm v_o}{v \mp v_s}$$

که در آن f بسامد چشمه، v سرعت صوت در محیط، v_o سرعت مشاهده گر (observer) نسبت به محیط و v_s سرعت چشمه (source) نسبت به محیط است. دقت کنید که اگر مشاهده گر به سمت منبع حرکت کند از $+v_o$ و اگر از منبع دور شود از $-v_o$ استفاده می کنیم. همچنین اگر منبع به سمت مشاهده گر حرکت کند از $-v_s$ و اگر از مشاهده گر دور شود از $+v_s$ استفاده می کنیم.



اثبات رابطه داپلر

در نظر بگیرید یک ناظر ساکن X با یک منبع که با سرعت ثابت $v_s < v$ از ناظر دور می‌شود. در زمان $t = 0$ ، منبع (دایره مشکی) یک موج صوتی ارسال می‌کند و این موج با سرعت صوت v حرکت می‌کند. موقعیت موج صوتی در هر بازه زمانی به اندازه دوره T_s ، به صورت خطوط نقطه‌چین نشان داده شده است. پس از یک دوره، منبع به اندازه $\Delta x = v_s T_s$ حرکت کرده و موج صوتی دوم را منتشر می‌کند که با سرعت صوت حرکت می‌کند. منبع به حرکت خود ادامه می‌دهد و امواج صوتی تولید می‌کند، که با دایره‌های شماره‌گذاری شده ۳ و ۴ نشان داده شده‌اند. توجه کنید که با حرکت امواج به بیرون، آن‌ها در مرکز نقطه اولیه انتشار خود باقی می‌مانند.

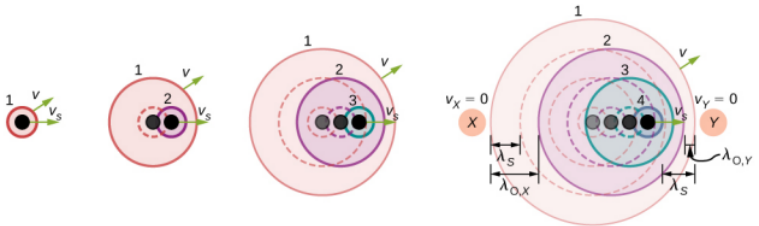


اثبات رابطه داپلر

- با استفاده از این واقعیت که طول موج برابر با حاصل ضرب سرعت در دوره است، و دوره معکوس فرکانس می باشد، می توان فرکانس مشاهده شده را به دست آورد:

$$\lambda_o = \lambda_s + \Delta x \Rightarrow vT_o = vT_s + v_s T_s \quad (1)$$

$$\frac{v}{f_o} = \frac{v}{f_s} + \frac{v_s}{f_s} = \frac{v + v_s}{f_s} \Rightarrow f_o = f_s \left(\frac{v}{v + v_s} \right)$$



- تمرین: درستی رابطه $f' = f \frac{v \pm v_o}{v \mp v_s}$ در سه وضعیت دیگر را نشان دهید.

اثر داپلر نسبیتی

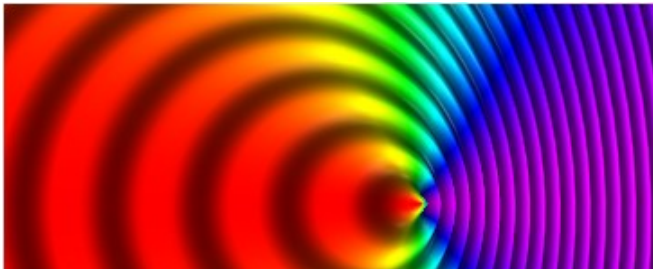
- فرکانس را در بحث داپلر نسبیتی با ν نشان خواهیم داد.
- با استفاده از سومین معادله ای که در درس قبل به دست آوردیم، یعنی معادله

$$\nu = \nu' \frac{1 + \beta \cos \theta'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

عملاً فرمول تغییر در فرکانس نسبیتی (اثر داپلر نسبیتی) را خواهیم داشت. معکوس رابطه بالا به شکل زیر است:

$$\nu' = \nu \frac{1 - \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

این کلی ترین رابطه اثر داپلر در نسبیت خاص است، هرچند ویرایش های دیگر از این هم وجود دارند که مربوط به وضعیت های ساده ترند.



حد کلاسیک اثر داپلر نسبیتی

می توان به راحتی نشان داد که در حد کلاسیک ($v \ll c$) رابطه بالا به رابطه داپلر کلاسیک تبدیل می شود. برای اینکار از رابطه دوم شروع می کنیم و v را بر حسب v' به دست می آوریم:

$$v = \frac{v' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta}$$

حال باید رابطه بالا را بر حسب β بسط داده و از جملات مرتبه دوم به بالای β صرف نظر کنیم. با استفاده از قضیه بسط دوجمله ای داریم:

$$v = \frac{v' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta} \cong v' (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} (1 - \beta \cos \theta)^{-1} \cong v' (1 - \frac{1}{2} \beta^2 + \dots) (1 + \beta \cos \theta)$$

$$v \cong v' (1 + \beta \cos \theta)$$

و یا

که همان فرمول کلاسیک داپلر است. برای اثبات این ادعا چند حالت خاص را در نظر بگیرید. مثلاً وقتی داریم $\theta = 0^\circ$ یعنی ناظر به سمت چشمه (و یا برعکس) حرکت می کند، می توان

$$v = v' (1 + \beta) = v' (1 + v/c)$$

نوشت:

پس بسامد دریافت شده بزرگتر از بسامد ویژه v' است. و یا وقتی داریم $\theta = \pi$ یعنی ناظر از

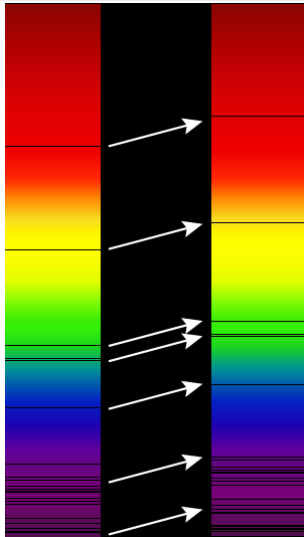
$$v = v' (1 - \beta) = v' (1 - v/c)$$

چشمه دور می شود (و یا برعکس)، می توان نوشت:

پس بسامد دریافت شده کوچکتر از بسامد ویژه v' است. همچنین وقتی داشته باشیم $\theta = \pi/2$ ،

عملاً جابجایی داپلر اتفاق نمی افتد ($v = v'$) چون خطوط حرکت و رویت بر هم عمود هستند.

اثر داپلر نسبیتی در راستای طولی



● حال اثر داپلر نسبیتی را به صورت طولی ($\theta = 0, \pi$) و عرضی ($\theta = \pi/2$) به صورت جداگانه بررسی می کنیم. وقتی ناظر و چشمه به سمت هم حرکت می کنند $\theta = 0$ داریم:

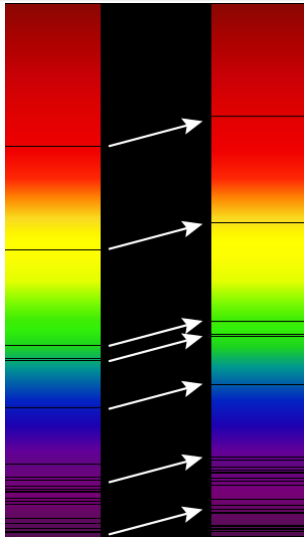
$$\nu = \frac{\nu' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos 0} = \nu' \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \nu' \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}$$

و وقتی ناظر و چشمه از هم دور می شوند $\theta = \pi$ داریم:

$$\nu = \frac{\nu' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \pi} = \nu' \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = \nu' \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}$$

این روابط بدون اغراق پایه فهم تقریباً تمام مشاهدات نوری در نجوم، اختر فیزیک و کیهان شناسی هستند. در واقع در این زمینه ها، معمولاً چشمه و ناظر نسبت به هم در حال حرکت هستند و این باعث جابجایی فرکانس ها و طول موج ها می شود. درک این جابجایی داپلر به ما در فهم مشاهدات کمک خواهد کرد.

اثر داپلر نسبیتی در راستای طولی



اگر منبع و ناظر به هم نزدیک شوند، فرکانس افزایش و طول موج کاهش می یابد. چنین پدیده ای را جابجایی به سمت آبی (blueshift) می نامند که فرمول آن چنین است:

$$\nu = \nu' \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}$$

اما وقتی ناظر و چشمه از هم دور می شوند، فرکانس کاهش و طول موج افزایش می یابد. چنین پدیده ای را جابجایی به سمت قرمز یا قرمزگرایی یا انتقال به سرخ (Redshift) می نامند که فرمول آن چنین است:

$$\nu = \nu' \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}$$

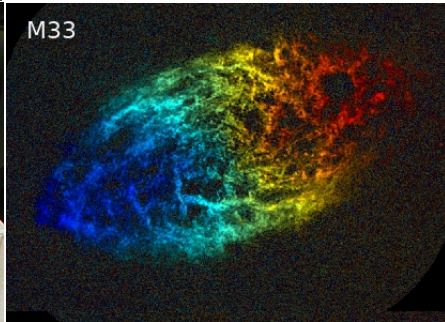
شکل مقابل خطوط جذب در طیف قابل مشاهده یک ابرخوشه از کهکشان های دورافتاده (راست)، در مقایسه با خطوط جذب در طیف قابل مشاهده خورشید (چپ) را نشان می دهد. پیکان ها جابجایی به سمت قرمز را نشان می دهند. طول موج افزایش به سمت قرمز (و فرکانس کاهش می یابد).

یک مثال از اهمیت جابجایی داپلر



• مساله ماده تاریک با اندازه گیری های دقیق سرعت دوران کهکشان ها مشخص شد.

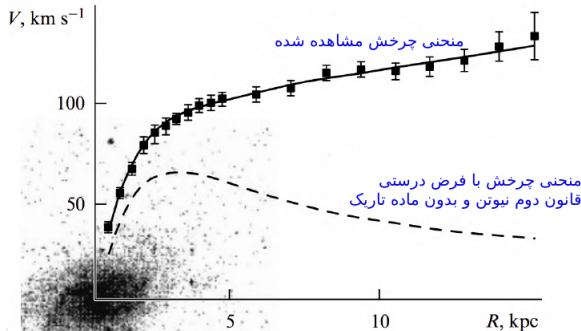
• با پیشرفت تلسکوپ ها و افزایش روزافزون دقت آنها، وِرا روبِن (Vera Rubin) و آلبرت بازما (Albert Bosma) توانستند سرعت حرکت گاز در لبه کهکشان ها را اندازه گیری کنند. برای اندازه گیری سرعت حرکت گاز، منجمین از جابه جایی داپلر در طیف این گاز استفاده می کنند.



یک مثال از اهمیت جابجایی دایر

پیشتر سرعت حرکت ستارگان هم به خوبی اندازه گیری شده بود و منجمین انتظار داشتند که با افزایش فاصله از مرکز کهکشان، سرعت حرکت ذرات (ستارگان و گاز) کاهش یابد (مانند منظومه شمسی). ولی با بررسی نتایج رصدی معلوم شد که سرعت حرکت ذرات (ستارگان و گاز) معمولاً ثابت است و حتی در برخی موارد افزایش می یابد.

تصاویر کهکشان ها نشان می دهد که جرم کهکشان در نواحی خارجی کمتر است. با مقایسه نتایج این مشاهدات با جرم مرئی کهکشان ها معلوم شد که (در اکثر موارد) این جرم برای ایجاد منحنی چرخش کافی نیست؛ بنابراین، معلوم شد که مساله جرم گمشده یک مشکل جدی است.

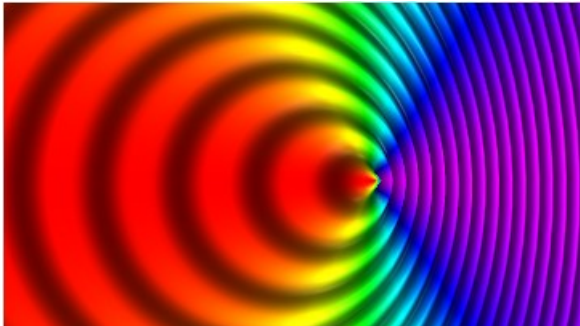


اثر داپلر نسبیتی در راستای عرضی

- نسبیت اینشتین یک اثر داپلر در راستای عرضی را هم پیش بینی می کند که این پدیده در فیزیک کلاسیک وجود ندارد. بنابراین تایید و یا رد این پدیده بسیار مهم است. اگر خط رویت ناظر با امتداد حرکت نسبی زاویه $\theta = \pi/2$ بسازد، آنگاه داریم:

$$\nu = \frac{\nu' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \pi/2} = \nu' \sqrt{1 - \beta^2}$$

این رابطه بیان می کند که اثر داپلر در جهت عرضی از مرتبه دوم β وجود دارد. پس اگر خط رویت ناظر عمود بر امتداد حرکت نسبی باشد، بسامد مشاهده شده کمتر از بسامد ویژه خواهد بود.

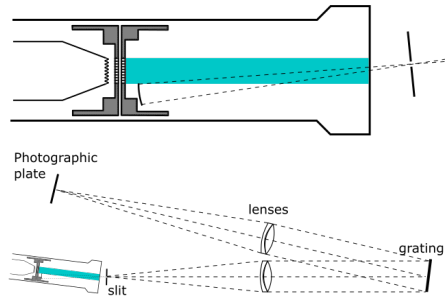
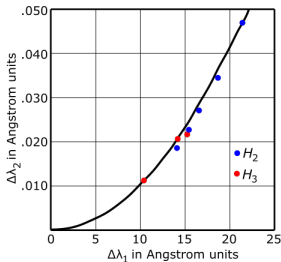


تایید تجربی اثر داپلر نسبیتی

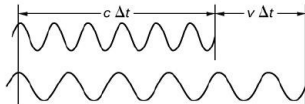
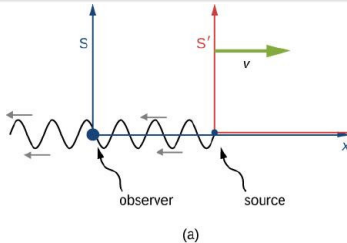
- اثرات داپلر نسبیتی طولی و عرضی در آزمایش های متعدد تاکنون مشاهده شده اند. این علاوه بر مشاهدات اختفیزیکی است. مثلاً می توانید به آزمایشات مختلفی که با کار Ives – (۱۹۴۱, ۱۹۳۸) Stilwell شروع شده اند مراجعه کنید. همچنین می توانید به آزمایشات زیر مراجعه کنید: Otting (۱۹۳۹), Mandelberg et al. (۱۹۶۲),

Hasselkamp et al. (۱۹۷۹), and Botermann et al. (۲۰۱۴)

درباره این آزمایش ها تحقیق کنید.



روشی دیگر برای به دست آوردن رابطه داپلر نسبیتی در راستای طولی



phys.libretexts.org

تمرین: فرض کنید که منبع نوری در مرکز دستگاه S' در حال تابش است. این منبع در حال دور شدن از ناظر S می باشد. حال دو ناظر S و S' می خواهند طول موج نور را اندازه گیری کنند. شکل مقابل را ببینید. در این صورت دو اثر جداگانه رخ می دهند:

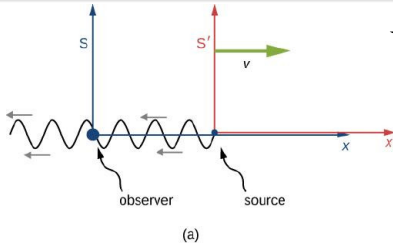
- ۱- ناظر در دستگاه S طول موج نور را با فاکتور $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ متفاوت نسبت به ناظر S' می بیند.
- ۲- از نظر ناظر S طول موج نور کشیده شده است و مقدار این کشیده شدن به اندازه

$$\frac{c \Delta t_{\text{period}} + v \Delta t_{\text{period}}}{c \Delta t_{\text{period}}} = 1 + \frac{v}{c}$$

می باشد.

این دو اثر را ترکیب کرده و تغییر در طول موج نور را به دست آورید.

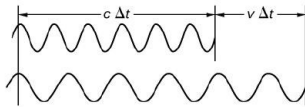
روشی دیگر برای به دست آوردن رابطه داپلر نسبیتی در راستای طولی



پاسخ: افزایش کلی در طول موج حاصلضرب این دو افزایش است:

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{src}} \left(1 + \frac{v}{c}\right) \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \lambda_{\text{src}} \left(1 + \frac{v}{c}\right) \sqrt{\frac{1}{\left(1 + \frac{v}{c}\right) \left(1 - \frac{v}{c}\right)}}$$



phys.libretexts.org

(b)

دقت کنید که اگر چشمه و ناظر به سمت هم حرکت کنند،
آنگاه طول موج کاهش پیدا خواهد کرد:

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{src}} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)}} = \lambda_{\text{src}} \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}$$

چرا؟

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید اثر داپلر نسبیتی و مهم ترین نتایج آن را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

۱. اثر داپلر کلاسیک را توضیح دهید.
۲. نمونه هایی از اثر داپلر کلاسیک را نام ببرید.
۳. اثر داپلر نسبیتی در راستای طول را توضیح دهید.
۴. اثر داپلر نسبیتی در راستای عرضی را توضیح دهید.
۵. درباره کاربرد اثر داپلر در اخترفیزیک تحقیق کنید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراوش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.

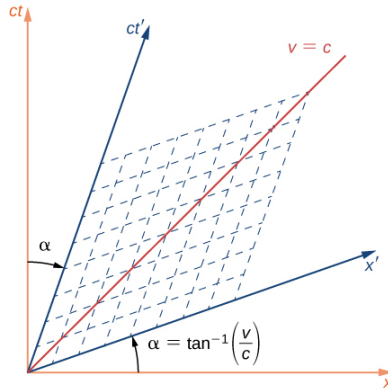


تمرین ها: زمان تحویل ۲ آذر ماه

- راننده با چه سرعتی از چراغ راهنمایی عبور کند تا رنگ قرمز آن را سبزرنگ ببیند؟ فرض کنید طول موج نور سبز 495 nm و طول موج نور قرمز 620 nm می باشد.
- لطفا مساله های ۴۴ تا ۵۰ از فصل دوم کتاب رزنیك را حل کنید.

مبحث بعدی: جبر تبدیلات لورنتس و نمادگذاری چاربردار

- در جلسه بعد می خواهیم جبر تبدیلات لورنتس و نمادگذاری چاربردار را معرفی کنیم. این موارد از لحاظ مفهومی اهمیت بنیادین ندارند؛ ولی ریاضیات و محاسبات موضوعات بعدی را به صورت معناداری ساده تر کرده و ساختار نظریه را واضح تر می کنند. همچنین، تعمیم این ایده ها در مباحث پیشرفته تر اهمیت پیدا می کند.



مراجع

- ➊ Introduction to Special Relativity; Robert Resnick
- ➋ Relativity: Special, General, and Cosmological; Wolfgang Rindler
- ➌ General Relativity: An Introduction for Physicists; M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, A. N. Lasenby
- ➍ Introduction To Special Relativity; Markus Klute
<https://ocw.mit.edu/courses/8-20-introduction-to-special-relativity-january-ia>
- ➎ Leonard Susskind's Special Relativity, Find in YouTube

با سپاس از توجه شما

