

مقدمه روش های ریاضی در علوم فیزیکی

تابع دلتای دیراک

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

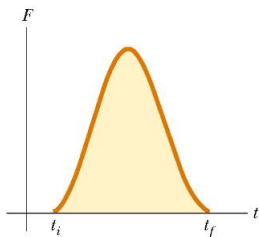
h.shenavar@gmail.com

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

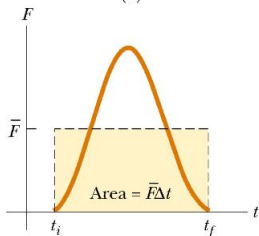
● ۱ تابع دلتای دیراک

- تابع دلتای دیراک
- ویژگی های تابع دلتا
- دلتای کرونکر

تغییرات ناگهانی در مقادیر

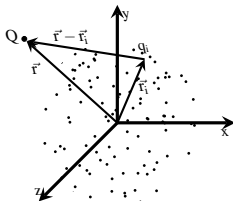


(a)



(b)

در ریاضیات، فیزیک و مهندسی غالباً با مسائلی برخورد می کنیم که شامل تغییرات بسیار شدید هستند. مثلاً در مساله ضربه (فیزیک مکانیک) نیروی ضربه ای در بازه ای بسیار کوچک و با مقدار بسیار بزرگ ظاهر شده و سپس محو می شود. و یا در بررسی توزیع بارهای نقطه ای متوجه می شویم که مقدار بار در یک ناحیه بسیار کوچک فضا بسیار بزرگ و در بقیه نواحی صفر است.



برای توصیف چنین تغییراتی از مفهوم تابع دلتا استفاده می کنیم:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

توصیف بالا برای تعریف تابع دلتا دقیق نیست!

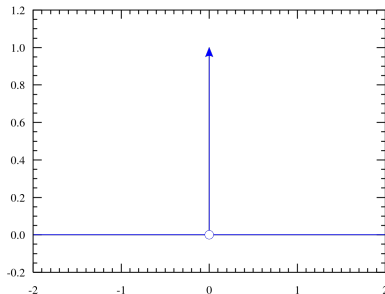
تابع دلتا

- تابع دلتای دیراک $\delta(x)$ به این صورت تعریف می شود که مقدار آن در همه نقاط غیر مبدا برابر صفر و انتگرال آن بر روی بازه اعداد حقیقی برابر یک است:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

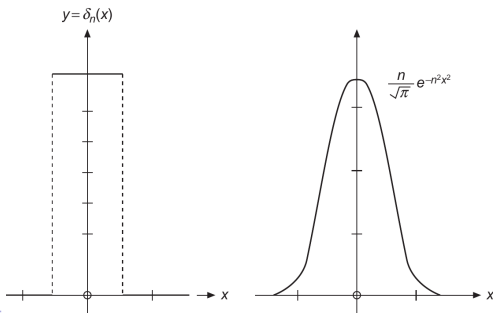
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

- با توجه به این ویژگی ها تابع دلتا باید یک قله بسیار بلند با دامنه بسیار نازک در $x = 0$ باشد.



تابع دلتا

- ولی یک مشکل وجود دارد: هیچ تابعی (با تعریف دقیق تابع) وجود ندارد که این شرایط را فراهم کند!
- دلتای دیراک در واقع یک توزیع (تعمیم یک تابع، distribution) است، ولی ما معمولاً آن را به خاطر سادگی تابع دلتای دیراک می نامیم.
- با این وجود می توان ویژگی های اساسی دلتای دیراک را با استفاده از حد یک دنباله از توابع فراهم کرد. مثلاً دو دنباله زیر، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، ویژگی های دلتای دیراک را فراهم می کنند.

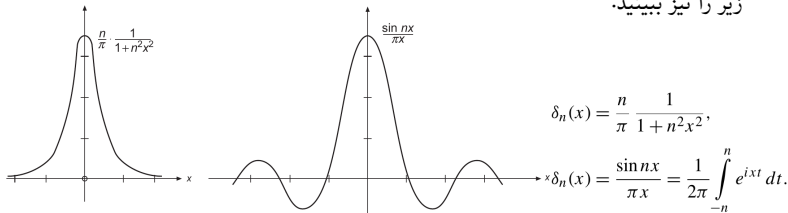


$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{2n} \\ n, & -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n} \\ 0, & x > \frac{1}{2n} \end{cases}$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 x^2),$$

دلتای دیراک

- در واقع تاکنون دنباله های زیادی کشف شده اند که شرایط گفته شده را فراهم می کنند. دو مثال زیر را نیز ببینید.



- استفاده از این توزیع ها به عنوان تابع دلتا کاملاً بستگی به مساله و موقعیت دارد. مثلاً دنباله چندضابطه ای اول برای اثبات ویژگی های تابع دلتا مناسب است. دنباله دوم برای توصیف حضور ذره (و یا تابع موج) و در هنگام مشتق گیری بسیار کاراست (مشتق آن به چندجمله ای های هرمیت منجر می شود). دنباله چهارم نیز به ویژه در آنالیز فوریه و کاربردهای مکانیک کوانتومی کاراست. گاهی اوقات شکل تعمیم یافته این دنباله به شکل زیر نوشته می شود (کرنل دیریشله):

$$\delta_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})x]}{\sin(\frac{1}{2}x)}$$

دلتای دیراک

- توجه کنید که توزیع های یاد شده همگی در $x = 0$ دارای قله هستند (به شرط $n \rightarrow \infty$)، و ضرایب آنها به صورتی انتخاب شده اند که شرط زیر درست باشد:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

- تمرین: نشان دهید که چهار توزیع بالا در شرط $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$ صدق می کنند. راهنمایی: از انتگرال های زیر استفاده کنید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2 x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{n}} \quad \text{and} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin nx}{x} dx = \pi$$

- ویژگی بسیار مهم دلتا: اگر بازه $[a, b]$ شامل مبدا باشد، آنگاه با استفاده از شکل انتگرالی قضیه مقدار میانی می توان نتیجه گرفت که برای هر تابع دلخواه $f(x)$ داریم:

$$\int_a^b f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad 0 \in [a, b]$$

و یا به صورت کلی تر: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a)$

- تمرین: درستی این ویژگی بسیار مهم را با استفاده از دنباله چندضابطه ای دلتا اثبات کنید.

مشکلات مفهومی دلتای دیراک: تابعی که تابع نیست!

● معنی تعریف حدی دلتای دیراک چیست؟ پاسخ: تعاریف داده شده برای دلتای دیراک برای اکثر مسائل فیزیکی کاملاً کافی هستند؛ هرچند، این تعاریف از نظر ریاضیاتی همچنان می توانند مشکل ساز باشند. مثلاً می توان به راحتی دید که $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x)$ برای هر چهار دنباله معرفی شده بالا ناموجود است!

● تمرین: حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x)$ را برای چهار دنباله بالا بررسی کرده و مشکل در تعریف این حد را توضیح دهید.

● مفهوم توزیع در ریاضیات راهی را برای عبور از این مشکل فراهم می کند. در واقع به جای تعریف $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx$ به صورت مستقیم، حد آن وقتی $n \rightarrow \infty$ را در نظر می گیریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \int \delta_n(x) f(x) dx$$

با توجه به تعریف بالا، دلتای دیراک $\delta(x)$ را یک توزیع و نه یک تابع می نامیم که به صورت حدی و با استفاده از یک انتگرال تعریف شده است. با این وجود ما غالباً توزیع دلتای دیراک را تابع دلتای دیراک می نامیم!

● در ادامه ویژگی های دلتای دیراک را بررسی خواهیم کرد.

ویژگی های دلتا

- در ادامه ویژگی های دلتای دیراک را بررسی خواهیم کرد. این ویژگی ها در محاسبات شامل دلتا بسیار اهمیت خواهند داشت.

تابع دلتا زوج است $\delta(-x) = \delta(x)$

- تمرین: برای چهار دنباله ذکر شده در بالا زوج بودن تابع دلتا را نشان دهید.

در حالت کلی می توان نشان داد $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$

اثبات: اگر داشته باشیم $a > 0$ ، آنگاه با استفاده از تغییر متغیر $y = ax$ می توان نوشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(ax) dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(y/a) \delta(y) dy = \frac{1}{a} f(0).$$

تمرین: مورد $a < 0$ را اثبات کنید (مراقب تغییر حدود انتگرال در اثر تغییر متغیر باشید!).

فرمول جابجایی مبدا: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$

- تمرین: این رابطه را با استفاده از تغییر متغیر $y = x - x_0$ اثبات کنید.

یادآوری ریشه ها و نوع آنها

- ریشه ساده و ریشه چندگانه: در هنگام تجزیه یک چندجمله ای ممکن است به ریشه های مضاعف برخورد کنیم؛ یعنی یک ریشه چند بار تکرار می شود. در این حالت می گوییم ریشه چندگانه داریم. مثلا در چند جمله ای

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)^m \cdots$$

- ریشه c_n چندگانگی برابر m دارد. اگر عامل مربوط به ریشه یکبار تکرار شده باشد، آنگاه ریشه را ساده می نامیم. مثلا در تابع

$$f(x) = (x + 3)(x - 2)^5(x + 1)^3$$

- ریشه $x = -3$ ساده است، ریشه $x = 2$ چندگانگی برابر 5 دارد و ریشه $x = -1$ چندگانگی برابر 3 دارد.

- تعمیم تعریف بالا برای هر تابع: اگر تابع تحلیلی $f(z)$ چندگانگی برابر k در نقطه z_0 داشته باشد، آنگاه می توان در همسایگی z_0 تابع تحلیلی $h(z)$ را تعریف کرد به طوری که $h(z_0) \neq 0$

$$f(z) = (z - z_0)^k h(z)$$

- توجه: اگر $k = 1$ آنگاه ریشه مورد نظر را ساده می نامند. برای ریشه های ساده می توان به راحتی نوشت: $f'(z_0) = h(z_0) \neq 0$. چرا؟

ویژگی های دلتا

اگر آرگومان تابع دلتا خود یک تابع با ریشه های ساده باشد، یعنی $\delta(g(x))$ ، به طوری که ریشه ها را a_i می نامیم و همچنین $g'(a_i) \neq 0$ (چون ریشه ها ساده اند)، آنگاه می توان نوشت:

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - a_i)}{|g'(a_i)|}$$

اثبات: برای اثبات این رابطه از ویژگی های تابع دلتا استفاده می کنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(g(x)) f(x) dx = \sum_i \int_{a_i - \epsilon}^{a_i + \epsilon} \delta(g'(a_i)(x - a_i)) f(x) dx$$

در محاسبه بالا باید توجه کنیم که تابع دلتا جز در نزدیکی ریشه های تابع $g(x)$ صفر است؛ بنابراین فقط کافی است که انتگرال را در بازه های $[a_i - \epsilon, a_i + \epsilon]$ محاسبه کنیم. همچنین، در هرکدام از بازه های کوچک یاد شده از جایگزینی $g(x) = (x - a_i)g'(a_i)$ استفاده نموده ایم. سرانجام وقتی از ویژگی های شماره ۲ و ۳ تابع دلتا استفاده می کنیم، داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(g(x)) f(x) dx = \sum_i \int_{a_i - \epsilon}^{a_i + \epsilon} \frac{\delta(x - a_i)}{|g'(a_i)|} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_i \frac{\delta(x - a_i)}{|g'(a_i)|} \right) f(x) dx$$

که همان نتیجه خواسته شده است.

ویژگی های دلتا

۵ مشتق تابع دلتا:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x - x_0) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \delta(x - x_0) dx = -f'(x_0)$$

تمرین: درستی رابطه بالا را با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء نشان دهید.

۶ در سه بعد، و در مختصات دکارتی، تابع دلتا به صورت $\delta(\vec{r}) \equiv \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ تعریف می شود.

بنابراین مثلاً در سه بعد داریم

$$\iiint \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) f(\vec{r}_2) dx_2 dy_2 dz_2 = f(\vec{r}_1)$$

و البته با تغییر متغیرهای انتگرال گیری به مختصات قطبی می توان نوشت:

$$\iiint f(\mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) r_2^2 dr_2 \sin \theta_2 d\theta_2 d\phi_2 = f(\mathbf{r}_1)$$

ویژگی های دلتا

۷ از چهارمین دنباله معرفی شده برای دلتا در بالا می توان در حد به رابطه زیر رسید:

$$\delta(t - x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega(t - x)) d\omega.$$

- لطفا فراموش نکنید که مانند دیگر روابط مربوط به تابع دلتا، رابطه اخیر نیز فقط زیر انتگرال معنی دارد! در واقع از این رابطه در ساده سازی انتگرال های فوریه استفاده خواهیم کرد.
- با برخی ویژگی های دیگر تابع دلتا (مانند بسط تابع دلتا) در آینده آشنا می شویم.

دلتای کرونکر

- مشابه ناپیوسته تابع دلتای دیراک را دلتای کرونکر می نامند. این کمیت را برای اندیس های i و j به صورت زیر تعریف می کنند:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

- یکی از کاربردهای دلتای کرونکر این است که با استفاده از آن می توان جمله ای خاص از یک سری را انتخاب کرد. یکی دیگر از کاربردهای این نمادگذاری این است که بتوانیم دو فرم تابعی متفاوت را برای مقادیر غیر صفر و صفر انتخاب کنیم. دو مثال زیر را ببینید.

$$\sum_{ij} f_{ij} \delta_{ij} = \sum_i f_{ii}, \quad C_n = \frac{1}{1 + \delta_{n0}} \frac{2\pi}{L}$$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید تابع دلتای دیراک و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ چند مثال از تغییراتی را که با دلتای دیراک توصیف می شوند، بیابید.
- ۲ مفهوم هندسی دلتای دیراک را با رسم یک نمودار توضیح دهید.
- ۳ چهار دنباله معرفی شده برای دلتای دیراک را بنویسید.
- ۴ مشکل مفهومی تعریف دنباله ای از دلتای دیراک به عنوان یک تابع را بیان کنید.
- ۵ توزیع دهید که چرا دلتای دیراک در زیر یک انتگرال تعریف می شود و نه مستقل از آن.
- ۶ درباره مفهوم توزیع و تعمیم مفهوم توابع تحقیق کنید.
- ۷ هفت ویژگی اصلی تابع دلتای دیراک را بیان کنید.
- ۸ منظور از دلتای کرونکر چیست؟
- ۹ کاربردهای دلتای کرونکر را توضیح دهید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.



تمرین

- تمرین های موجود در متن درس را پاسخ دهید.
- با توجه به فرمول $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$ واحد تابع دلتا چیست؟ واحد دلتای سه بعدی $\delta(\vec{r})$ چیست؟
- تمرینات موجود در صفحات ۸۰ و ۸۱ از ویرایش هفتم آرفکن را حل کنید.

مبحث بعدی: دترمینان و ماتریس

- بخش "مقدمه روش های ریاضی در علوم فیزیکی" در اینجا به پایان می رسد. هرچند، احتمالا در آینده و به فراخور موقعیت درس هایی را به این بخش مقدماتی اضافه خواهیم کرد. در ادامه ما وارد بخش دوم از روش های ریاضی در فیزیک با عنوان "دترمینان و ماتریس" خواهیم شد.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)

با سپاس از توجه شما

