

مقدمه ای بر دترمینان و ماتریس

مقدمه جبر ماتریس ها

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

تساوی دو ماتریس

- شرط تساوی دو ماتریس مانند A و B این است که ابعاد هر دو یکسان باشد (یعنی هر دو ماتریس $m \times n$ باشند) و درایه های آن دو ماتریس نظیر به نظیر با هم برابر باشند $a_{ij} = b_{ij}$.

Equality of Matrices



$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$A = B$$

$$\Rightarrow a = 6$$

$$b = 7$$

$$c = 8$$

$$d = 9$$

دو ماتریس زیر نابرابرند:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

جمع و تفریق ماتریس ها

- جمع و تفریق دو ماتریس مانند A و B به شرطی تعریف می شود که ابعاد هر دو ماتریس یکسان باشد (یعنی هر دو ماتریس $m \times n$ باشند). در این صورت اگر ماتریس حاصل را $C = A \pm B$ بنامیم، آنگاه درایه های این ماتریس با جمع و یا تفریق ماتریس های اولیه ساخته می شوند:

$$c_{ij} \equiv a_{ij} \pm b_{ij}$$

بنابراین ماتریس C نیز ابعادی برابر با ابعاد ماتریس های A و B خواهد داشت.

- مثال: سه ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

بنا به قاعده گفته شده، تعریف $A \pm B$ و $C \pm B$ ناممکن است (چرا؟!)، ولی می توان به راحتی دید که

$$A + C = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+3 \\ 3+7 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$$

تمرین: ماتریس های $C + A$ ، $C - A$ و $A - C$ را به دست آورید.

تمرین: برای دو ماتریس زیر، ماتریس های $V \pm U$ را بسازید:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ویژگی های جمع و تفریق ماتریس ها

- جمع ماتریس ها خاصیت جابجایی دارد زیرا

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = (B + A)_{ij}$$
- جمع ماتریس ها خاصیت شرکت پذیری دارد، یعنی $(A + B) + C = A + (B + C)$.
 تمرین: این گزاره را اثبات کنید.
- ماتریس صفر یا تهی: ماتریسی که همه درایه های آن صفر باشد (با هر ابعادی) را ماتریس صفر می نامند. این ماتریس را با O یا 0 نشان می دهند. اگر ماتریس O با ماتریس A ابعاد یکسانی داشته باشد، آنگاه می توان نوشت:

$$A = A + O = O + A$$

توجه کنید که

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- گزینه یک ماتریس مانند A را با $-A$ نمایش می دهیم که برای آن داریم:

$$A + (-A) = O$$

از این به بعد ماتریس تهی را بیشتر با O نمایش می دهیم.

ضرب اسکالر در ماتریس

● منظور از اسکالر، یک عدد حقیقی، موهومی و یا یک تابع است. اسکالر یک ماتریس 1×1 محسوب می شود.

● وقتی اسکالر α را در ماتریس A ضرب می کنیم، نتیجه ماتریسی است که دقیقا ابعاد ماتریس A را دارد و درایه های آن تک به تک در اسکالر α ضرب شده اند. یعنی اگر $B = \alpha A$ آنگاه $b_{ij} = \alpha a_{ij}$.

● مثال های زیر را ببینید:
$$7 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7(2) & 7(0) \\ 7(1) & 7(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 7 & -28 \end{bmatrix}$$

$$3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 8 & 7 \\ 6 & -9 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 15 & 6 & 24 & 21 \\ 18 & -27 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

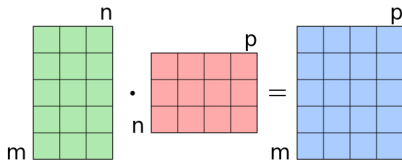
● این رفتار ضرب اسکالر در ماتریس را مقایسه کنید با رفتار ضرب اسکالر در دترمینان. در واقع در ضرب $\alpha \det(A)$ درایه های یک سطر و یا یک ستون دترمینان در عدد α ضرب می شوند، و نه همه عناصر دترمینان.

● اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد و همه عناصر این ماتریس در عدد α ضرب شوند، آنگاه داریم:
$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$

تمرین: با توجه به تعریف دترمینان (بر اساس نماد لوی-چویتا) این ویژگی را اثبات کنید.

انواع ضرب ماتریسی

- ما در ادامه حداقل دو نوع دیگر از ضرب ماتریسی (ضرب داخلی و ضرب مستقیم) را معرفی خواهیم کرد. در این بین ضرب داخلی که هم اکنون معرفی می شود، اهمیتی بنیادین در جبر ماتریسی دارد.

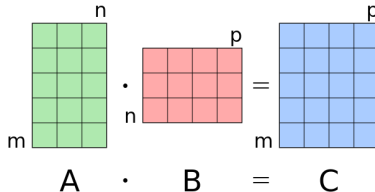


$$A \cdot B = C$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{p1} & a_{1n}b_{p2} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{p1} & a_{mn}b_{p2} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریسی (ضرب داخلی ماتریس ها)

- ضرب داخلی دو ماتریس A و B ، یعنی $C = AB$ ، فقط در صورتی تعریف می شود که تعداد ستون های ماتریس A با تعداد سطرها ی ماتریس B برابر باشد. در این صورت ماتریس حاصل ضرب C تعداد سطرها ی خود را از ماتریس A و تعداد ستون های خود را از ماتریس B خواهد گرفت. شکل زیر را ببینید.



- بنابراین اگر $A_{m \times n}$ و $B_{n \times p}$ ، آنگاه داریم $C_{m \times p} = A_{m \times n} B_{n \times p}$.
- درایه i از ماتریس حاصل ضرب از ضرب داخلی سطر i از ماتریس A در ستون j از ماتریس B به دست می آید، یعنی

$$C = AB \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

که در آن n برابر با تعداد ستون های ماتریس A و تعداد سطرها ی ماتریس B است.

ضرب ماتریسی (ضرب داخلی ماتریس ها)

• ضرب داخلی دو ماتریس در حالت کلی جابجا پذیر نیست، یعنی $AB \neq BA$ ؛ و در واقع ممکن است ابعاد AB و BA کاملاً متفاوت باشد و یا اینکه یکی از آن دو اصلاً تعریف نشود. پس ضرب ماتریس ها خاصیت جابجایی ندارد.

• اگر دو ماتریس A و B مربعی با ابعاد یکسان باشند، آنگاه AB و BA همیشه خوش تعریفند. در این صورت می توان "جابجاگر" این دو ماتریس را به صورت زیر تعریف کرد:

$$[A, B] = AB - BA$$

این موجود (که در مکانیک کوانتومی اهمیت اساسی دارد) در بسیاری موارد غیر صفر است.

• ضرب ماتریس ها خاصیت شرکت پذیری دارد $(AB)C = A(BC)$.

• تمرین الف: ضرب داخلی AB را برای دو ماتریس زیر بسازید.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ب: آیا ضرب داخلی BA نیز ممکن است؟ اگر بله، آن ضرب را نیز تشکیل دهید.

مثال

- تمرین الف: ضرب داخلی AB را برای دو ماتریس زیر بسازید.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ب: آیا ضرب داخلی BA نیز ممکن است؟ اگر بله، آن ضرب را نیز تشکیل دهید.

- پاسخ الف:

$$AB = \begin{pmatrix} 3(7) + 4(-2) + 2(0) & 3(-3) + 4(1) + 2(5) \\ 0(7) + 1(-2) - 2(0) & 0(-3) + 1(1) - 2(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ -2 & -9 \end{pmatrix}$$

پاسخ ب را شما بنویسید.

- تمرین: ماتریس های AB و BA را بسازید.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

مثال

- تمرین: ماتریس های AB و BA را بسازید.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- پاسخ:

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}, \quad BA = (4 \times 1 + 5 \times 2 + 6 \times 3) = (32)$$

- تمرین: برای ماتریس های

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

کمیت های ماتریسی زیر را در صورت وجود تشکیل دهید.

$$A + B \quad 4C \quad AB \quad CD \quad DC \quad B + D \quad A^3$$

ماتریس های پائولی

- ماتریس های پائولی که به صورت زیر تعریف می شوند، برای توصیف تکانه زاویه ای اسپینی برخی ذرات در مکانیک کوانتومی به کار می روند.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- می توان به راحتی دید که $\sigma_1 \sigma_2$ برابر است با

$$\sigma_1 \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0(0) + 1(i) & 0(-i) + 1(0) \\ 1(0) + 0(i) & 1(-i) + 0(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

در حالی که $\sigma_2 \sigma_1$

$$\sigma_2 \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

بنابراین برای جابجاگر این دو ماتریس داریم

$$[\sigma_1, \sigma_2] = \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$= 2i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2i \sigma_3.$$

- تمرین: ماتریس های $[\sigma_1, \sigma_3]$ و $[\sigma_2, \sigma_3]$ را بسازید.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید اهمیت ماتریس ها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ شرط تساوی دو ماتریس را بیان کنید.
- ۲ شرط خوش تعریف بودن جمع دو ماتریس را بیان کنید. رابطه جمع دو ماتریس چگونه است؟
- ۳ شرط خوش تعریف بودن تفریق دو ماتریس را بیان کنید. رابطه تفریق دو ماتریس چگونه است؟
- ۴ شرط خوش تعریف بودن ضرب دو ماتریس (ضرب داخلی دو ماتریس) را بیان کنید. رابطه معرف ضرب داخلی دو ماتریس چگونه است؟
- ۵ ماتریس تهی چه ماتریسی است؟
- ۶ ماتریس قرینه چگونه تعریف می شود؟
- ۷ ضرب عدد در ماتریس چگونه تعریف می شود؟
- ۸ اصول ضرب داخلی ماتریس ها (ضرب ماتریسی) را بیان کنید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراوانش نکنیم که بهترین راه برای درک و ” درونی سازی ” مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.

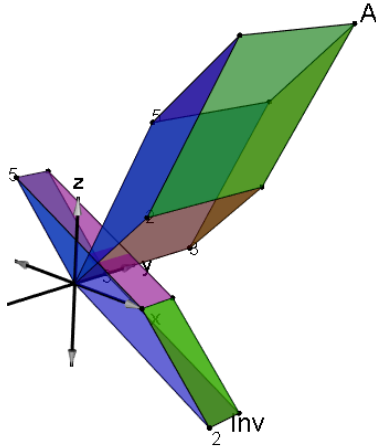


تمرین

- تمرین های موجود در متن درس را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: ماتریس وارون

- در جلسه بعد با مفهوم ماتریس وارون و شیوه یافتن آن آشنا خواهیم شد.



منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ❻ <https://math.libretexts.org/>

با سپاس از توجه شما

