

سینماتیک و دینامیک نسبیتی

دینامیک و انرژی در نسبیت خاص

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ دینامیک و انرژی در نسبیت خاص
- شکل نسبیتی قانون دوم نیوتن
- انرژی جنبشی و انرژی در نسبیت خاص

آنچه تاکنون آموخته ایم: سرعت ویژه و پایستگی تکانه نسبیتی

- با استفاده از تعریف زمان ویژه $d\tau = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$ می توان چاربردار سرعت ویژه را به صورت زیر تعریف کرد:

$$w^\mu \equiv \frac{dX^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (ct, x, y, z)$$

- اگر چاربردار تکانه نسبیتی را به صورت $p^\mu = mw^\mu$ تعریف کنیم، آنگاه پایستگی تکانه نسبیتی را می توانیم از آن نتیجه بگیریم. به ویژه توجه کنید که بخش فضایی این بردار به صورت زیر نوشته می شود:

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{x}}{d\tau} = m \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = m \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$\vec{p} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma m\vec{u}$$

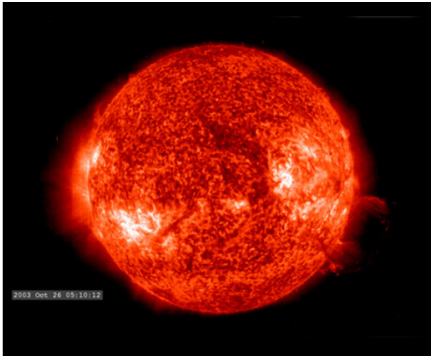
- راه دیگر برای معرفی تکانه نسبیتی این است که جرم نسبیتی را به صورت

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

- تعریف کنیم. در اینجا m_0 را جرم ویژه و یا جرم سکون rest mass می نامند. این مقدار جرمی است که ناظر همراه با ذره برای آن اندازه گیری می کند.

اهداف این جلسه: دینامیک و انرژی در نسبیت خاص

- در این جلسه شکل نسبیتی قانون دوم نیوتن را خواهیم نوشت و با کاربرد آن نیز آشنا خواهیم شد. سپس مفهوم انرژی را در نسبیت خاص بررسی کرده و معنای انرژی سکون ذره را بررسی خواهیم کرد.



(a)



(b)

شکل نسبیتی قانون دوم نیوتن

- آزمایش ها نشان داده اند که اگر از شکل نسبیتی تکانه، یعنی $\vec{p} = \gamma m \vec{u}$ ، استفاده کنیم آنگاه قانون دوم نیوتن به شکل $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ همچنان با نتایج تجربی سازگار است. هرچند، شکل معمول قانون دوم نیوتن، یعنی $\vec{F} = m\vec{a}$ ، دیگر با تجربه سازگار نخواهد بود. تمرین زیر را ببینید.
- تمرین: با توجه به تعریف تکانه نسبیتی، یعنی $\vec{p} = \gamma m \vec{u}$ ، آهنگ تغییر در تکانه $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ را محاسبه کرده و شکل نسبیتی قانون دوم نیوتن را بیابید.

شکل نسبیتی قانون دوم نیوتن

تمرین: با توجه به تعریف تکانه نسبیتی، یعنی $\vec{p} = \gamma m \vec{u}$ ، آهنگ تغییر در تکانه $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ را محاسبه کرده و شکل نسبیتی قانون دوم نیوتن را بیابید.

جزئیات پاسخ:
$$\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \vec{u}^2 = 2\vec{u} \cdot \frac{d}{dt} \vec{u}$$

$$\vec{F} = \frac{d(\gamma m \vec{u})}{dt} = \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) m \vec{u} + \gamma m \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right) = m \vec{u} \frac{d}{dt} \left[\left(1 - \frac{\vec{u}^2}{c^2} \right)^{-1/2} \right] + \gamma m \vec{a}$$

و یا

$$\vec{F} = m \vec{u} \left[-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\vec{u}^2}{c^2} \right)^{-3/2} \left(-\frac{2\vec{u}}{c^2} \right) \cdot \left(\frac{d}{dt} \vec{u} \right) \right] + \gamma m \vec{a}$$

$$= m \vec{u} \left[\frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{c^2} \left(1 - \frac{\vec{u}^2}{c^2} \right)^{-3/2} \right] + \gamma m \vec{a}$$

نتیجه می گیریم که در حالت کلی در نسبیت، شتاب و نیرو همجهت نیستند و یکی از جملات معادله حرکت در واقع در جهت بردار سرعت است!

شکل نسبیتی قانون دوم نیوتن

البته دو حالت مهم موجودند که نیرو و شتاب همجهتند:

$$\vec{F} = m\vec{u} \left[\frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{c^2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-3/2} \right] + \gamma m \vec{a}$$

۱- وقتی که بردارهای $\vec{u}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{F}$ همجهت هستند. در این حالت خاص می توان نوشت:

$$\vec{F} = m\gamma^3 \vec{a}$$

این مورد مثلاً وقتی پیش می آید که ذره باردار در یک میدان الکتریکی یکنواخت شروع به حرکت کند. در این حالت بردارهای $\vec{u}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{F}$ همراستا هستند.

۲- وقتی که بردار $\vec{u}$ بر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{F}$ عمود است. در این حالت می توان نوشت:

$$\vec{F} = \gamma m \vec{a}$$

مثال خوبی از این وضعیت وقتی است که ذره در میدان مغناطیسی حرکت می کند و بردار سرعت بر بردار نیرو عمود است.

مثال

● مثال: حرکت یک بعدی یک ذره تحت یک نیروی ثابت را با استفاده از رابطه شکل نسبیتی قانون دوم نیوتن به دست آورید. فرض کنید سرعت اولیه ذره صفر است.

● پاسخ: اگر نیرو ثابت باشد داریم

$$F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow p = Ft + \text{cte}$$

که البته با توجه به صفر بودن سرعت اولیه، مقدار ثابت نیز صفر است. حال با توجه به تعریف تکانه نسبیتی داریم:

$$p = \frac{\mu u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = Ft \Rightarrow u = \frac{Ft}{m\sqrt{1 + (Ft/mc)^2}}$$

تمرین: درستی تساوی اخیر را نشان دهید.

توجه کنید که صورت این کسر همان جواب کلاسیکی مساله است. مخرج کسر نیز وقتی سرعت به سرعت نور نزدیک می شود اهمیت پیدا می کند؛ هرچند، سرعت ذره هیچگاه نمی تواند از سرعت نور بیشتر شود. چرا؟ توجه کنید که وقتی زمان به سمت بینهایت میل می کند، سرعت ذره به سمت سرعت نور میل می کند.

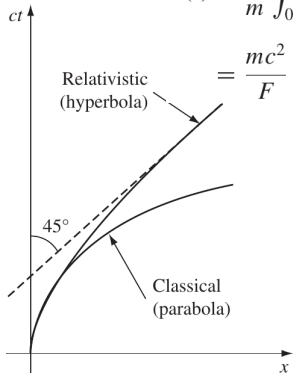
مثال

● مثال: حرکت یک بعدی یک ذره تحت یک نیروی ثابت را با استفاده از رابطه شکل نسبیتی قانون دوم نیوتن به دست آورید. فرض کنید سرعت اولیه ذره صفر است.

● ادامه پاسخ: حال می توان از سرعت به دست آمده انتگرال گرفت و معادله مسیر را به دست آورد.

$$x(t) = \frac{F}{m} \int_0^t \frac{t'}{\sqrt{1 + (Ft'/mc)^2}} dt'$$

$$= \frac{mc^2}{F} \sqrt{1 + (Ft'/mc)^2} \Big|_0^t = \frac{mc^2}{F} \left[\sqrt{1 + (Ft/mc)^2} - 1 \right]$$



این چه نوع مسیری است؟ دقت کنید که مسیر

حرکت یک ذره کلاسیک تحت تاثیر یک نیروی

ثابت یک سهمی است ($x = \frac{1}{2}(F/m)t^2$)؛ ولی ما در اینجا با

یک هذلولی مواجه هستیم. به همین دلیل است که حرکت

ذره تحت نیروی ثابت در مکانیک نسبیتی

را حرکت هذلولوی می نامند.

تمرین: ثابت کنید که معادله بالا یک هذلولی را توصیف می کند.

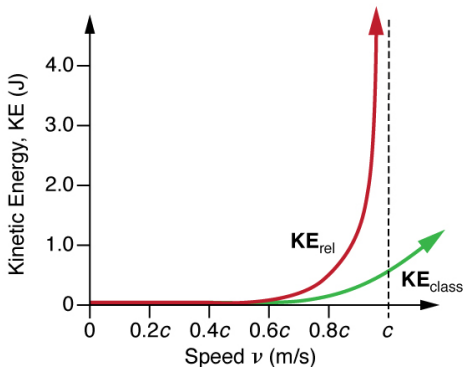
انرژی جنبشی نسبیتی

تمرین: فرض کنید که می خواهیم جسمی را از سرعت 0 به سرعت v برسانیم. بنا به قضیه کار-انرژی جنبشی، تغییر در انرژی جنبشی جسم برابر است با کار انجام شده روی جسم. از این قضیه استفاده کرده و مقدار تغییر در انرژی جنبشی جسم بیابید:

$$K = \int_0^v F dx = \int_0^v \gamma^3 m a dx$$

پاسخ: $K = \gamma mc^2 - mc^2$

به تغییر در انرژی جنبشی ذره نسبیتی با سرعت جسم در شکل مقابل دقت کنید.



انرژی جنبشی نسبیتی

تمرین: مقدار انرژی جنبشی نسبیتی را با استفاده از رابطه

$$K = \int_0^u F dx = \int_0^u \gamma^3 m a dx$$

به دست آورید.

جزئیات پاسخ:

$$K = \int_0^u \gamma^3 m \left(\frac{dv}{dt} \right) dx = \int_0^u \gamma^3 m \left(\frac{dx}{dt} \right) dv = \int_0^u \gamma^3 m v dv$$

$$= \int_0^u \frac{m v dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}}$$

حالا تغییر متغیر $z = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow dz = -\frac{2v}{c^2} dv$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$K = -\frac{mc^2}{2} \int_0^z \frac{dz}{z^{3/2}} = -\frac{mc^2}{2} \left[-2z^{-1/2} \right] = mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]_0^u$$

$$K = mc^2 \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{1/2}} - 1 \right) = \gamma mc^2 - mc^2$$

انرژی جنبشی کلاسیک و نسبیتی

- انرژی جنبشی در فیزیک کلاسیک به صورت $K = \frac{1}{2}mu^2$ تعریف می شود. ولی در اینجا ما عبارت

$$K = mc^2 \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} - 1 \right) = \gamma mc^2 - mc^2$$

به دست آورده ایم که در نگاه اول هیچ شباهتی به تعریف کلاسیک ندارد. چطور چنین چیزی ممکن است؟

- پاسخ: انرژی جنبشی باید در حد کلاسیک (یعنی $v \ll c$) به تعریف کلاسیک تبدیل شود؛ یعنی

$$K = mc^2 \lim_{u \ll c} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} - 1 \right) = mc^2 \lim_{u \ll c} \left(\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1 \right)$$

$$K \approx mc^2 \left[\left(1 - \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \dots\right) - 1 \right] \approx \frac{1}{2} mu^2$$

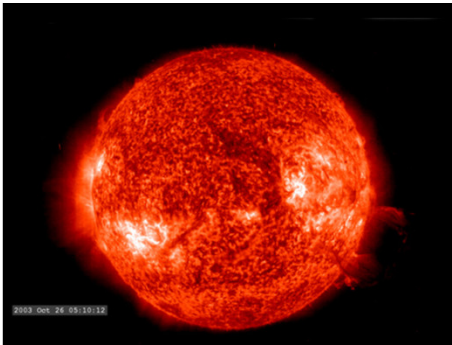
که همان تعریف کلاسیک انرژی جنبشی است.

انرژی سکون و انرژی کل ذره نسبیتی

- اینشتین مقدار $\gamma mc^2 = K + mc^2$ را به عنوان انرژی کل معرفی کرد. بنابراین انرژی کل برابر است با انرژی جنبشی به علاوه جمله جدیدی که آن را انرژی سکون جرم (mc^2) می نامند.

$$E = \gamma mc^2 = K + mc^2$$

در برخی برهمکنش های زیراتمی فیزیک، جرم ذرات می تواند تبدیل به انرژی شود. این فرایند اساس رآکتورها و بمب های اتمی است. در برخی دیگر نیز زوج های ذره می توانند نابود شده و تولید انرژی کنند.



رابطه تکانه-انرژی

- در نسبیت خاص یک رابطه بسیار اساسی بین تکانه و انرژی کل سیستم وجود دارد. در واقع از تعریف تکانه می توان نوشت:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \Rightarrow p^2 = \frac{m^2 u^2}{1-u^2/c^2} \quad *$$

همچنین با استفاده از رابطه به دست آمده برای انرژی جنبشی داریم:

$$K = mc^2 \left(\frac{1}{(1 - \frac{u^2}{c^2})^{1/2}} - 1 \right) \quad **$$

حال می توان مقدار u^2 را از معادلات * و ** حذف کرد و به رابطه زیر رسید:

$$(K + mc^2)^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \Rightarrow E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

تمرین: این رابطه را به روش گفته شده به دست آورید.

$$K = (\gamma - 1) mc^2 \quad *$$

دقت کنید:

رابطه تکانه-انرژی

به ویژه رابطه اخیر به ما می گوید که کمیت $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$ یک کمیت اسکالر است. آیا این کمیت می تواند طول یک چاربردار باشد؟ بله! اگر چاربردار تکانه را به صورت

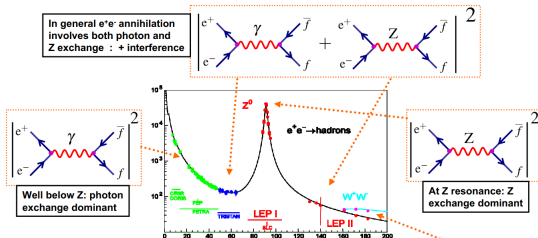
$$P^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right)$$

تعریف می کنیم، آنگاه داریم $P_\mu P^\mu = \eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = E^2/c^2 - \vec{p}^2$ که باید یک اسکالر باشد. نتیجه اخیر نشان می دهد اندازه این اسکالر برابر است با

$$P_\mu P^\mu = \eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = E^2/c^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2$$

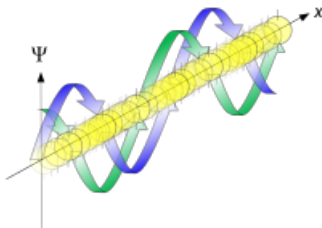
این رابطه پایه محاسبه سطح مقطع برخورد در فیزیک ذرات است.

e^+e^- Annihilation in Feynman Diagrams

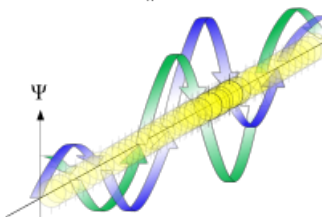


رابطه تکانه-انرژی برای یک ذره بدون جرم

$$\Psi = A e^{i(kx - \omega t)}$$



$$\Psi = \sum_n A_n e^{i(k_n x - \omega_n t)}$$



از رابطه $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$ نتیجه می گیریم که برای یک ذره بدون جرم مانند فوتون، رابطه تکانه انرژی به صورت زیر نوشته می شود:

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 = 0 \Rightarrow E = pc$$

این نتیجه از نسبیت می آید و می گوید که برای دانستن انرژی فوتون، دانستن تکانه آن کافی است و برعکس.

از طرفی، با استفاده از فیزیک کوانتوم (پدیده فوتوالکتریک) می دانیم که انرژی یک فوتون با فرکانس ν برابر است با

$E = h\nu$ که در آن h ثابت پلانک است. پس می توان از اینجا یک رابطه بین طول موج فوتون و تکانه آن را نتیجه گرفت:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c}{E/h} = \frac{hc}{pc} = \frac{h}{p}$$

که همان طول موج دوبروی در مکانیک کوانتومی است. این رابطه به ما می گوید که می توان به هر فوتون با طول موج λ یک تکانه را نسبت داد. این روابط در بحث پراکندگی ذرات اهمیت بنیادین خواهند داشت.

مثال

• الکترونی در یک پتانسیل الکتریکی ۸۰ کیلوولتی شتاب می گیرد. مقدار انرژی جنبشی، انرژی کل، تکانه و سرعت الکترون را بیابید.

• پاسخ: از قضیه کار-انرژی جنبشی می دانیم که تغییر در انرژی جنبشی این الکترون برابر است با

$$K = qV = e(۸۰ \times ۱۰^۳V) = ۸۰ \text{ keV}$$

حال می توانیم به جای نوشتن انرژی ها در واحد ژول آنها را در واحد الکترون ولت بنویسیم. البته بعدا می توانیم انرژی ها را از eV به ژول برگردانیم و برای اینکار باید از مقدار بار الکتریکی الکترون یعنی $q = -e = -۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} \text{ C}$ استفاده کنیم.

در این صورت مقدار انرژی برابر است با

$$E = K + mc^2 = ۸۰ \text{ keV} + ۵۱۱ \text{ keV} = ۵۹۱ \text{ keV}$$

همچنین می توان تکانه الکترون را به صورت زیر نوشت:

$$pc = \sqrt{E^2 - (mc^2)^2} = \sqrt{۵۹۱^2 - (۵۱۱)^2} = ۲۹۷ \text{ keV}$$

و دست آخر سرعت الکترون به صورت زیر به دست می آید:

$$pc = \gamma mc^2 \left(\frac{v}{c} \right) \Rightarrow ۲۹۷ \text{ keV} = ۵۹۱ \text{ keV} \left(\frac{v}{c} \right) \Rightarrow v = ۰,۵۰۳c$$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید دینامیک و انرژی در نسبیت خاص و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ تفاوت شکل نسبیتی قانون دوم نیوتن و شکل کلاسیک آن در چیست؟
- ۲ در کدام حالت ها در مکانیک نیوتنی نیرو و شتاب همجهت هستند؟
- ۳ رابطه بین انرژی جنبشی و تکانه در فیزیک کلاسیک چیست؟ رابطه بین انرژی جنبشی و تکانه در نسبیت خاص چیست؟ این دو را با هم مقایسه کنید.
- ۴ منظور از انرژی کل ذره نسبیتی چیست؟
- ۵ منظور از انرژی سکون جرم چیست؟
- ۶ درباره تاثیر عمیق رابطه $E = mc^2$ در فرهنگ عامه تحقیق کنید.
- ۷ منظور از چاربردار انرژی-تکانه چیست؟
- ۸ رابطه بین انرژی و تکانه یک ذره بدون جرم چیست؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.



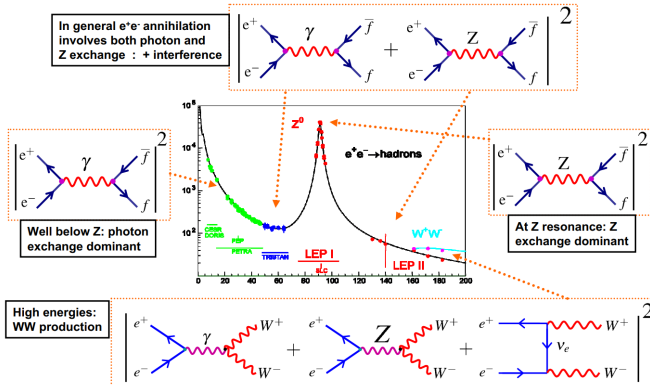
تمرین ها: زمان تحویل ۲۳ آذر ماه

- تمرینات موجود در متن درس را پاسخ دهید.
- لطفا تمرین های ۱ تا ۱۴ از فصل سوم کتاب رزنیکی را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: برخوردهای نسبیتی ذرات

- از فرمالیسم معرفی شده تاکنون می توان برای بررسی دقیق برخورد ذرات در حالت نسبیتی استفاده کرد. در جلسه بعد موارد مهمی از برخوردهای نسبیتی را بررسی می کنیم؛ هرچند، برخوردهای نسبیتی در درس ذرات بنیادی به صورت مبسوط توضیح داده خواهند شد.

e^+e^- Annihilation in Feynman Diagrams



مراجع

- ۱ Introduction to Special Relativity; Robert Resnick
- ۲ Relativity: Special, General, and Cosmological; Wolfgang Rindler
- ۳ General Relativity: An Introduction for Physicists; M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, A. N. Lasenby
- ۴ Introduction To Special Relativity; Markus Klute
<https://ocw.mit.edu/courses/8-20-introduction-to-special-relativity-january-ia>
- ۵ Leonard Susskind's Special Relativity, Find in YouTube

با سپاس از توجه شما