

مقدمه روش های ریاضی در علوم فیزیکی

آزمون انتگرال کوشی برای همگرایی سری ها

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

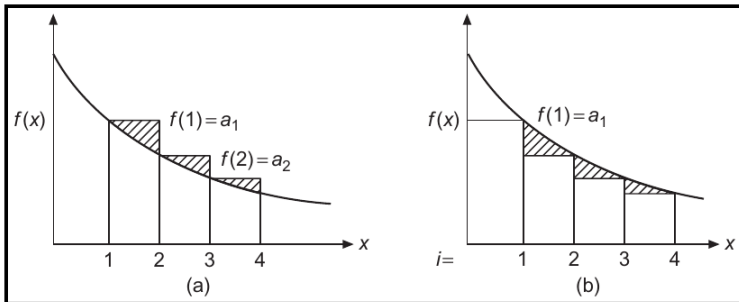
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

۱. آزمون انتگرال کوشی برای همگرایی سری ها
- آزمون انتگرال کوشی
 - آزمون های حساس دیگر

آزمون انتگرال کوشی برای همگرایی سری ها

در آزمون انتگرال کوشی برای همگرایی سری ها ما سری مورد نظر را با یک انتگرال مقایسه می کنیم. در واقع از لحاظ هندسی، مساحت زیر نمودار یک سری (با پهنای واحد) را با مساحت کل زیر منحنی (انتگرال) مقایسه می کنیم. اگر انتگرال مورد نظر مقدار مشخصی داشت، سری مورد نظر ما نیز همگراست وگرنه سری واگراست.

قضیه: فرض کنید که $f(x) > 0$ یک تابع پیوسته و یکنوا نزولی است و $f(n) = a_n$. در اینصورت سری $\sum_n f(n)$ همگرا خواهد بود اگر انتگرال $\int_1^{\infty} f(x)dx$ یک مقدار محدود داشته باشد و واگراست اگر انتگرال مورد نظر بینهایت شود.



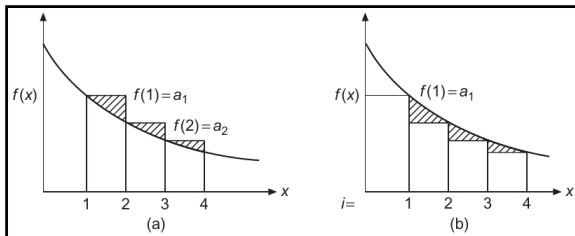
اثبات آزمون انتگرال کوشی برای همگرایی سری ها

● قضیه: فرض کنید که $f(x) > 0$ یک تابع پیوسته و یکنوا نزولی است و $f(n) = a_n$. در اینصورت سری $\sum_n f(n)$ همگرا خواهد بود اگر انتگرال $\int_1^{\infty} f(x)dx$ یک مقدار محدود داشته باشد و وگرنه اگر انتگرال مورد نظر بینهایت شود.

● اثبات: سری جزئی $s_i = \sum_{n=1}^i a_n = \sum_{n=1}^i f(n)$ را در نظر بگیرید. حال از آنجا که تابع $f(x)$ یکنوا نزولی است، با توجه به شکل سمت چپ داریم $s_i \geq \int_1^{i+1} f(x)dx$. همچنین با توجه به شکل سمت راست داریم $s_i - a_1 \leq \int_1^i f(x)dx$. بنابراین وقتی تعداد جملات سری بینهایت شود داریم

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x)dx + a_1$$

در نتیجه همگرایی سری نامتناهی مورد نظر کاملاً به مقدار انتگرال وابسته است: اگر مقدار انتگرال محدود شد، سری همگراست. اگر انتگرال بینهایت شد، سری واگراست.



معنی هندسی آزمون انتگرال کوشی برای همگرایی سری ها

• سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ را در نظر بگیرید. مقدار این سری عملاً برابر ناحیه سبز رنگ در شکل زیر است، زیرا

$$A \approx \left(\frac{1}{1}\right)(1) + \left(\frac{1}{2}\right)(1) + \left(\frac{1}{3}\right)(1) + \left(\frac{1}{4}\right)(1) + \left(\frac{1}{5}\right)(1) + \dots$$

$$A \approx \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

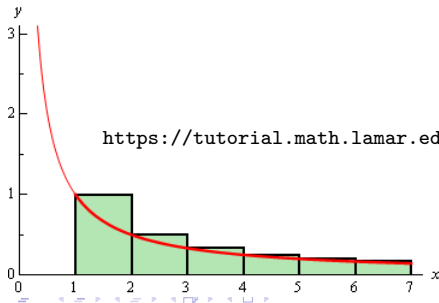
حال از شکل پایین می بینیم که مساحت زیر نمودار تابع $f(x) = 1/x$ کوچکتر از مساحت ناحیه سبز رنگ است. بنابراین، اگر انتگرال $\int_1^{\infty} dx/x$ واگرا شود، مقدار سری نیز واگرا خواهد بود.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$$

پس سری مورد نظر واگراست.

منبع این مثال و مثال بعدی:

<https://tutorial.math.lamar.edu/classes/calci/IntegralTest.aspx>



معنی هندسی آزمون انتگرال کوشی برای همگرایی سری ها

• سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ را در نظر بگیرید. مقدار این سری عملاً برابر ناحیه سبز رنگ در شکل زیر است، زیرا

$$A \approx \left(\frac{1}{2^2}\right)(1) + \left(\frac{1}{3^2}\right)(1) + \left(\frac{1}{4^2}\right)(1) + \left(\frac{1}{5^2}\right)(1) + \dots$$

$$A \approx \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

حال از شکل پایین می بینیم که مساحت زیر نمودار تابع $f(x) = 1/x^2$ بزرگتر از مساحت ناحیه سبز رنگ است. بنابراین، اگر انتگرال $\int_1^{\infty} dx/x^2$ همگرا شود، مقدار سری نیز همگرا خواهد بود.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$$

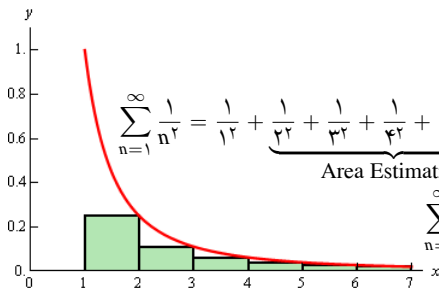
پس سری مورد نظر همگراست. دقت کنید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \underbrace{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots}_{\text{Area Estimation}} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1 + 1 = 2$$

Area Estimation

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1.644934\dots < 2$$

توجه:



کاربرد آزمون انتگرال

یکی از مهمترین کاربردهای آزمون انتگرال این است که می توان از آن برای تعیین حد بالا و پایین "باقیمانده سری ها" استفاده کرد. فرض کنید که یک سری نامتناهی را تا جمله N جمع می بندیم. در اینصورت داریم:

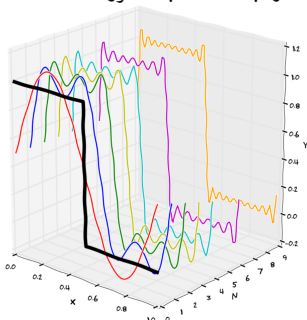
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^N a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

در واقع ما بسیاری از توابع پیچیده را با استفاده از سری ها (فوریه، توانی و ...) بسط می دهیم؛ ولی طبیعتاً نمی خواهیم (و نمی توانیم!) جملات بسط را تا بینهایت بنویسیم. بنابراین جملات سری را تا یک جمله مشخص مانند N می نویسیم و مابقی جملات (یعنی $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$) را به عنوان خطای محاسبات گزارش می کنیم. اگر مقدار جملات حذف شده یعنی $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ محدود باشد، آنگاه بسط مورد استفاده ما مناسب است. در غیر اینصورت باید از بسط بهتری استفاده کنیم.

حد بالا و پایین مقدار خطا در محاسبات را می توان با استفاده از رابطه زیر یافت:

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \leq \int_{N+1}^{\infty} f(x)dx + a_{N+1}$$

تمرین: نشان دهید که اگر $f(x) < 0$ یکنوا نزولی باشد، آنگاه سری و انتگرال هر دو واگرا می شوند.



تعمیم شرایط قضیه

می توانیم شرایط قضیه بالا را تا حدی تغییر دهیم به صورتی که تابع مورد نظر لزوما مثبت و یکنوا نزولی نباشد. در واقع می توان نشان داد که برای هر تابع $f(x)$ که مشتق پیوسته ای داشته باشد، رابطه زیر درست است:

$$\sum_{n=N_1+1}^{N_2} f(n) = \int_{N_1}^{N_2} f(x) dx + \int_{N_1}^{N_2} (x - [x]) f'(x) dx$$

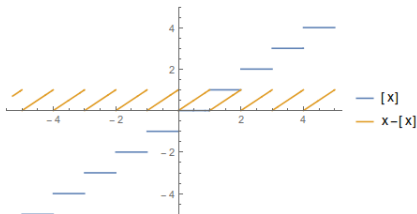
که در آن $[x]$ جزء صحیح عدد x است (بزرگترین عدد صحیح کوچکتر و یا مساوی عدد x). به رفتار توابع $[x]$ و $x - [x]$ دقت کنید.

توجه:

- ۱- اگر هر دو انتگرال محدود باشند، سری همگراست.
- ۲- اگر یکی از انتگرال ها محدود و دیگری بینهایت باشد، سری واگراست.

- ۳- اگر هر دو انتگرال بینهایت شوند، آزمون بی نتیجه است. در این صورت اگر حالت مبهم $\infty - \infty$ رخ دهد، ممکن است سری همگرا شود!

توجه: این نتیجه و نتیجه دیگری که به عنوان تمرین در اسلاید بعد آمده است، به ویژه برای بررسی همگرایی سری های تناوبی مفیدند.



اثبات نتیجه بالا

● اثبات رابطه

$$\sum_{n=N_1+1}^{N_2} f(n) = \int_{N_1}^{N_2} f(x) dx + \int_{N_1}^{N_2} (x - [x]) f'(x) dx$$

۱- با استفاده از انتگرال جزء به جزء می توان نوشت:

$$\int_{N_1}^{N_2} x f'(x) dx = [x f(x)]_{N_1}^{N_2} - \int_{N_1}^{N_2} f(x) dx = N_2 f(N_2) - N_1 f(N_1) - \int_{N_1}^{N_2} f(x) dx$$

۲- همچنین داریم

$$\begin{aligned} \int_{N_1}^{N_2} [x] f'(x) dx &= \sum_{n=N_1}^{N_2-1} n \int_n^{n+1} f'(x) dx = \sum_{n=N_1}^{N_2-1} n \int_n^{n+1} df = \sum_{n=N_1}^{N_2-1} n (f(n+1) - f(n)) \\ &= N_2 f(N_2) - N_1 f(N_1) - \sum_{n=N_1+1}^{N_2} f(n) \end{aligned}$$

حال با کم کردن نتیجه بخش ۲ از بخش اول می توانیم به نتیجه دلخواه برسیم:

$$\sum_{n=N_1+1}^{N_2} f(n) = \int_{N_1}^{N_2} f(x) dx + \int_{N_1}^{N_2} (x - [x]) f'(x) dx$$

تمرین: نتیجه زیر را نیز اثبات کنید:

$$\sum_{n=N_1+1}^{N_2} f(n) = \int_{N_1}^{N_2} f(x) dx + \int_{N_1}^{N_2} (x - [x] - \frac{1}{2}) f'(x) dx + \frac{1}{2} (f(N_2) - f(N_1))$$

همگرایی تابع زتای ریمان

● مثال: تابع زتای ریمان به صورت $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ تعریف می شود. این تابع در چه شرایطی همگراست؟

پاسخ: تابع $f(x) = x^{-p}$ را فرض کنید. در این صورت می توان نوشت:

$$\int_1^{\infty} x^{-p} dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_{x=1}^{\infty}, \quad p \neq 1,$$

$$= \ln x \Big|_{x=1}^{\infty}, \quad p = 1.$$

واضح است که این انتگرال (و بنابراین سری زتای ریمان) برای مقادیر $p \leq 1$ واگرا و برای مقادیر $p > 1$ همگراست. بنابراین تابع زتای ریمان برای مقادیر $p > 1$ خوش تعریف است.

● روش بالا در واقع اثبات دیگری بر واگرایی سری هارمونیک ($p = 1$) است. این سری به صورت لگاریتمی (بسیار آرام) واگرا می شود. در واقع مجموع یک میلیون جمله اول این سری حدوداً ۱۴/۳۹۲۷۲ می شود.

تمرین (اختیاری): یک کد بنویسید و این نتیجه را نشان دهید.

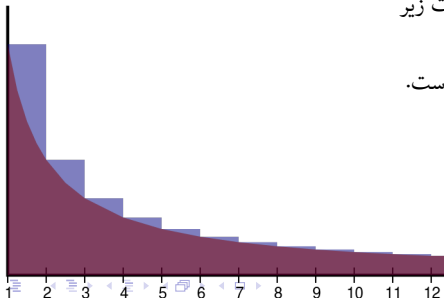
ثابت اویلر-ماشرونی

- ثابت اویلر-ماشرونی: می توان جمله واگرای سری هارمونیک را از آن کم کرد و به یک ثابت به نام ثابت اویلر-ماشرونی رسید:

$$\gamma = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}} \quad \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln n \right) \approx 0.57712$$

- ثابت اویلر-ماشرونی را می توان از کسر مقابل نیز پیدا کرد!

- تمرین: در شکل زیر، ناحیه بنفش رنگ مساحت زیر نمودار $1/x$ است. توضیح دهید که چرا ثابت اویلر-ماشرونی برابر مساحت ناحیه آبی رنگ است.



یک مثال دیگر

• آیا سری $S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ همگراست؟

پاسخ: خیر! انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^{\infty} \frac{d \ln x}{\ln x} = [\ln \ln x]_2^{\infty}$$

که نشان می دهد این سری واگراست. هرچند این واگرایی بسیار بسیار آرام اتفاق می افتد!

• تمرین: توضیح دهید که چرا این سری بسیار آرامتر از سری هارمونیک واگرا می شود.

قضیه کومر

● آزمون های حساس تر برای بررسی همگرایی سری ها معمولا نتیجه قضیه کومر (Kummer) هستند. این قضیه درباره دو سری با جملات مثبت و متناهی (u_n و a_n) بیان می شود و دو بخش است:

۱- سری $\sum_n u_n$ همگراست اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \right) \geq C > 0$$

که در آن C یک ثابت مثبت است. البته اگر سری $\sum_n a_n^{-1}$ همگرا شود، آنگاه گزاره اخیر عملا مانند استفاده از آزمون مقایسه خواهد بود. ولی اگر سری $\sum_n a_n^{-1}$ واگرا شود، آنگاه آزمون بالا بسیار موثر است. در واقع هرچقدر سری $\sum_n a_n^{-1}$ آرامتر به سمت واگرایی برود، آزمون کومر موثرتر خواهد بود.

۲- اگر سری $\sum_n a_n^{-1}$ واگرا شود و شرط

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \right) \leq 0$$

برقرار باشد، آنگاه سری $\sum_n u_n$ واگرا خواهد بود.

● تمرین: بخش دوم قضیه کومر را با استفاده از آزمون مقایسه اثبات کنید.

برای اثبات بخش اول اسلاید بعد را ببینید.

اثبات بخش اول قضیه کومر

- برای اثبات بخش اول قضیه کومر، جملات مربوط به شرط قضیه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \right) \geq C > 0$$
را برای $n = N + 1$ به بعد می نویسیم:

$$u_{N+1} \leq (a_N u_N - a_{N+1} u_{N+1}) / C,$$

$$u_{N+2} \leq (a_{N+1} u_{N+1} - a_{N+2} u_{N+2}) / C,$$

$$\dots \leq \dots, \dots,$$

$$u_n \leq (a_{n-1} u_{n-1} - a_n u_n) / C.$$

حال با اضافه کردن جملات بالا داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{i=N+1}^n u_i &\leq \frac{a_N u_N}{C} - \frac{a_n u_n}{C} \\ &< \frac{a_N u_N}{C}. \end{aligned}$$

معنی این نتیجه آن است که جملات انتهایی سری $\sum_n u_n$ مجموع محدودی دارند؛ بنابراین این سری همگراست (با فرض درستی شرط قضیه).

آزمون گائوس

● آزمون مشهور گائوس برای همگرایی سری ها را در واقع می توان به عنوان نتیجه ای از آزمون کومر برای سری های $u_n > 0$ به دست آورد؛ به شرطی که نسبت جملات متوالی به سمت ۱ میل کند و نتیجه آزمون های پیشین نتیجه نامعینی را گزارش دهند (آزمون های دیگر در تعیین همگرایی ناموفق باشند).

● آزمون گائوس: اگر برای مقادیر بزرگ n داشته باشیم

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{h}{n} + \frac{B(n)}{n^2}$$

که در آن تابع $B(n)$ برای مقادیر بزرگ n محدود است (بینهایت نمی شود)؛ آنگاه بنا به آزمون گائوس اگر داشته باشیم $h > 1$ سری $\sum u_n$ همگرا می شود، و اگر داشته باشیم $h \leq 1$ ، سری $\sum u_n$ واگرا می شود.

● آزمون گائوس از این جهت اهمیت دارد که حالت نامعینی در آن وجود ندارد. این آزمون بسیار دقیق است و برای تقریباً همه مسائل فیزیکی جوابگوست!

● تمرین: آزمون گائوس را با استفاده از قضیه کومر و با انتخاب $a_n = n \ln n$ اثبات کنید (متن کتاب).

مثال: همگرایی جواب سری معادله لژاندر

نسبت جملات متوالی در جواب سری معادله لژاندر (که در مبحث معادلات دیفرانسیل با آن برخورد می کنیم) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{a_{2j+2}}{a_{2j}} = \frac{2j(2j+1) - \lambda}{(2j+1)(2j+2)}$$

در اینجا λ یک ثابت موجود در معادله لژاندر است و a_{2j} جمله شماره $2j$ در جواب سری است. فرض می کنیم $u_j = a_{2j}$ و بنابراین

$$\frac{u_j}{u_{j+1}} = \frac{(2j+1)(2j+2)}{2j(2j+1) - \lambda}$$

در حد مقادیر بسیار بزرگ رفتار نسبت بالا به صورت زیر است:

$$\frac{u_j}{u_{j+1}} \rightarrow \frac{2j+2}{2j} + \frac{B(j)}{j^2} = 1 + \frac{1}{j} + \frac{B(j)}{j^2}$$

پس سری مورد نظر واگراست مگر اینکه بنا به دلایل فیزیکی جملات با شمارنده بزرگ کنترل (صفر) شوند.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید آزمون انتگرال کوشی، قضیه کومر، آزمون گائوس و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

۱. آزمون انتگرال کوشی را با ذکر یک مثال توضیح دهید.

۲. قضیه کومر را با ذکر یک مثال توضیح دهید.

۳. آزمون گائوس را با ذکر یک مثال توضیح دهید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراوانش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.

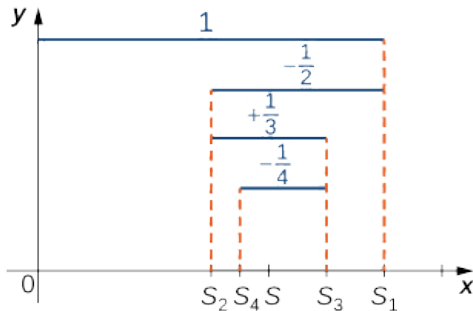


تمرین ها

- تمرینات موجود در متن درس را پاسخ دهید.
- تمرینات موجود در صفحات ۱۰ و ۱۱ از ویرایش هفتم را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: سری های متناوب

- در جلسه بعد همگرایی سری های متناوب را بررسی خواهیم کرد.



منابع

- ➊ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ➋ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ➌ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ➍ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ➎ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)

با سپاس از توجه شما

