

فیزیک مکانیک

فصل دهم: دوران

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در تابستان و پاییز سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

فصل دهم: دوران

- سینماتیک حرکت دورانی
- دوران با شتاب زاویه ای ثابت
- ارتباط بین متغیرهای دورانی و خطی



آنچه گذشت...

- قوانین حرکت:
یکی از راه های نوشتن قوانین حرکت، استفاده از سه قانون حرکت نیوتن است. این شکل از علم مکانیک کلاسیک را مکانیک نیوتنی می نامند. نوشتن قوانین مکانیک به شکل های دیگر، مانند مکانیک لاگرانژی، هامیلتونی و ... هم ممکن است.
- ما در این کتاب مکانیک نیوتنی را بررسی خواهیم کرد.
- قانون اول: وقتی برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر باشد، جسم حالت حرکت خود را حفظ خواهد کرد. یعنی اگر ساکن باشد، ساکن خواهد ماند و اگر با سرعت در حال حرکت باشد، با همان سرعت به حرکت خود ادامه خواهد داد.
- قانون دوم: رابطه شتاب و نیرو

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

قانون کولن برای دو بار نقطه ای:

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

قانون هوک برای جرم متصل به فنر

$$F = -kx$$

نیروی عمودی سطح، کشش نخ، نیروی ارشمیدس و ...

این دو دسته قانون، طیف بسیار گسترده ای از پدیده های فیزیکی را به درستی توضیح می دهند.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

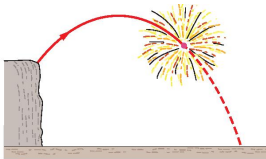
قانون سوم نیوتن: هر عملی را عکس العملی است، با مقدار مساوی و در جهت خلاف آن

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

قوانین نیوتن فقط در دستگاه های لخت برقرار هستند.

پرش: حرکت یک جسم صلب (یک نوع خاص از سیستم ذره که در آن فاصله ذرات تغییر نمی کند) چگونه است؟

تکانه و قانون دوم نیوتن برای سیستم های ذره



قضیه: نیروی کل خارجی وارده به یک سیستم ذره برابر است با جرم کل سیستم ضربدر شتاب مرکز جرم:

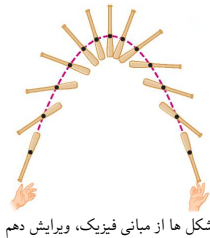
$$\vec{F}_{tot, ext} = M \vec{a}_{com}$$

حاصلضرب جرم جسم در سرعت آن را بردار تکانه خطی (linear momentum) و یا بردار اندازه حرکت خطی جسم می نامند:

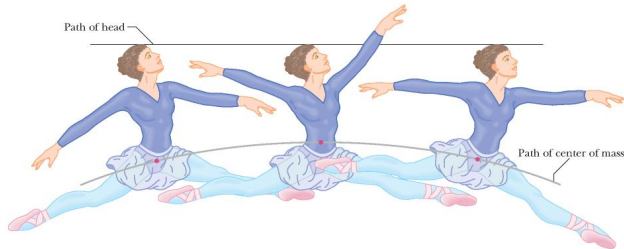
$$\vec{p} = m \vec{v}$$

قضیه: نیروی کل خارجی وارده به یک سیستم ذره برابر است با آهنگ تغییر در تکانه کل سیستم:

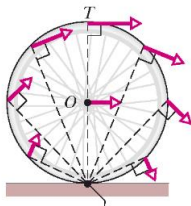
$$\vec{F}_{tot, ext} = \frac{d}{dt} \vec{P}$$



شکل ها از مبانی فیزیک، ویرایش دهم



حرکت جسم صلب



جسم صلب نوع خاصی از سیستم ذره است که در آن فاصله ذرات، در طول حرکت، تغییر نمی کند.

حرکت جسم صلب را می توان به دو نوع حرکت خطی و دورانی تجزیه کرد. جابه جایی خطی را تاکنون مطالعه کرده ایم (فصل های دوم و چهارم)؛ در ادامه می خواهیم حرکت های دورانی را بررسی کنیم. برای اینکار لازم است که مباحث زیر را بدانیم:

سینماتیک دورانی و مورد خاص حرکت با شتاب زاویه ای ثابت

ارتباط متغیرهای خطی و دورانی

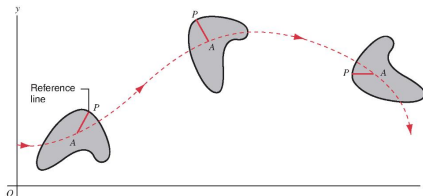
لختی دورانی، گشتاور و قانون دوم نیوتن برای حرکت دورانی

اندازه حرکت زاویه ای و پایداری آن (در اینجا بحث نخواهد شد).

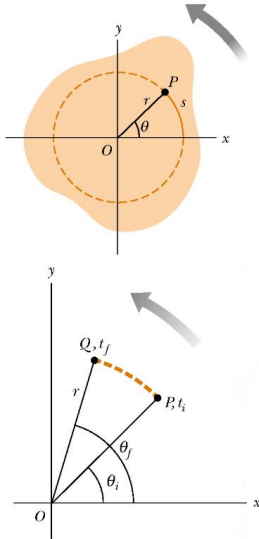
برساختن مکانیک دورانی با استفاده از کمیت های اسکالر (کار، انرژی و ...)

تعادل ایستایی اجسام

شکل ها از ویرایش دهم فیزیک هالیدی.



حرکت دورانی یک تک ذره



فعلا فقط بر روی حرکت دورانی جسم صلب تمرکز می کنیم (قبلا مساله حرکت خطی را فهمیده ایم). شکل بالا را ببینید.

برای ساده سازی هرچه بیشتر مساله، به جای حرکت کل جسم، فقط حرکت دورانی یک تک ذره (از جسم صلب) را بررسی می کنیم.

وقتی حرکت دورانی این تک ذره را فهمیدیم، می توانیم حرکت دورانی کل جسم را (که ترکیب حرکت دورانی مجموعه ای از ذرات است) فرمولبندی کنیم.

برای بررسی حرکت دورانی یک تک ذره باید با مفاهیم زیر آشنا شویم:

واحدهای اندازه گیری زاویه و جابه جایی زاویه ای.

سرعت زاویه ای متوسط و لحظه ای.

شتاب زاویه ای متوسط و لحظه ای.

حرکت دورانی با شتاب زاویه ای ثابت.

تحلیل حرکت دورانی (رابطه مشتقات زمانی بین متغیرهای زاویه ای).

انتگرال گیری از مسیر حرکت دورانی.

شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

یادآوری از فصل اول: واحدهای زاویه

degrees	radians	revolutions
0	0	0
30	$\pi/6$	1/12
45	$\pi/4$	1/8
60	$\pi/3$	1/6
90	$\pi/2$	1/4
120	$2\pi/3$	1/3
135	$3\pi/4$	3/8
180	π	1/2
225	$5\pi/4$	5/8
270	$3\pi/2$	3/4
315	$7\pi/4$	7/8
360	2π	1

ناکنون یکاهای مختلفی برای اندازه گیری زاویه معرفی شده اند:

دور.

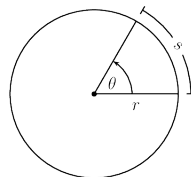
درجه: هر دور برابر 360° درجه است.گرادیان: هر دور برابر 400° گرادیان است.

رادیان: هر دور برابر 2π رادیان است. واحد رادیان اهمیت هندسی و فیزیکی فوق العاده ای دارد زیرا روابط فیزیک و ریاضی در این واحد به ساده ترین صورت (بدون ثوابت اضافی) نوشته می شوند.

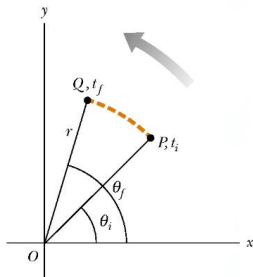
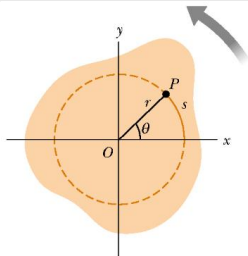
$$s = r\theta$$

رابطه اساسی

برای طول کمانی از دایره به شعاع r را به خاطر بسپارید. این رابطه فقط و فقط در صورتی درست است که زاویه θ بر حسب رادیان باشد.



موقعیت زاویه ای، جابه جایی زاویه ای، سرعت زاویه ای متوسط و سرعت زاویه ای لحظه ای



موقعیت زاویه ای: اگر ذره در موقعیت P قرار داشته باشد (شکل بالا)، آنگاه می گوییم که ذره در موقعیت زاویه ای θ نسبت به جهت مثبت محور x قرار گرفته است.

جابه جایی زاویه ای: فرض کنید که ذره در اثر دوران جسم، از موقعیت زاویه ای ابتدایی θ_i به موقعیت زاویه ای نهایی θ_f منتقل شده است. در این صورت جابه جایی زاویه ای ذره برابر است با

$$\Delta\theta \equiv \theta_f - \theta_i$$

واحد جابه جایی زاویه ای (و همچنین موقعیت زاویه ای) می تواند دور، درجه، رادیان و ... باشد.

سرعت زاویه ای متوسط: فرض کنید که ذره در اثر دوران جسم، از موقعیت زاویه ای ابتدایی θ_i به موقعیت زاویه ای نهایی θ_f منتقل شده است و این حرکت در زمان $\Delta t = t_f - t_i$ انجام شده است. در این صورت، سرعت زاویه ای متوسط ذره برابر است با

$$\bar{\omega} \equiv \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i}$$

سرعت زاویه ای لحظه ای: اگر بازه زمانی Δt حرکت ذره بسیار کوچک باشد، آنگاه می توان سرعت زاویه ای را به صورت بسیار دقیق تری اندازه گیری کرد. در حدی که Δt به سمت صفر میل کند، حد یاد شده به مشتق تبدیل می شود. در این حالت، سرعت زاویه ای لحظه ای را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

واحد سرعت زاویه ای لحظه ای (و سرعت زاویه ای متوسط) می تواند deg/s , rev/s و ... باشد.

شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

شتاب زاویه ای متوسط و شتاب زاویه ای لحظه ای

● شتاب زاویه ای متوسط عبارت است از آهنگ متوسط تغییر در سرعت زاویه ای

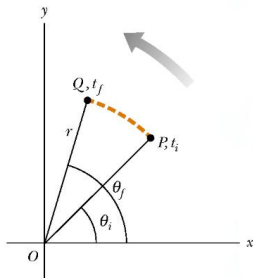
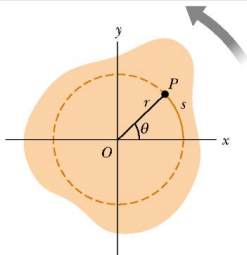
$$\bar{\alpha} \equiv \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i}$$

● شتاب زاویه ای لحظه ای عبارت است از آهنگ لحظه ای تغییر در سرعت زاویه ای

$$\alpha \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

واحد شتاب زاویه ای لحظه ای (و شتاب زاویه ای متوسط) می تواند deg/s^2 ، rev/s^2 ، rad/s^2 و ... باشد.

شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.



جمع بندی روابط بین متغیرهای زاویه ای

سرعت زاویه ای لحظه ای عبارت است از مشتق موقعیت زاویه ای؛ به عبارت دیگر، سرعت زاویه ای شیب نمودار موقعیت زاویه ای است. از طرف دیگر، موقعیت زاویه ای برابر است با مساحت زیر نمودار سرعت زاویه ای-زمان:

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad d\theta = \omega(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta = \int_0^t \omega(t)dt$$

شتاب زاویه ای لحظه ای عبارت است از مشتق سرعت زاویه ای لحظه ای؛ به عبارت دیگر، شتاب زاویه ای شیب نمودار سرعت زاویه ای لحظه ای است. از طرف دیگر، سرعت زاویه ای برابر است با مساحت زیر نمودار شتاب زاویه ای-زمان:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad d\omega = \alpha(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\omega_i}^{\omega_f} d\omega = \int_0^t \alpha(t)dt$$

برای درک درست این روابط، به سه مثال زیر دقت کنید.

مثال: تحلیل حرکت زاویه ای

● موقعیت زاویه ای متحرکی بر حسب زمان و در واحد رادیان به صورت زیر داده شده است:

$$\theta(t) = 5t^3 - 2t + 5 \quad (rad)$$

الف: سرعت زاویه ای لحظه ای در یک زمان دلخواه t را بیابید. سرعت زاویه ای لحظه ای در زمان $t = 1$ s را بیابید.

الف: شتاب زاویه ای لحظه ای در یک زمان دلخواه t را بیابید. شتاب زاویه ای لحظه ای در زمان $t = 1$ s را بیابید.

پاسخ الف:

$$\theta(t) = 5t^3 - 2t + 5 \quad (rad) \quad \Rightarrow \quad \omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (5t^3 - 2t + 5) = 15t^2 - 2 \quad (rad/s)$$

$$\omega(t = 1) = 15 - 2 = 13 \quad (rad/s)$$

پاسخ ب:

$$\omega(t = 1) = 15t^2 - 2 \quad (rad/s) \quad \Rightarrow \quad \alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (15t^2 - 2) = 30t \quad (rad/s^2)$$

$$\alpha(t = 1) = 30 \quad (rad/s^2)$$

مثال: انتگرال گیری از حرکت زاویه ای

چرخ لنگری با شتاب زاویه ای $\alpha(t) = t^2 - t + 1$ در حال دوران است.

الف) اگر سرعت زاویه ای اولیه چرخ لنگر برابر $\omega(t=0) = -1 \text{ rad/s}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $d\omega = \alpha(t)dt$ سرعت زاویه ای را به عنوان تابعی از زمان $\omega(t)$ تعیین کنید.

ب) حال اگر موقعیت زاویه ای اولیه $\theta(t=0) = +3 \text{ rad}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $d\theta = \omega(t)dt$ موقعیت زاویه ای را به عنوان تابعی از زمان $\theta(t)$ تعیین کنید.

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{راهنمایی:}$$

مثال: انتگرال گیری از حرکت زاویه ای

چرخ لنگری با شتاب زاویه ای $\alpha(t) = t^2 - t + 1$ در حال دوران است.

الف) اگر سرعت زاویه ای اولیه چرخ لنگر برابر $\omega(t=0) = -1 \text{ rad/s}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $d\omega = \alpha(t)dt$ سرعت زاویه ای را به عنوان تابعی از زمان $\omega(t)$ تعیین کنید.

ب) حال اگر موقعیت زاویه ای اولیه $\theta(t=0) = +3 \text{ rad}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $d\theta = \omega(t)dt$ موقعیت زاویه ای را به عنوان تابعی از زمان $\theta(t)$ تعیین کنید.

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{راهنمایی:}$$

پاسخ الف: با انتگرال گیری از تابع شتاب زاویه ای می توانیم سرعت زاویه ای را بیابیم:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\omega = \alpha(t)dt \quad \Rightarrow \quad \int_{\omega_i}^{\omega_f} d\omega = \int_0^t \alpha(t)dt$$

$$\int_{-1}^{\omega(t)} d\omega = \int_0^t (t^2 - t + 1) dt \quad \Rightarrow \quad [\omega]_{-1}^{\omega(t)} = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t \right]_0^t$$

$$\omega(t) - (-1) = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t \right] - \left[\frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} + 0 \right]$$

$$\omega(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - 1$$

دو چک جواب را فراموش نکنید.

مثال: انتگرال گیری از حرکت زاویه ای

چرخ لنگری با شتاب زاویه ای $\alpha(t) = t^2 - t + 1$ در حال دوران است.

الف) اگر سرعت زاویه ای اولیه چرخ لنگر برابر $\omega(t=0) = -1 \text{ rad/s}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $d\omega = \alpha(t)dt$ سرعت زاویه ای را به عنوان تابعی از زمان $\omega(t)$ تعیین کنید.

ب) حال اگر موقعیت زاویه ای اولیه $\theta(t=0) = +3 \text{ rad}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $d\theta = \omega(t)dt$ موقعیت زاویه ای را به عنوان تابعی از زمان $\theta(t)$ تعیین کنید.

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{راهنمایی:}$$

پاسخ ب: با انتگرال گیری از تابع سرعت زاویه ای می توانیم موقعیت زاویه ای را بیابیم:

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\theta = \omega(t)dt \quad \Rightarrow \quad \int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta = \int_0^t \omega(t)dt$$

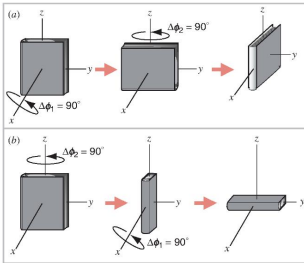
$$\int_{+3}^{\theta(t)} d\theta = \int_0^t \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - 1 \right) dt \quad \Rightarrow \quad [\theta]_{+3}^{\theta(t)} = \left[\frac{t^4}{12} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} - t \right]_0^t$$

$$\theta(t) - 3 = \left[\frac{t^4}{12} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} - t \right] - \left[\frac{0^4}{12} - \frac{0^3}{6} + \frac{0^2}{2} - 0 \right]$$

$$\theta(t) = \frac{t^4}{12} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} - t + 3$$

دو چک جواب را شما پیگیری کنید.

آیا متغیرهای زاویه ای بردار هستند؟



برای جابه جایی های زاویه ای نسبتاً بزرگ، می توان به راحتی دید که خاصیت جابه جایی جمع بردارها برقرار نیست:

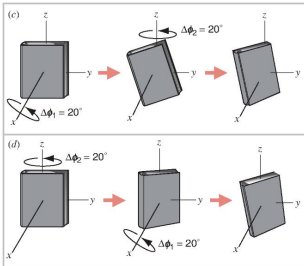
$$\Delta\phi_x + \Delta\phi_z \neq \Delta\phi_z + \Delta\phi_x$$

در اینجا $\Delta\phi$ نشان دهنده زوایای نسبتاً بزرگ است (مثلاً 60° و یا 90°). پس نتیجه می گیریم که جابه جایی های زاویه ای نسبتاً بزرگ بردار نیستند. شکل مقابل را ببینید.

ولی وقتی که این جابه جایی های زاویه ای کوچک باشند، آنگاه می بینیم که

$$\delta\phi_x + \delta\phi_z \approx \delta\phi_z + \delta\phi_x$$

در اینجا $\delta\phi$ نشان دهنده زوایای نسبتاً کوچک است (مثلاً 5° و یا 1°). شکل های پایین را ببینید.



در حدی که این جابه جایی ها به سمت صفر میل کنند داریم:

$$d\phi_1 + d\phi_2 = d\phi_2 + d\phi_1$$

پس جابه جایی های زاویه ای کوچک بردار هستند.

سرعت زاویه ای لحظه ای در حد زوایای بسیار کوچک تعریف می شود:

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

بنابراین سرعت زاویه ای لحظه ای یک کمیت برداری است (حاصلضرب عدد در بردار). شتاب زاویه ای لحظه ای نیز کمیتی برداری است.

شکل ها از فیزیک هالیدی، ویرایش پنجم.

حرکت دورانی با سرعت زاویه ای ثابت

در یک حرکت دایره ای با سرعت زاویه ای ثابت داریم:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

که در آن r شعاع دایره و T دوره حرکت متحرک است در حالی که v نشان دهنده سرعت خطی متحرک می باشد.

همچنین در چنین حرکتی داریم:

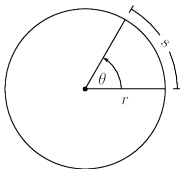
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

که در آن ν فرکانس حرکت است (علامت های فرکانس و سرعت خطی v را از هم تفکیک کنید).

البته با انتگرال گیری از تعریف سرعت زاویه ای می توان موقعیت زاویه ای را به راحتی به دست آورد. اگر موقعیت زاویه ای اولیه متحرک برابر θ_0 باشد داریم:

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\theta = \omega(t)dt \quad \Rightarrow \quad \int_{\theta_0}^{\theta(t)} d\theta = \int_0^t \omega dt$$

$$\theta(t) - \theta_0 = \omega t \quad \text{و یا}$$



دوران با شتاب زاویه ای ثابت

اگر متحرکی با شتاب زاویه ای ثابت حرکت کند آنگاه می توان به راحتی سرعت زاویه ای و موقعیت زاویه ای آن را به دست آورد.
فرض کنید که سرعت زاویه ای اولیه متحرک برابر ω_0 باشد. در این صورت داریم:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \alpha(t)dt \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega(t)} d\omega = \int_0^t \alpha dt$$

$$\boxed{\omega - \omega_0 = \alpha t}$$

و یا

همچنین، اگر موقعیت زاویه ای اولیه متحرک برابر θ_0 باشد داریم:

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega(t)dt \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta(t)} d\theta = \int_0^t (\alpha t + \omega_0) dt$$

$$\boxed{\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0}$$

و یا

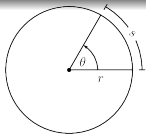
تمرین: با حذف زمان از این دو معادله، معادله مستقل از زمان بین متغیرهای حرکت دورانی را بیابید.

به تناظر بین متغیرهای خطی و دورانی در جدول زیر توجه کنید ↓↓↓↓

Table 10-1 Equations of Motion for Constant Linear Acceleration and for Constant Angular Acceleration

Equation Number	Linear Equation	Missing Variable	Angular Equation	Equation Number
(2-11)	$v = v_0 + at$	$x - x_0$	$\theta - \theta_0$	(10-12)
(2-15)	$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	v	ω	(10-13)
(2-16)	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t	t	(10-14)
(2-17)	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	a	α	(10-15)
(2-18)	$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	v_0	ω_0	(10-16)
			$\omega = \omega_0 + \alpha t$	
			$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	
			$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$	
			$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$	
			$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$	

ارتباط بین متغیرهای دورانی و خطی



فرض کنید که جسم صلبی در حال دوران است. در این صورت، اگر نقطه ای از این جسم به اندازه زاویه θ بر حسب رادیان دوران کند، فاصله طی شده توسط این نقطه برابر است با

$$s = r\theta$$

یعنی فاصله خطی طی شده در طول دوران با فاصله زاویه ای طی شده رابطه دارد.

با توجه به اینکه فاصله نقطه مورد نظر تا محور دوران (یعنی r) تغییر نمی کند (چون جسم صلب است)، داریم:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} r\theta = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

$$v = r\omega$$

و یا

به همین صورت، می توانیم تغییر در اندازه بردار سرعت را بیابیم:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} r\omega = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

و یا شتاب مماسی (که در اثر تغییر در اندازه بردار سرعت بوجود می آید) برابر است با

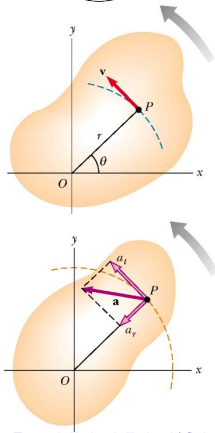
$$a_t = r\alpha$$

سه رابطه اساسی بالا فقط در صورتی برقرار هستند که کمیت های زاویه ای بر حسب رادیان سنجیده شوند.

یادآوری شتاب مرکزگرا (که در اثر تغییر در جهت بردار سرعت بوجود می آید) برابر است با

$$a_r = v^2/r = r\omega^2$$

شکل ها از ویرایش هشتم مبانی فیزیک هالیدی.



یادآوری از فصل چهارم: شتاب مماسی a_t و شتاب شعاعی (مرکزگرا) a_r

شتاب هر حرکت دو بعدی را می توان به دو مولفه مرکزگرا a_r (شتاب شعاعی radial) و مماسی a_t (tangential) تجزیه کرد:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$

شکل بالا را ببینید.

شتاب مرکزگرا، تغییر در جهت بردار سرعت را توصیف می کند:

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

شتاب مرکزگرا a_r بر جهت حرکت عمود است.

شتاب مماسی، تغییر در اندازه بردار سرعت را توصیف می کند:

$$a_t = \frac{d|v|}{dt} = r\alpha$$

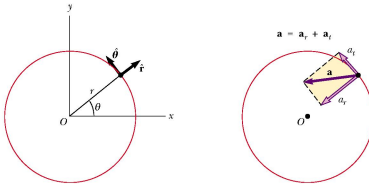
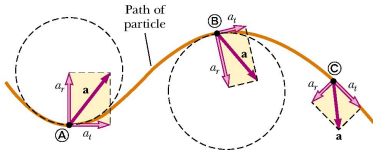
شتاب مماسی a_t در جهت حرکت است.

نوشتن شتاب ها در دستگاه مختصات قطبی (با استفاده از بردارهای یکه قطبی):

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t = -\frac{v^2}{r} \hat{r} + \frac{d|v|}{dt} \hat{\theta}$$

شکل پایین را ببینید.

شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.



نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید نکات اساسی سینماتیک حرکت دورانی را بیان کنید. برای اینکار لازم است بتوانید به سوال های زیر پاسخ دهید:

- ۱ جسم صلب چیست؟
 - ۲ چطور می توان حرکت کلی یک جسم صلب را بررسی کرد؟
 - ۳ واحدهای مشهور اندازه گیری زاویه را نام ببرید.
 - ۴ واحد رادیان برای اندازه گیری زاویه را توضیح دهید. چرا این واحد در فیزیک و ریاضی اهمیت دارد؟
 - ۵ تعریف کمیت های موقعیت زاویه ای، جابه جایی زاویه ای، سرعت زاویه ای متوسط، سرعت زاویه ای لحظه ای، شتاب زاویه ای متوسط و شتاب زاویه ای لحظه ای را بنویسید.
 - ۶ توضیح دهید که چطور می توان با انتگرال گیری از شتاب زاویه ای داده شده، کمیت های سرعت زاویه ای و موقعیت زاویه ای را یافت.
 - ۷ آیا کمیت های زاویه ای بردار هستند؟ چرا؟
 - ۸ روابط اصلی حرکت با سرعت زاویه ای ثابت را بنویسید.
 - ۹ روابط اصلی حرکت با شتاب زاویه ای ثابت را بنویسید.
 - ۱۰ اگر جسم فقط حرکت دورانی داشته باشد، رابطه بین سرعت خطی یک ذره از جسم و سرعت زاویه ای آن چیست؟
 - ۱۱ اگر جسم فقط حرکت دورانی داشته باشد، رابطه بین شتاب مماسی یک ذره از جسم و شتاب زاویه ای آن چیست؟
- اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.



تمرین

● تحلیل حرکت زاویه ای: موقعیت زاویه ای متحرکی بر حسب زمان به صورت زیر داده شده است:

$$\theta(t) = \sin(\pi t) + 3 \cos(\pi t) \quad (rev)$$

الف: سرعت زاویه ای متوسط را در بازه زمانی $t = 1 \text{ s}$ تا $t = 2 \text{ s}$ بیابید.
ب: سرعت زاویه ای لحظه ای در یک زمان دلخواه t را بیابید. سرعت زاویه ای لحظه ای در زمان $t = 1 \text{ s}$ را بیابید.

پ: شتاب زاویه ای متوسط را در بازه زمانی $t = 1 \text{ s}$ تا $t = 2 \text{ s}$ بیابید.
ت: شتاب زاویه ای لحظه ای در یک زمان دلخواه t را بیابید. شتاب زاویه ای لحظه ای در زمان $t = 1 \text{ s}$ را بیابید.

تمرین

چرخ لنگری با شتاب زاویه ای $\alpha(t) = t^{\frac{4}{3}} - t^{\frac{2}{3}} + 1$ در حال دوران است.

الف) اگر سرعت زاویه ای اولیه اش برابر $\omega(t=0) = +5 \text{ rad/s}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $d\omega = \alpha(t)dt$ سرعت زاویه ای را به عنوان تابعی از زمان $\omega(t)$ تعیین کنید.

ب) حال اگر موقعیت زاویه ای اولیه $\theta(t=0) = -2 \text{ rad}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $d\theta = \omega(t)dt$ موقعیت زاویه ای را به عنوان تابعی از زمان $\theta(t)$ تعیین کنید.

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{راهنمایی:}$$

تمرین

جسمی با شتاب زاویه ای $\alpha(t) = \sqrt[3]{t^4} + \sqrt[5]{t^4} - t + 1$ در حال دوران است.

الف) اگر سرعت زاویه ای اولیه اش برابر $\omega(t=0) = +2 \text{ rad/s}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $d\omega = \alpha(t)dt$ سرعت زاویه ای را به عنوان تابعی از زمان $\omega(t)$ تعیین کنید.

ب) حال اگر موقعیت زاویه ای اولیه $\theta(t=0) = -3 \text{ rad}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $d\theta = \omega(t)dt$ موقعیت زاویه ای را به عنوان تابعی از زمان $\theta(t)$ تعیین کنید.

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{راهنمایی:}$$

تمرین

● جسمی با شتاب زاویه ای $\alpha(t) = t^{\frac{1}{4}} - t^{\frac{1}{3}} - 2$ در حال دوران است.

الف) اگر سرعت زاویه ای اولیه اش برابر $\omega(t=0) = -2 \text{ rad/s}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $d\omega = \alpha(t)dt$ سرعت زاویه ای را به عنوان تابعی از زمان $\omega(t)$ تعیین کنید.

ب) حال اگر موقعیت زاویه ای اولیه $\theta(t=0) = 1 \text{ rad}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $d\theta = \omega(t)dt$ موقعیت زاویه ای را به عنوان تابعی از زمان $\theta(t)$ تعیین کنید.

$$\text{راهنمایی: } \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$$

تمرین

چرخ لنگری با شتاب زاویه ای $\alpha(t) = t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}} + 1$ در حال دوران است.

الف) اگر سرعت زاویه ای اولیه اش برابر $\omega(t=0) = -2 \text{ rad/s}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $d\omega = \alpha(t)dt$ سرعت زاویه ای را به عنوان تابعی از زمان $\omega(t)$ تعیین کنید.

ب) حال اگر موقعیت زاویه ای اولیه $\theta(t=0) = +3 \text{ rad}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $d\theta = \omega(t)dt$ موقعیت زاویه ای را به عنوان تابعی از زمان $\theta(t)$ تعیین کنید.

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{راهنمایی:}$$

مبحث بعدی: دینامیک دورانی



- تا اینجا دوران یک تک نقطه از جسم صلب را بررسی کردیم. در ادامه، جسم صلب را به عنوان یک مجموعه ذره بررسی خواهیم کرد. برای اینکار نیاز داریم که با مفهوم لختی دورانی آشنا شویم. پس از درک این مفهوم، بالاخره قانون دوم نیوتن در حالت دورانی را خواهیم نوشت.

- همچنین متوجه می شویم که دینامیک حرکت های دورانی، از لحاظ ریاضیاتی، بسیار شبیه به دینامیک حرکت های خطی است.

- شکل از مبانی فیزیک، ویرایش هشتم.

مراجع

- ❶ Halliday, David, Robert Resnick, and Jearl Walker; Fundamentals of physics, 10th edn. John Wiley & Sons, 2014.
- ❷ Halliday, D., R. Resnick, and K. S. Krane. "Physics, 5th edn." (2002).
- ❸ Ohanian, Hans C., and John T. Markert. Physics for engineers and scientists, 3th edn. 2007.
- ❹ Young, Hugh D., Roger A. Freedman, and Albert Lewis Ford. Sears and Zeman-sky's university physics, 13th edn. Pearson education, 2006.

کلاس های درس فیزیک یک دانشگاه صنعتی شریف (مثلا
کلاس درس دکتر محمد رضا اجتهادی و یا دکتر محمود بهمن
آبادی) را می توانید از مرکز آموزش های الکترونیک دانشگاه
صنعتی شریف (و یا حتی از سایت مکتب خونه) دریافت کنید.
<http://ocw.sharif.edu/>

کلاس درس دکتر والتر لوین از دانشگاه MIT در مرکز آموزش های الکترونیک این دانشگاه و یوتیوب:
<https://ocw.mit.edu/index.htm>
<https://www.youtube.com/watch?v=X9c0MRooBzQ>

Lec 01: Units, Dimensions, and Scaling Arguments | 8.01 Classical Mechanics (Walter Lewin)

387,915 views • Dec 9, 2014

[illegible]

با سپاس از توجه شما