

حسابان برای فیزیک

درس ششم: انتگرال های چندگانه در مختصات غیر دکارتی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس برای آشنایی مقدماتی دانشجویان جدیدالورود، که تاکنون با حساب انتگرال آشنا نشده اند، و به جهت کمک به فهم دروس فیزیک مکانیک و فیزیک الکتریسیته و مغناطیس تهیه شده است. این مجموعه درس، از لحاظ گستردگی و دقت در ارائه مفاهیم، قطعاً جایگزین درس ریاضی عمومی نخواهد بود.
- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در پاییز و زمستان سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که، با تلاش بسیار، امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

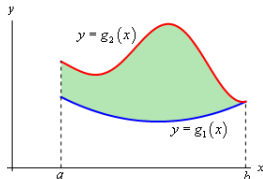
درس ششم: انتگرال های چندگانه در مختصات غیر دکارتی

- انتگرال در مختصات قطبی
- انتگرال در مختصات استوانه ای
- انتگرال در مختصات کروی



یادآوری انتگرال های دوگانه

Case 1



در صورتی که تابع دومتغیره $f(x, y)$ بر روی ناحیه

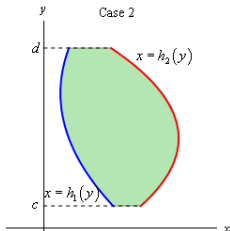
$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

پیوسته باشد، داریم:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

شکل بالا را ببینید.

Case 2



در صورتی که تابع دومتغیره $f(x, y)$ بر روی ناحیه

$$D = \{(x, y) | h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d\}$$

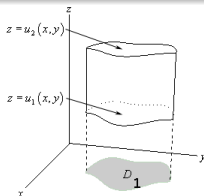
پیوسته باشد، داریم:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

شکل پایین را ببینید.

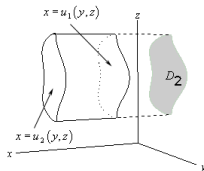
منبع شکل ها: <https://tutorial.math.lamar.edu/>

یادآوری انتگرال های سه گانه

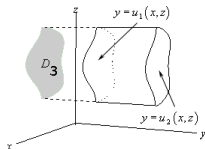


برای پیدا کردن نتیجه یک انتگرال سه گانه، می توان این انتگرال را به یکی از سه روش زیر محاسبه کرد. اساس این روش بر تجزیه ناحیه انتگرال گیری (E) به زیرفضاها (D_1, D_2, D_3) و محاسبه پشت سر هم انتگرال هاست. این محاسبات علی الاصول ممکن (حداقل از نظر عددی)، ولی در عمل بسیار مشکل هستند. چالش اصلی در این محاسبات، همانطور که در درس قبل دیدیم، وارد کردن صحیح حدود هر انتگرال (مرز) است.

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_{D_1} \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$

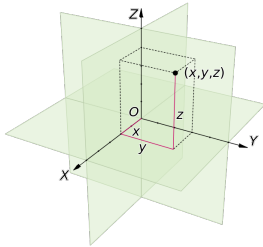


$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_{D_2} \left[\int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dA$$



$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_{D_3} \left[\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dA$$

یادآوری دستگاه مختصات دکارتی



یک نقطه را در دستگاه مختصات دکارتی با سه عدد x, y, z و به صورت (x, y, z) نشان می دهند.

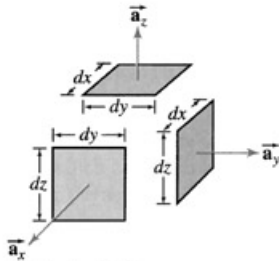
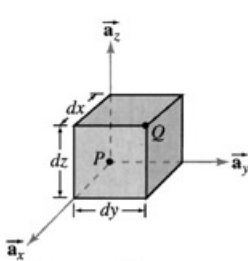
دستگاه مختصات دکارتی سه المان طول $dl_x = dx, dl_y = dy, dl_z = dz$ دارد. شکل پایین را ببینید.

دستگاه مختصات دکارتی سه المان مساحت $dA_{yz} = dydz, dA_{xy} = dxdy, dA_{xz} = dx dz$ دارد (مساحت یک کمیت جهت دار و برداری است!!). شکل پایین را ببینید.

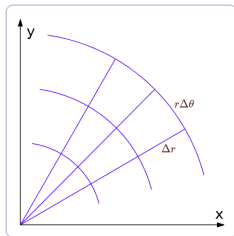
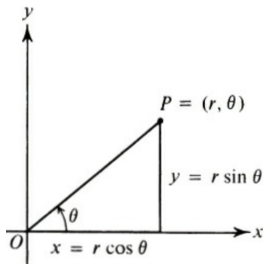
دستگاه مختصات دکارتی یک المان حجم $dxdydz$ دارد. حجم یک کمیت بدون جهت و اسکالر است. شکل پایین را ببینید.

می خواهیم چهار مورد بالا را برای سه نوع دستگاه مختصات مفید دیگر نیز بفهمیم.

شکل ها از ویکی و <https://www.globalspec.com/>.



آشنایی با دستگاه مختصات قطبی



یک نقطه را در دستگاه قطبی با دو عدد r (مولفه شعاعی) و θ (مولفه قطبی یا سمتی) و به صورت (r, θ) نشان می دهند. گاهی اوقات، مولفه سمتی را با ϕ هم نشان می دهند. حدود مولفه های قطبی:

$$0 \leq r < \infty \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

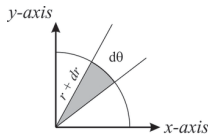
دستگاه مختصات قطبی دو المان طول $dl_r = dr$ و $dl_\theta = r d\theta$ دارد. شکل پایین را ببینید. دستگاه مختصات قطبی یک المان مساحت $dA = r d\theta dr$ دارد. شکل پایین را ببینید.

دستگاه مختصات قطبی المان حجم ندارد. این دستگاه یک دستگاه مختصات دو بعدی است. می توان دستگاه مختصات قطبی را در سه بعد به دستگاه مختصات استوانه ای و دستگاه مختصات کروی تعمیم داد است که در اسلایدهای بعدی با آن ها آشنا خواهیم شد.

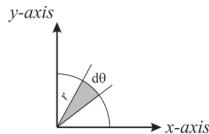
مولفه های قطبی و دکارتی به صورت زیر به هم مربوط می شوند:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

شکل ها از سیلورمن و <https://chem.libretexts.org/>



$$\text{Area} = \pi (r + dr)^2 d\theta / (2\pi)$$

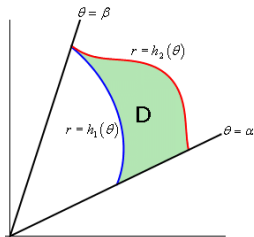


$$\text{Area} = \pi r^2 d\theta / (2\pi)$$



$$\text{Area} \sim r dr d\theta$$

انتگرال دوگانه در دستگاه مختصات قطبی



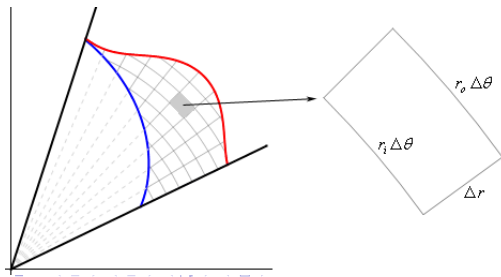
اگر مساله تقارن دایروی داشته باشد، بسیار بهتر است که متغیرهای انتگرال را به متغیرهای قطبی تبدیل کرده و انتگرال را در این دستگاه حل کنیم. دلیل عمده برای این مزیت این است که در صورتی که مساله تقارن دایروی داشته باشد، وارد کردن مرزها در دستگاه مختصات قطبی راحت تر است.

با توجه به شکل مقابل، انتگرال مورد نظر را می توان به صورت زیر تبدیل کرد:

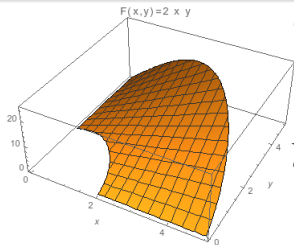
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

به تبدیل شدن المان مساحت $dx dy$ در دستگاه دکارتی به المان مساحت $r dr d\theta$ در دستگاه قطبی دقت کنید.

شکل ها از <https://tutorial.math.lamar.edu/>.



مثال از انتگرال دوگانه در دستگاه مختصات قطبی



انتگرال تابع $F(x, y) = 2xy$ را روی ناحیه ای که در ربع اول بین دایره هایی به شعاع ۲ و ۵ قرار گرفته است محاسبه کنید.

می خواهیم نتیجه انتگرال زیر را بیابیم

$$\iint_D 2xy \, dx \, dy$$

این انتگرال در واقع حجم زیر تابع نشان داده شده در شکل بالاست. در اینجا D ناحیه ای است که در ربع اول بین دایره هایی به شعاع ۲ و ۵ قرار گرفته است. شکل پایین را ببینید. محاسبه این انتگرال در دستگاه دکارتی کار چندان آسانی نیست (امتحان کنید!). ولی در دستگاه قطبی داریم:

$$\iint_D 2xy \, dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_2^5 2(r \cos \theta)(r \sin \theta) r \, dr \, d\theta$$

$$\iint_D 2xy \, dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_2^5 r^3 \sin(2\theta) \, dr \, d\theta$$

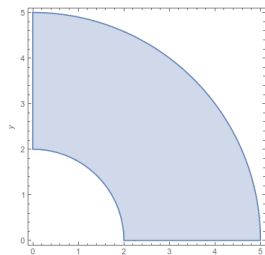
و یا

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left. \frac{1}{4} r^4 \sin(2\theta) \right|_2^5 d\theta$$

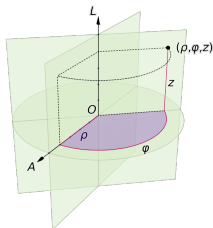
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{609}{4} \sin(2\theta) \, d\theta$$

$$= -\frac{609}{8} \cos(2\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{609}{4}$$



آشنایی با دستگاه مختصات استوانه ای



یک نقطه را در دستگاه استوانه ای با سه عدد ρ (مولفه شعاعی)، ϕ (مولفه سمتی)، z (مولفه عمودی) و به صورت (ρ, ϕ, z) نشان می دهند. حدود مولفه های استوانه ای:

$$0 \leq \rho < \infty \quad 0 \leq \phi < 2\pi \quad -\infty < z < \infty$$

دستگاه مختصات استوانه ای سه المان طول $dl_\rho = d\rho$ ، $dl_\phi = \rho d\phi$ و $dl_z = dz$ دارد. شکل پایین را ببینید.

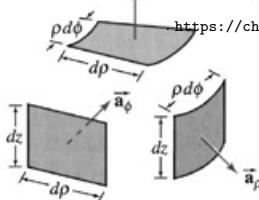
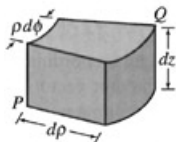
دستگاه مختصات قطبی سه المان مساحت $dA_{\rho\phi} = \rho d\rho d\phi$ و $dA_{z\rho} = dz \rho d\phi$ دارد. شکل پایین را ببینید.

دستگاه مختصات استوانه ای یک المان حجم برابر با $\rho d\rho d\phi dz$ دارد.

مولفه های استوانه ای و دکارتی به صورت زیر به هم مربوط می شوند:

$$x = \rho \cos \phi \quad y = \rho \sin \phi \quad z = z \quad \rho^2 = x^2 + y^2 \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

شکل ها از ویکی و <https://chem.libretexts.org/>



انتگرال سه گانه در دستگاه مختصات استوانه ای

اگر مساله تقارن استوانه ای داشته باشد، بسیار بهتر است که متغیرهای انتگرال را به متغیرهای استوانه ای تبدیل کرده و انتگرال را در این دستگاه حل کنیم. دلیل عمده برای این مزیت این است که در صورتی که مساله تقارن استوانه ای داشته باشد، وارد کردن مرزها در دستگاه مختصات استوانه ای راحت تر است.

فرض کنید که تابع $f(x, y, z)$ بر روی ناحیه $(\text{در اینجا حجم}) E$ زیر تعریف شده است:

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, \quad u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

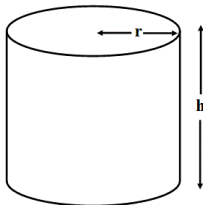
$$= \{(r, \theta, z) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta), \quad u_1(r \cos \theta, r \sin \theta) \leq z \leq u_2(r \cos \theta, r \sin \theta)\}$$

در این صورت می توان انتگرال مورد نظر را در دستگاه مختصات استوانه ای نوشت:

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{u_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} r f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \, dz \, dr \, d\theta$$

به تبدیل شدن المان حجم $dx \, dy \, dz$ در دستگاه دکارتی به المان حجم $\rho d\rho d\phi dz$ در دستگاه استوانه ای دقت کنید.

مثال از انتگرال دوگانه و سه گانه در دستگاه مختصات استوانه ای: حجم و مساحت جانبی استوانه



مساحت جانبی استوانه را بیابید.

پاسخ:
$$\iint \rho \, d\phi \, dz = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{z=0}^{z=h} \rho \, dz \, d\phi$$

که کاملاً جدا پذیر است:

$$\rho \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\phi \int_{z=0}^{z=h} dz = (2\pi\rho)h = 2\pi\rho h$$

سوال: چرا المان سطح $\rho \, d\phi \, dz$ را برای تعیین مساحت جانبی استوانه استفاده کرده ایم؟

حجم درون یک استوانه را بیابید.

پاسخ:
$$\iiint_B \rho \, d\rho \, d\phi \, dz = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=r} \int_{z=0}^{z=h} \rho \, dz \, d\rho \, d\phi$$

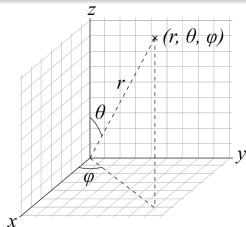
که کاملاً جدا پذیر است:

$$\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\phi \int_{\rho=0}^{\rho=r} \rho \, d\rho \int_{z=0}^{z=h} dz = (2\pi) \left(\frac{r^2}{2} \right) h = \pi r^2 h$$

سوال: حجم و مساحت مقطعی از استوانه، روبه رو به زاویه $\phi = \pi/6$ ، را چگونه به دست آوریم؟

منبع: <https://www.learntocalculate.com/>

آشنایی با دستگاه مختصات کروی



یک نقطه را در دستگاه کروی با سه عدد r (مولفه شعاعی)، θ (مولفه قطبی)، و ϕ (مولفه سمتی) به صورت (r, θ, ϕ) نشان می دهند. حدود مولفه های کروی:

$$0 \leq r < \infty \quad 0 \leq \phi < 2\pi \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

دستگاه مختصات کروی سه المان طول $dl_r = dr$ ، $dl_\theta = r d\theta$ و $dl_\phi = r \sin \theta d\phi$ دارد. شکل پایین را ببینید.

دستگاه مختصات قطبی سه المان مساحت $dA_{r\theta} = r dr d\theta$ و $dA_{\theta\phi} = r^2 \sin \theta d\phi d\theta$ دارد. شکل پایین را ببینید.

دستگاه مختصات کروی یک المان حجم برابر با $r^2 dr \sin \theta d\phi d\theta$ دارد.

نحوه تبدیل مولفه های کروی و دکارتی در زیر آمده است.

شکل ها از ویکی و <https://math.stackexchange.com/>.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

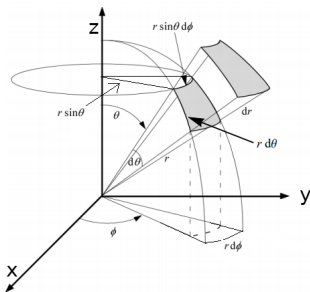
$$\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \arccos \frac{z}{r} = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z},$$

$$\phi = \arctan(y/x).$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi,$$

$$z = r \cos \theta.$$



انتگرال سه گانه در دستگاه مختصات کروی

اگر مساله تقارن کروی داشته باشد، بسیار بهتر است که متغیرهای انتگرال را به متغیرهای کروی تبدیل کرده و انتگرال را در این دستگاه حل کنیم. دلیل عمده برای این مزیت این است که در صورتی که مساله تقارن کروی داشته باشد، وارد کردن مرزها در دستگاه مختصات کروی راحت تر است.

فرض کنید که تابع $f(x, y, z)$ بر روی ناحیه E (در اینجا حجم) زیر تعریف شده است:

$$E : \begin{aligned} a &\leq r \leq b \\ \alpha &\leq \theta \leq \beta \\ \delta &\leq \varphi \leq \gamma \end{aligned}$$

در این صورت می توان انتگرال مورد نظر را در دستگاه مختصات کروی نوشت:

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\delta}^{\gamma} \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b r^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta \, f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$$

به تبدیل شدن المان حجم $dx \, dy \, dz$ در دستگاه دکارتی به المان حجم $r^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta$ در دستگاه کروی دقت کنید.

مثال از انتگرال های دوگانه و سه گانه در دستگاه مختصات کروی: حجم و مساحت کره

مساحت جانبی کره را بیابید.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\phi d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\phi d\theta$$

پاسخ:

که کاملاً جدا پذیر است:

$$r^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = r^2 \times 2\pi \times 2 = 4\pi r^2$$

سوال: چرا المان سطح $r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr$ را برای تعیین مساحت پیرامون کره استفاده کرده ایم؟

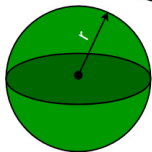
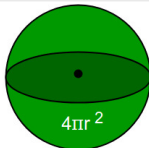
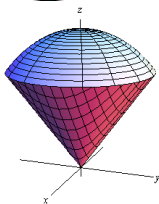
حجم درون یک کره را بیابید.

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr$$

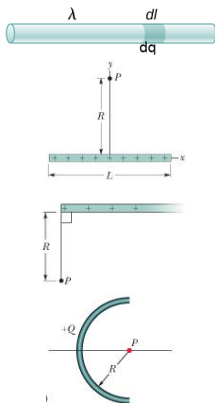
پاسخ:

که کاملاً جدا پذیر است:

$$\int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{R^3}{3} \times 2\pi \times 2 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

سوال: حجم و مساحت مقطعی از کره، روبه رو به زاویه $\theta = \pi/3$ ، را چگونه به دست آوریم؟منبع: <https://www.learntocalculate.com/>Surface
Area of
Sphere $V = 4/3\pi r^3$ 

استفاده از دستگاه های مختصات غیر دکارتی: توزیع خطی بار (یک بعدی)



توزیع خطی (یک بعدی) بار الکتریکی: وقتی بار در یک جهت مشخص فضایی گسترش پیدا کرده و گستردگی بار در دو جهت دیگر ناچیز است.

چگالی خطی میانگین بار: $\bar{\lambda} = \frac{Q}{L}$
که در آن Q بار کل و L طولی است که بار در آن پخش شده است.

مثلا چگالی میانگین بار در پایین ترین شکل برابر است

با $\bar{\lambda} = Q/(\pi R)$ چرا؟

چگالی خطی بار در یک نقطه مشخص:

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad \text{or} \quad dq = \lambda dl$$

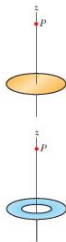
که در آن dq بار المان و dl طولی المان است. به بالاترین شکل دقت کنید.

المان های متفاوت طول در چهار دستگاه مختلف در این درس معرفی شدند. برای محاسبه میدان ناشی از یک توزیع خطی بار، باید یک انتگرال یگانه را محاسبه کنیم.

واحد چگالی خطی بار در SI C/m

شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش دهم و
<https://phys.libretexts.org/>

استفاده از دستگاه های مختصات غیر دکارتی: توزیع سطحی بار (دو بعدی)



شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش دهم و
<https://phys.libretexts.org/>

۱ توزیع سطحی (دو بعدی) بار الکتریکی: وقتی بار در دو جهت مشخص فضایی گسترش پیدا کرده و گستردگی بار در جهت دیگر ناچیز است.

۲ چگالی سطحی میانگین بار: $\bar{\sigma} = \frac{Q}{A}$ که در آن Q بار کل و A مساحتی است که بار در آن پخش شده است.

۳ مثلاً چگالی میانگین بار در پایین ترین شکل برابر است

با $\bar{\sigma} = Q / (\pi(R_2^2 - R_1^2))$. چرا؟ (در اینجا

R_1 شعاع داخلی و R_2 شعاع خارجی است .)

۴ چگالی سطحی بار در یک نقطه مشخص:

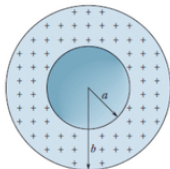
$$\sigma = \frac{dq}{dA} \quad \text{or} \quad dq = \sigma dA$$

که در آن dq بار المان و dA مساحت المان است (شکل بالا).

۵ المان های متفاوت مساحت در چهار دستگاه مختلف در این درس معرفی شدند. برای محاسبه میدان ناشی از یک توزیع سطحی بار، باید یک انتگرال دوگانه را محاسبه کنیم؛ هرچند معمولاً از روش المان ها استفاده کرده و این محاسبه را دور می زنیم.

۶ واحد چگالی سطحی بار (σ) در SI C/m^2

استفاده از دستگاه های مختصات غیر دکارتی: توزیع حجمی بار (سه بعدی)



شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش دهم.

توزیع حجمی (سه بعدی) بار الکتریکی: وقتی بار در هر سه جهت فضایی گسترش پیدا کرده است.

چگالی حجمی میانگین بار: $\bar{\rho} = \frac{Q}{V}$

که در آن Q بار کل و V حجمی است که بار در آن پخش شده است.

مثلا چگالی حجمی میانگین بار در پایین ترین شکل

برابر است با $\bar{\rho} = Q / (\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3))$ چرا؟

چگالی حجمی بار در یک نقطه مشخص:

$$\rho = \frac{dq}{dV} \quad \text{or} \quad dq = \rho dV$$

که در آن dq بار المان و dV حجم المان است (شکل بالا).

المان های متفاوت حجم در چهار دستگاه مختلف در این درس معرفی شدند. برای محاسبه میدان ناشی از یک توزیع حجمی بار، باید یک انتگرال سه گانه را محاسبه کنیم؛ هرچند معمولاً از روش المان ها استفاده کرده و این محاسبه را دور می زنیم.

واحد چگالی حجمی بار (σ) در SI C/m^3

ترفندهای فیزیک: محاسبه میدان یک دیسک باردار بدون انتگرال دوگانه!

سوال: دیسک مقابل به صورت همگن باردار شده است. میدان این دیسک را در نقطه P ، به فاصله z از مرکز دیسک، بیابید. چگالی سطحی بار دیسک برابر σ می باشد.
پاسخ: برای یافتن میدان این قرص باردار باید انتگرال دوگانه زیر را حل کنیم:

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \iint_A \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma(\vec{r}') dA'$$

بنا به تقارن، میدان الکتریکی روی محور z فقط در جهت z خواهد بود. بنابراین باید انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$E_z = 2K\sigma \int_a^b dx' \int_{y'=\sqrt{a^2-x'^2}}^{y'=\sqrt{b^2-x'^2}} \frac{z}{(z^2 + x'^2 + y'^2)^{3/2}} \sigma dy'$$

که در آن a و b به ترتیب شعاع داخلی و خارجی قرص هستند. محاسبه این انتگرال در مختصات دکارتی بسیار چالش برانگیز است!
هرچند، با تبدیل این انتگرال دوگانه به انتگرالی در مختصات استوانه ای، می توان محاسبات را به طرز امیدوار کننده ای راحت تر کرد:

$$E_z = K \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{\rho'=a}^{\rho'=b} \frac{z}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} \rho' d\rho' = 2K\sigma\pi z \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right)$$

ولی به هر حال به کار بردن این روش ها نیاز به درک بسیار دقیق انتگرال های چندگانه در مختصات مختلف دارد که برای دانشجویان سال اول دانشگاه مفروض نیست. بنابراین در درس فیزیک دو ما بر روی روش بسیار ساده تر المان ها تمرکز می کنیم.

برای مقدمه ای بر روش المان ها، که پایه درس فیزیک دو می باشد، به جلسات ابتدایی مجموعه درس های فیزیک الکتریسته و مغناطیس من مراجعه کنید.

شکل از فیزیک هالیدی.



نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید نکات اصلی دستگاه های غیر دکارتی و روش های انتگرال گیری در این دستگاه ها را بیان کنید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

سه المان طول در دستگاه مختصات دکارتی را بنویسید.

سه المان سطح در دستگاه مختصات دکارتی را بنویسید.

المان حجم در دستگاه مختصات دکارتی را بنویسید.

انتگرال های دوگانه و سه گانه در این دستگاه چگونه محاسبه می شوند؟

دو المان طول در دستگاه مختصات قطبی را بنویسید.

المان سطح در دستگاه مختصات قطبی را بنویسید.

انتگرال های دوگانه در دستگاه مختصات قطبی چگونه محاسبه می شوند؟

سه المان طول در دستگاه مختصات استوانه ای را بنویسید.

سه المان سطح در دستگاه مختصات استوانه ای را بنویسید.

المان حجم در دستگاه مختصات استوانه ای را بنویسید.

انتگرال های دوگانه و سه گانه در دستگاه مختصات استوانه ای چگونه محاسبه می شوند؟

سه المان طول در دستگاه مختصات کروی را بنویسید.

سه المان سطح در دستگاه مختصات کروی را بنویسید.

المان حجم در دستگاه مختصات کروی را بنویسید.

انتگرال های دوگانه و سه گانه در دستگاه مختصات کروی چگونه محاسبه می شوند؟

چرا برای محاسبه برخی از انتگرال ها لازم است به سراغ دستگاه های غیر دکارتی برویم؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراوانش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.



تمرین: نتایج زیر را اثبات کنید.

منبع تمرین ها: <https://tutorial.math.lamar.edu/> مختصات قطبی

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \cos(x^2 + y^2) dy dx = \frac{\pi}{2} \sin(1)$$

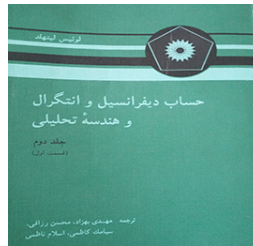
مختصات استوانه ای:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz dz dx dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \int_{r^2}^r r (r \cos \theta) (r \sin \theta) z dz dr d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \int_{r^2}^r z r^3 \cos \theta \sin \theta dz dr d\theta \end{aligned}$$

مختصات کروی:

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} x^2 + y^2 + z^2 dz dx dy = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/2} \int_0^{3\sqrt{2}} \rho^4 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

از منابع اصلی برای یادگیری حسابان استفاده کنید: سیلورمن، توماس، لیتهد، آپوستل.



کلاس درس بسیار جذاب دکتر سیاوش شهشهانی را حتما ببینید!

کلاس درس دکتر سیاوش شهشهانی از دانشگاه صنعتی شریف (برای دروس ریاضی عمومی) را می توانید از آپارات و همچنین مرکز آموزش های آزاد دانشگاه صنعتی شریف دریافت کنید.
<http://ocw.sharif.edu/courses>



+ بارگذاری ویدیو



جستجوی ویدیوهای رویدادهای شخصیت ها و ...

۶۶



ریاضی ۱
احسان ۱۸/۱

ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشهانی -
دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۱

احسان



ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشهانی -
دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۲

احسان



ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشهانی -
دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۴

احسان

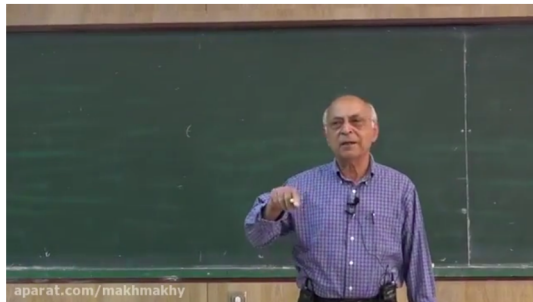


ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشهانی -
دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۵

احسان



ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشهانی -



aparat.com/makhmakhy



بخش خودکار

ویدیوهای مشابه

۷,۵۰۸

ریاضی عمومی ۱ - سیاوش شهشهانی - دانشگاه صنعتی شریف - جلسه ۱

رنه برتر کنکور ارشد کامپیوتر (دانشجو ارشد
دانشگاه صنعتی شریف)



+ دنبال کردن



۴۳

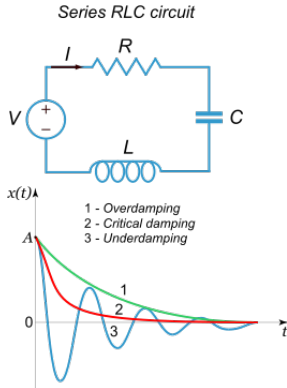


احسان



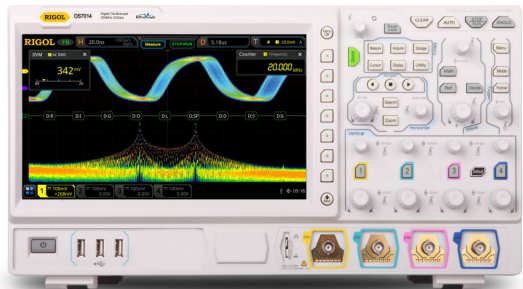
۴۴ دنبال کننده

مبحث بعدی: مقدمه ای بر معادلات دیفرانسیل خطی در فیزیک



رفتار وابسته به زمان بسیاری از سیستم ها در فیزیک، به ویژه سیستم های الکترومغناطیسی، توسط معادلات دیفرانسیل توصیف می شود. بنابراین، برای فهم پدیده های مزبور، باید تا حدی با نظریه معادلات دیفرانسیل آشنا باشیم. در جلسه آینده به مقدمات این نظریه خواهیم پرداخت.

شکا، ها؛ <https://www.math24.net/>



منابع درس

❶ <https://tutorial.math.lamar.edu/>

❷ https://www.whitman.edu/mathematics/calculus_online/

با سپاس از توجه شما