

فیزیک الکتریسیته و مغناطیس

فصل چهارم: پتانسیل الکتریکی و انرژی پتانسیل الکتریکی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در بهار سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که با تلاش بسیار امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

• خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که با تلاش بسیار امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

۱ ● فصل چہارم: پتانسیل الکتریکی و انرژي پتانسیل الکتریکی

- محاسبه میدان از پتانسیل
- پتانسیل توزیع بارهای پیوسته
- پتانسیل یک رسانای باردار

یادآوری



اگر کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ به مسیر انجام کار بستگی نداشته باشد، آنگاه آن نیرو را پایستار می نامیم. می توان برای نیروهای پایستار یک انرژی پتانسیل یکتا تعریف کرد:

$$\Delta U = U_b - U_a \equiv W_{ab} = - \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

نیروی الکتریکی پایستار است؛ بنابراین، انرژی پتانسیل الکتریکی داریم.

رابطه بین انرژی پتانسیل الکتریکی و پتانسیل الکتریکی

پتانسیل الکتریکی یک بار نقطه ای

$$V = K \frac{q}{r}$$

پتانسیل الکتریکی با استفاده از میدان:

$$V_P = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

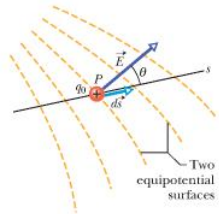
اصل برهمه‌نی

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0}$$

انرژی پتانسیل الکتریکی بین دو بار نقطه ای

$$U = K \frac{q_1 q_2}{r}$$

محاسبه میدان از پتانسیل



با توجه به رابطه

$$V_P = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

می توان به راحتی دید که پتانسیل V تابع اولیه میدان E می باشد.

می توان به صورت معکوس عمل کرده و میدان را از پتانسیل به دست آورد. با توجه به شکل مقابل، و از رابطه $\Delta U = -\vec{F} \cdot d\vec{s}$ می توان به راحتی دید که

$$q_0 dV = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 E ds \cos \theta$$

و یا

$$E \cos \theta = - \frac{dV}{ds}$$

از آنجایی که کمیت $E \cos \theta$ در جهت بردار $d\vec{s}$ می باشد (به شکل مقابل دقت کنید)، می توان نوشت:

$$E_s = - \frac{\partial V}{\partial s}$$

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش دهم.

مشتق جهتی، مشتق ضمنی و یا جزئی هم گفته می شود.

پس میدان در راستای x برابر است با $E_x = - \frac{\partial V}{\partial x}$ و ...

بنابراین بردار میدان الکتریکی را می توان به صورت زیر از پتانسیل پیدا کرد:

$$\vec{E} = \left(- \frac{\partial V}{\partial x}, - \frac{\partial V}{\partial y}, - \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

که در آن $\frac{\partial}{\partial s}$ نشان دهنده مشتق جهتی در راستای s می باشد.

یادآوری مشتق جهتی (ضمنی)

۱ برای محاسبه مشتق ضمنی در هر جهتی، مقادیر متغیرهای دیگر را ثابت فرض می‌کنیم.

۲ مثلاً، فرض کنید که تابع پتانسیل به صورت زیر به مختصات فضا مرتبط است:

$$V(x, y, z) = 3x^2y^3z + xz + 5$$

بنابراین می‌توان مولفه میدان در جهت x را به صورت زیر به دست آورد:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -(6xy^3z + z)$$

یعنی x را متغیر فرض کرده و پارامترهای y و z را به عنوان ثابت در نظر گرفته ایم.

۳ تمرین: مولفه‌های میدان E_y و E_z را به همین ترتیب یافته و نشان دهید که میدان الکتریکی به صورت زیر است:

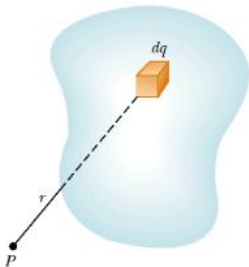
$$\vec{E} = -(6xy^3z + z)\hat{i} - (9x^2y^3z)\hat{j} - (3x^2y^3 + x)\hat{k}$$

جمع بندی روابط اساسی تاکنون

$$\begin{array}{ccccc}
 |\vec{F}| = k \frac{q_0 q}{r^2} & \xleftrightarrow[\vec{F} = q_0 \vec{E}]{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}} & |\vec{E}| = k \frac{q}{r^2} \\
 \downarrow \Delta U = - \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s} & & \downarrow \Delta V = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} \\
 F_s = - \frac{\partial U}{\partial s} & \boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}} & E_s = - \frac{\partial V}{\partial s} \\
 \downarrow \Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} & & \downarrow \\
 U = k \frac{q q_0}{r} & \xleftrightarrow[\Delta U = q_0 \Delta V]{\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0}} & V = k \frac{q}{r}
 \end{array}$$

پتانسیل توزیع بارهای پیوسته – روش کلی

می خواهیم پتانسیل ناشی از یک توزیع بار دلخواه (مثل شکل مقابل) را در نقطه P بیابیم.



۱ تا اینجا ما فقط پتانسیل ناشی از بارهای نقطه ای را می دانیم.

۲ در حالت کلی می توان هر توزیع بار دلخواه را به تعداد بسیار زیادی

بار نقطه ای dq تجزیه کرد. پتانسیل یک بار نقطه ای dq در نقطه

۳ P برابر است با $dV = K \frac{dq}{r}$.

حال با توجه به اصل برهمه‌نی می توان فهمید که پتانسیل ناشی از کل توزیع بار برابر است با جمع تک تک پتانسیل ها:

$$V = K \int \frac{dq}{r}$$

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

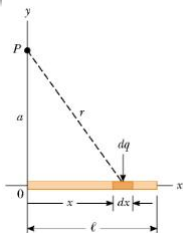
جمع بندی در اینجا به معنی انتگرال گیری است.

۴ باز هم محاسبه انتگرال بالا در حالت کلی ساده نخواهد بود. بنابراین

باید از روش المان ها استفاده کنیم.

۵ به مثال های زیر دقت کنید

مزیت مهم: پتانسیل جهت ندارد.

مثال: پتانسیل ناشی از یک میله باردار با چگالی بار ثابت λ 

پتانسیل میله را نمی دانیم؛ ولی می دانیم که پتانسیل بار نقطه ای dq نشان داده شده در شکل برابر است با

$$dV = K \frac{dq}{r}$$

که در آن $dq = \lambda dx$ همان بار است در حالی که $\sqrt{a^2 + x^2}$ فاصله همان تا نقطه مشاهده است.

برای پیدا کردن پتانسیل کل باید از طرفین رابطه $dV = K \frac{dq}{r}$ انتگرال بگیریم:

$$\int_0^V dV = \int_0^l K \frac{\lambda dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$V = K\lambda \left[\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) \right]_0^l$$

شکل از فیزیک هالیدی، ویرایش پنجم.
با جایگذاری حدود انتگرال داریم:

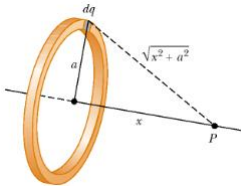
$$V = K\lambda \ln \left(\frac{l + \sqrt{a^2 + l^2}}{a} \right)$$

تمرین: نشان دهید که پتانسیل میله در نقاط بسیار دور، یعنی $a \gg l$ ، به صورت $V = KQ/a$ تغییر می کند که $Q = \lambda l$ بار کل میله است.

فرض کنید که $y = a$ ، میدان در جهت y ، یعنی E_y را با مشتق گیری پیدا کنید.

تمرین: انتگرال بالا را با استفاده از تغییر متغیر $x = a \tan \theta$ اثبات کنید.

دقت کنید که در به دست آوردن این نتایج، اصلاً لازم نبود به جهت کمیت ها توجه کنیم. این نکته اهمیت استفاده از کمیت های اسکالر را به ما نشان می دهد.

مثال: پتانسیل ناشی از یک حلقه باردار با چگالی بار خطی ثابت λ 

پتانسیل حلقه را نمی دانیم؛ ولی می دانیم که پتانسیل بار نقطه ای dq نشان داده شده در شکل برابر است با

$$dV = K \frac{dq}{r}$$

که در آن $dq = \lambda dx$ المان بار است در حالی که $r = \sqrt{a^2 + x^2}$ فاصله المان تا نقطه مشاهده است.

برای پیدا کردن پتانسیل کل باید از طرفین رابطه $dV = K \frac{dq}{r}$ انتگرال بگیریم:

$$\int_0^V dV = \int_0^s K \frac{\lambda ds}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$V = K \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + x^2}} [s]_0^s = K \frac{\lambda s}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

که در آن s محیط حلقه است. بنابراین $Q = \lambda s$ بار کل حلقه می باشد:

$$V = K \frac{Q}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

شکل از فیزیک هالیدی، ویرایش پنجم.

تمرین: نشان دهید که پتانسیل حلقه در نقاط بسیار دور، یعنی $a \gg x$ ، به صورت $V \propto Q/x$ تغییر می کند.

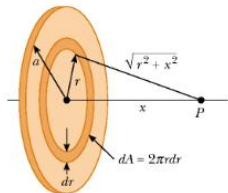
تمرین: میدان روی محور x را با استفاده از رابطه

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

به دست آورید. نتیجه را با جواب به دست آمده در فصل دوم برای میدان یک حلقه باردار مقایسه کنید.

نکته مهم: با دانستن پتانسیل حلقه می توان پتانسیل دیسک را پیدا کرد.

مثال: پتانسیل یک دیسک باردار با چگالی سطحی بار ثابت σ



شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

$$V = 2K\pi\sigma \left(\sqrt{x^2 + a^2} - x \right)$$

تمرین: میدان روی محور x را با استفاده از رابطه

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

به دست آورید. نتیجه را با جواب به دست آمده در فصل دوم برای میدان یک حلقه باردار مقایسه کنید.

پتانسیل دیسک را نمی دانیم. ولی می دانیم که دیسک مورد نظر از تعداد بسیار زیادی حلقه باردار تشکیل شده و پتانسیل حلقه باردار را نیز می دانیم (از مثال قبل). شکل مقابل را ببینید.

اگر بار حلقه دیفرانسیلی را با dq نشان داده و شعاع آن را r فرض کنیم، آنگاه پتانسیل ناشی از این حلقه در فاصله x از مرکز آن برابر است با

$$dV = K \frac{dq}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

که در آن $dq = \sigma dA$ بار المان حلقوی است.

برای پیدا کردن پتانسیل کل باید سهم همه حلقه ها را پیدا کرده و با هم جمع ببندیم (یادمان باشد که جمع بندی در مسائل پیوسته به معنی انتگرال گیری است):

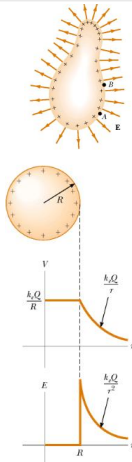
$$\int_0^V dV = K \int \frac{\sigma dA}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

در فصل دوم دیدیم که المان مساحت حلقه برابر است با $dA = 2\pi r dr$:

$$V = K\pi\sigma \int_0^a \frac{2r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

تمرین: انتگرال اخیر را می توان با تغییر متغیر $u = r^2 + x^2$ حل کرد. نشان دهید که جواب به صورت مقابل است $\Leftarrow \Leftarrow \Leftarrow$.

تغییرات پتانسیل در حضور رسانا



با توجه به اینکه میدان درون یک رسانا صفر است، و میدان مشتق پتانسیل می باشد $E_s = -\partial V / \partial s$ ، بنابراین باید پتانسیل درون رسانا یک عدد ثابت باشد.

مثال: پتانسیل درون و برون یک رسانای باردار کروی را بیابید.

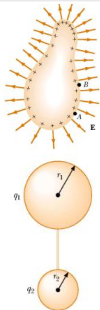
پتانسیل برون این کره توسط تابع $V = KQ/r$ نشان داده می شود. دلیل: قضیه های پوستر.

با توجه به اینکه پتانسیل یک تابع پیوسته است (چرا؟) مقدار آن درون کره باید با مقدار آن بر روی کره، یعنی $V = KQ/R$ برابر باشد. نمودارهای مقابل را ببینید.

میدان لزوماً یک تابع پیوسته نیست.

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

رفتار چگالی سطحی بار و میدان روی رساناها



۱ بار بر روی رساناهای کروی به صورت همگن پخش می شود.

۲ ولی اگر رسانایی دارای نقاط نوک تیز باشد، آنگاه چگالی سطحی بار و میدان در نقاط تیز تر می تواند بسیار بیشتر از نقاط دیگر باشد.

۳ اثبات: تقریب مقابل (شکل پایین) را در نظر بگیرید. دو کره توسط یک سیم رسانا به هم متصل و بنابراین هم پتانسیل اند. پس داریم:

$$V = \frac{Kq_1}{r_1} = \frac{Kq_2}{r_2} \Rightarrow \Rightarrow \frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2}$$

۴ می توان از نتیجه اخیر برای پیدا کردن نسبت چگالی های سطحی و میدان ها استفاده کرد:

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

۱ بنابراین میدان و چگالی سطحی کره کوچکتر بزرگتر از میدان و چگالی سطحی کره بزرگتر هستند.

۲ به همین ترتیب میدان و چگالی سطحی نقاط نوک تیز تر بزرگتر از میدان و چگالی سطحی نقاط پهن تر هستند.

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\frac{q_1}{4\pi r_1^2}}{\frac{q_2}{4\pi r_2^2}} = \frac{q_1 r_2^2}{q_2 r_1^2} = \frac{r_2}{r_1}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{K \frac{q_1}{r_1^2}}{K \frac{q_2}{r_2^2}} = \frac{q_1 r_2^2}{q_2 r_1^2} = \frac{r_2}{r_1}$$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید ویژگی های مهم پتانسیل الکتریکی و انرژی پتانسیل الکتریکی را بیان کنید. برای اینکار لازم است بتوانید به سوال های زیر پاسخ دهید:

- ۱ چگونه می توان میدان را از پتانسیل به دست آورد.
- ۲ پتانسیل سیستم های پیوسته در نقاط دوردست چطور با فاصله چگونه است؟
- ۳ اساس روش المان ها برای پیدا کردن پتانسیل سیستم های پیوسته را شرح دهید.
- ۴ چگونه می توان مشتق ضمنی یک تابع چند متغیره را محاسبه کرد؟
- ۵ چرا پتانسیل درون یک رسانا (در حالت تعادل) مقداری ثابت است؟
- ۶ چرا مقدار چگالی سطحی و میدان در نزدیکی نقاط نوک تیزتر رسانا بزرگتر است؟

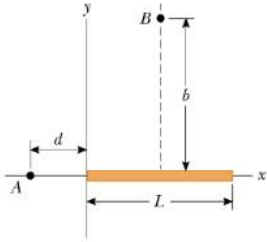
اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای جذب مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل مسائل زیر محک زده و تقویت کنید.



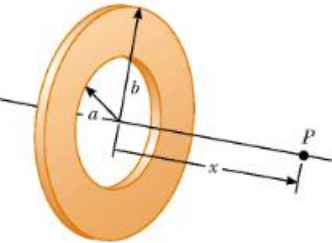
تمرین

در شکل مقابل، بار با چگالی خطی ثابت $\lambda = Q/L$ بر روی میله نارسانا پخش شده است.
الف) پتانسیل در نقطه A را بیابید.
ب) پتانسیل در نقطه B را بیابید.



شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

تمرین

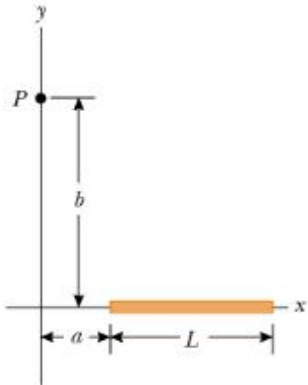


پتانسیل الکتریکی یک دیسک توخالی:
در شکل مقابل، بار الکتریکی با چگالی سطحی
یکنواخت σ روی دیسک توخالی پخش شده
است.
الف) پتانسیل الکتریکی را در نقطه P بیابید.
ب) با استفاده از رابطه

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

میدان را روی محور x بیابید.

تمرین



در شکل مقابل، بار با چگالی خطی ثابت $\lambda = Q/L$ بر روی میله نارسانا پخش شده است.
پتانسیل در نقطه P را بیابید.
شکل از هالیدی، ویرایش هشتم.

مبحث بعدی: خواص الکتریکی مواد

- در فصل بعد ویژگی های الکتریکی مواد مختلف – رساناها، نارساناها، نیم رساناها و ابررساناها – را به اختصار بررسی خواهیم کرد.

مراجع

- ❶ Halliday, D., R. Resnick, and K. S. Krane. "Physics, 5th edn." (2002).
- ❷ Halliday, David, Robert Resnick, and Jearl Walker; Fundamentals of physics, 10th edn. John Wiley & Sons, 2014.
- ❸ Ohanian, Hans C., and John T. Markert. Physics for engineers and scientists, 3th edn. 2007.
- ❹ Young, Hugh D., Roger A. Freedman, and Albert Lewis Ford. Sears and Zeman-sky's university physics, 13th edn. Pearson education, 2006.

با سپاس از توجه شما