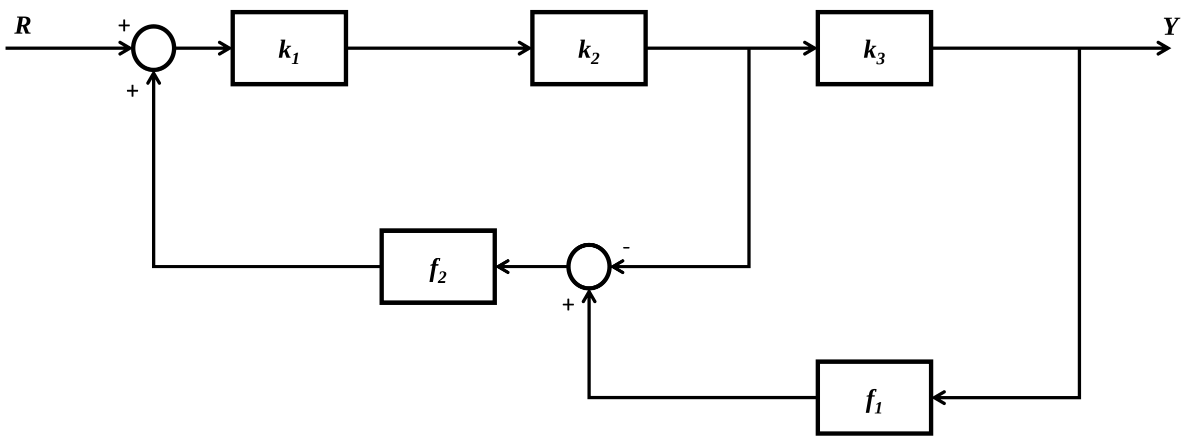
Midterm exam of Modern Control Engineering		University of Hormozgan
Name:	2021-2022-2	Dr. Mohammad Hosseini
Time: 120 min		Department of Mechanical Engineering

۱- تابع تبدیل نمودار بلوکی زیر را محاسبه کنید.

الف: با استفاده از روش نامگذاری (۱۵ نمره)،

ب: با استفاده از روش میسون (۱۰ نمره).



۲- یک سیستم توسط رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u$$

در جایی که:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = 0$$

با شرایط اولیه:

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = -1$$

پاسخ سیستم را به ورودی ***پله واحد*** به دست آورید (۳۵ نمره).

۳- با فرض اینکه تابع تبدیل حلقه بسته سیستم به صورت زیر باشد، پاسخ سیستم زیر را به ورودی ***پله واحد*** به دست آورید (۴۰ نمره).

$$\text{TF} = \frac{12s + 8}{s^2 + 6s + 8}$$

Midterm exam of Modern Control Engineering		University of Hormozgan
Name:	2021-2022-2	Dr. Mohammad Hosseini
Time: 120 min		Department of Mechanical Engineering

خواص تبدیل لاپلاس			زوج های تبدیل لاپلاس	
خاصیت	$f\,(t)$	$F(s)$	$f\,(t)$	$F(s)$
خطی بودن	$a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s)+a_2 F_2(s)$	$S(t)$	1
تغییر مقیاس	$f(at)$	$\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
انتقال زمان	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
انتقال فرکانس	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$	t	$\frac{1}{s^2}$
مشتقگیری در زمان	$\frac{df}{dt}$	$SF(s)-f(0^-)$	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
	$\frac{df^2}{d^2t}$	$s^2 f(s)-sf(0^-)-f'(0^-)$	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
	$\frac{d^3 f}{dt^3}$	$s^3F(s)-s^2 f(0^-)-sf'(0^-)-f''(0^-)$	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
	$\frac{df^n}{d^nt}$	$s^n f(s)-s^{n-1}f(0^-)-.....f^{(n-1)}(0^-)$	$\sin wt$	$\frac{w}{s^2+w^2}$
انتگرالگیری در زمان	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{1}{s}F(s)$	$\cos wt$	$\frac{s}{s^2+w^2}$
مشتقگیری در فرکانس	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds}F(s)$	$\sin(wt+\theta)$	$\frac{s\sin\theta+w\cos\theta}{s^2+w^2}$
انتگرالگیری در فرکانس	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty f(s)d(s)$	$\cos(wt+\theta)$	$\frac{s\cos\theta-w\sin\theta}{s^2+w^2}$
تناوب زمانی	$f(t)=f(t+T)$	$\frac{F_1 s}{1-e^{-Ts}}$	$e^{-at}\sin wt$	$\frac{w}{(s+a)^2+w^2}$
قضیه مقدار اولیه	$f(0^+)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$	$e^{-at}\cos wt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w^2}$
قضیه مقدار نهایی	$f(\infty)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$		
کانولوشن	$f(t)\times f2(t)$	$F_1(s).F_2(s)$		

Midterm exam of Modern Control Engineering		University of Hormozgan
Name:	2021-2022-2	Dr. Mohammad Hosseini
Time: 120 min		Department of Mechanical Engineering

جواب سوال 1

$X_1 = R + X_6$ (1)

$X_2 = k_1 X_1 = k_1 (R + X_6)$ (2)

$X_3 = k_2 X_2 = k_1 k_2 (R + X_6)$ (3)

$y = k_3 X_3 = k_1 k_2 k_3 (R + X_6)$ (4)

$X_4 = f_1 y = k_1 k_2 k_3 f_1 (R + X_6)$ (5)

$X_5 = -X_3 + X_4 = k_1 k_2 (R + X_6)(f_1 k_3 - 1)$ (6)

$X_6 = f_2 X_5 = k_1 k_2 f_2 (R + X_6)(f_1 k_3 - 1)$ (7) $\Rightarrow$

$X_6 = k_1 k_2 f_2 (f_1 k_3 - 1) X_6 + k_1 k_2 f_2 (f_1 k_3 - 1) R \Rightarrow k_1 k_2 f_2 (f_1 k_3 - 1) R = [-k_1 k_2 f_2 (f_1 k_3 - 1) + 1] X_6$

$$\Rightarrow X_6 = \frac{k_1 k_2 f_2 (f_1 k_3 - 1)}{-k_1 k_2 f_2 (f_1 k_3 - 1) + 1} R$$ (8) $\Rightarrow$

(8) into (4) $\Rightarrow y = k_1 k_2 k_3 R \left(1 + \frac{k_1 k_2 f_2 (f_1 k_3 - 1)}{1 - k_1 k_2 f_2 (f_1 k_3 - 1)}\right) \Rightarrow$

$$\frac{Y}{R} = TF = k_1 k_2 k_3 \left(1 + \frac{k_1 k_2 f_2 (f_1 k_3 - 1)}{1 - k_1 k_2 f_2 (f_1 k_3 - 1)}\right) \Rightarrow \boxed{TF = \frac{k_1 k_2 k_3}{1 - k_1 k_2 f_2 (f_1 k_3 - 1)}}$$

میسون

$P_1 = k_1 k_2 k_3 \ , \ \Delta_1 = 1 \ , \ \Delta = 1 - [\overbrace{-k_1 k_2 f_2 + k_1 k_2 k_3 f_1 f_2}^{k_1 k_2 f_2 (f_1 k_3 - 1)}]$

$$TF = \frac{\sum P_i \Delta_i}{\Delta} = \frac{k_1 k_2 k_3 \times 1}{1 - k_1 k_2 f_2 (f_1 k_3 - 1)}$$

Midterm exam of Modern Control Engineering		University of Hormozgan
Name:	2021-2022-2	Dr. Mohammad Hosseini
Time: 120 min		Department of Mechanical Engineering

ب سوال ۲

محل مهر آموزش

$$sI - A = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A]^{-1} = \frac{1}{\underbrace{s(s+4)+3}_{(s+3)(s+1)}} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{[sI - A]^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{s+4}{(s+3)(s+1)} & \frac{1}{(s+3)(s+1)} \\ \frac{-3}{(s+3)(s+1)} & \frac{s}{(s+3)(s+1)} \end{bmatrix}\right\}$$

$$x(t) = \Phi(t)\,x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau) B u(\tau)\, d\tau$$

$$X(s) = \cancel{\left[C[sI-A]^{-1}B + D\right] U(s)} \quad X(s) = [sI - A]^{-1} x(0) + [sI - A]^{-1} B\, U(s)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+4}{(s+3)(s+1)} & \frac{1}{(s+3)(s+1)} \\ \frac{-3}{(s+3)(s+1)} & \frac{s}{(s+3)(s+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+4}{(s+3)(s+1)} & \frac{1}{(s+3)(s+1)} \end{bmatrix}$$

$$C[sI - A]^{-1} B = \begin{bmatrix} \frac{s+4}{(s+3)(s+1)} & \frac{1}{(s+3)(s+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+3)(s+1)} \end{bmatrix}$$

Midterm exam of Modern Control Engineering		University of Hormozgan
Name:	2021-2022-2	Dr. Mohammad Hosseini
Time: 120 min		Department of Mechanical Engineering

ادامه جواب سوال ۲

$$\frac{s+4}{(s+3)(s+1)} = \frac{A_1}{s+3} + \frac{B_1}{s+1} \Rightarrow s+4 = A_1 s + A_1 + B_1 s + 3B_1 = (A_1+B_1)s + (A_1+3B_1)$$

$$\begin{cases} A_1+B_1=1 \\ A_1+3B_1=4 \end{cases} \Rightarrow 2B_1=3 \Rightarrow B_1=\frac{3}{2} \Rightarrow A_1=-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{s+4}{(s+3)(s+1)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{s+3} + \frac{3}{2}\frac{1}{s+1}$$

$$\frac{1}{(s+3)(s+1)} = \frac{A_2}{s+3} + \frac{B_2}{s+1} \Rightarrow 1 = (A_2+B_2)s + (A_2+3B_2) \Rightarrow \begin{cases} A_2+B_2=0 \\ A_2+3B_2=1 \end{cases}$$

$$2B_2=1 \Rightarrow B_2=\frac{1}{2} \Rightarrow A_2=-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{(s+3)(s+1)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{s+3} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1}$$

$$\frac{-3}{(s+3)(s+1)} = \frac{3}{2}\frac{1}{s+3} - \frac{3}{2}\frac{1}{s+1}$$

$$\frac{s}{(s+3)(s+1)} = \frac{A_3}{s+3} + \frac{B_3}{s+1} \Rightarrow \begin{cases} A_3+B_3=1 \\ A_3+3B_3=0 \end{cases} \Rightarrow 2B_3=-1 \Rightarrow B_3=-\frac{1}{2}$$

$$A_3=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{s}{(s+3)(s+1)} = \frac{3}{2}\frac{1}{(s+3)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)},$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{3}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{3}{2}e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-t} & \frac{3}{2}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) B u(\tau) d\tau \Rightarrow$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{3}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{3}{2}e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-t} & \frac{3}{2}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$+ \int_0^t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-3(t-\tau)} + \frac{3}{2}e^{-(t-\tau)} & -\frac{1}{2}e^{-3(t-\tau)} + \frac{1}{2}e^{-(t-\tau)} \\ \frac{3}{2}e^{-3(t-\tau)} - \frac{3}{2}e^{-(t-\tau)} & \frac{3}{2}e^{-3(t-\tau)} - \frac{1}{2}e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1 \, d\tau$$

Midterm exam of Modern Control Engineering		University of Hormozgan
Name:	2021-2022-2	Dr. Mohammad Hosseini
Time: 120 min		Department of Mechanical Engineering

جواب سوال ۳

$$TF = \frac{Y}{R} = \frac{12s+8}{s^2+6s+8}, \quad R = \frac{1}{s} \Rightarrow Y = \frac{12s+8}{(s^2+6s+8)} \times \frac{1}{s} = \frac{12s+8}{(s+2)(s+4)s}$$

$$Y = \frac{12s+8}{s(s+2)(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4} \Rightarrow$$

$$12s+8 = (As^2+6As+8A)+(Bs^2+4Bs)+(Cs^2+2Cs) \Rightarrow$$

$$12s+8 = (A+B+C)s^2+(6A+4B+2C)s+8A \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 8A=8 \\ 6A+4B+2C=12 \\ A+B+C=0 \end{cases} \Rightarrow 8A=8 \Rightarrow \boxed{A=1}, \quad \Rightarrow \begin{cases} 4B+2C=6 \\ B+C=-1 \end{cases} \Rightarrow 2B = \begin{cases} 2B=8 \Rightarrow \boxed{B=4} \\ 2C=-10 \Rightarrow \boxed{C=-5} \end{cases}$$

$$Y = \frac{12s+8}{s(s+2)(s+4)} = \frac{1}{s} + \frac{4}{s+2} + \frac{(-5)}{s+4} = \frac{1}{s} + 4 \times \frac{1}{s+2} + (-5)\frac{1}{s+4}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{y(t) = 1 + 4e^{-2t} - 5e^{-4t}}$$

ادامه جواب سوال 2

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-3(t-\tau)} + \frac{1}{2}e^{-(t-\tau)} \\ \frac{3}{2}e^{-3(t-\tau)} - \frac{1}{2}e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \\ -\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{cases} x_1(t) \\ x_2(t) \end{cases}$$

$$y(t) = Cx + DU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \\ -\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t}$$