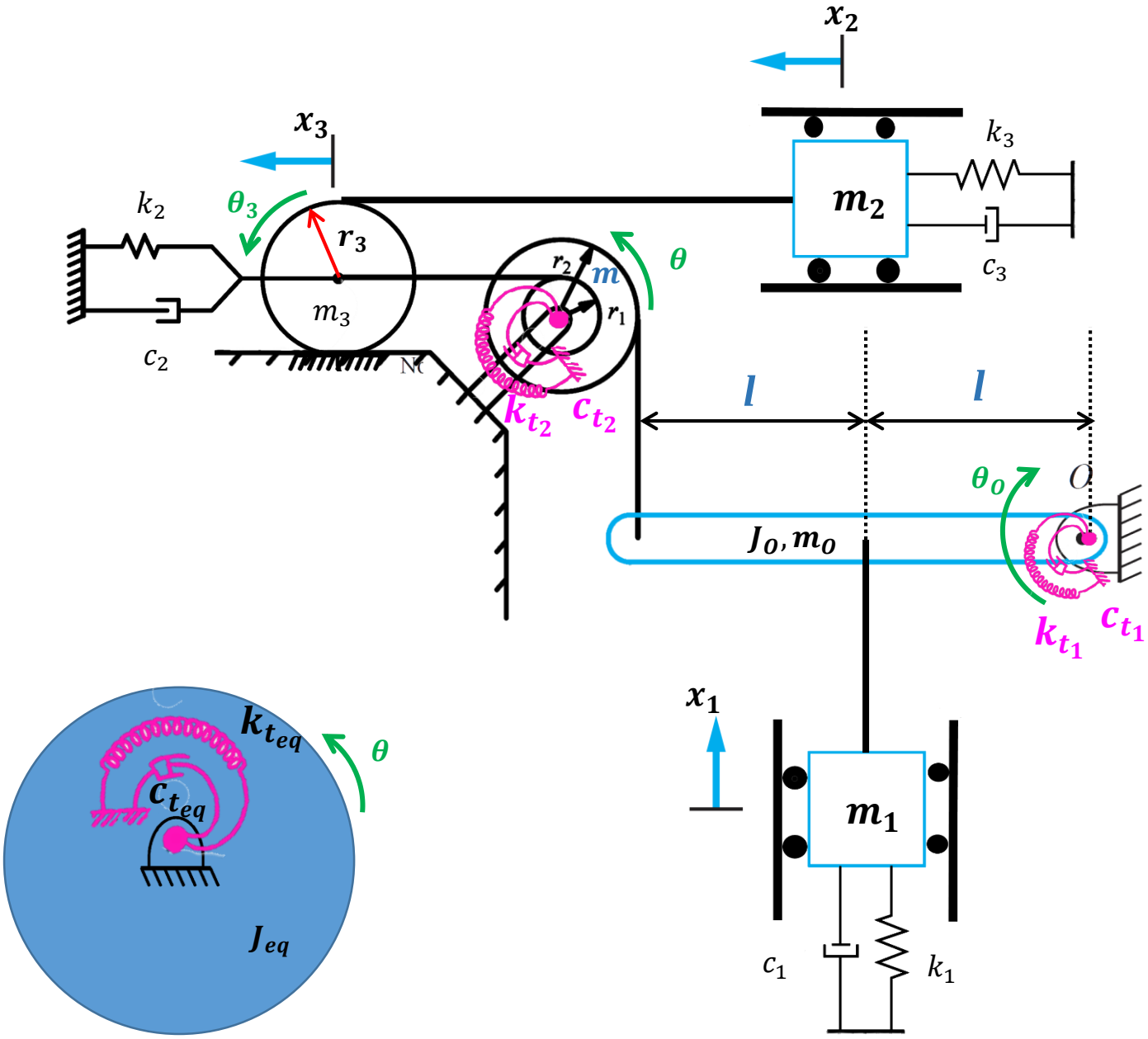


۱- در سیستم نشان داده شده در شکل ممان اینرسی جرمی معادل، فنر پیچشی معادل و دمپر پیچشی معادل را در راستای θ بر حسب پارامترهای نشان داده شده در شکل محاسبه کنید.

ممان اینرسی جرمی معادل، فنر پیچشی معادل و دمپر پیچشی معادل را در راستای θ را برای مقادیر زیر محاسبه کنید.

معادله حرکت سیستم را بنویسید.

فرکانس طبیعی (ω_n) سیستم را محاسبه کنید.

نسبت میرایی (ζ) را محاسبه کنید.

تمامی مراحل حل را مرتب و تمیز ذکر کنید.

k_1	$1000\ \frac{N}{m}$
$\boldsymbol{k_{t_1}}$	$100\ \frac{N.m}{rad}$
k_2	$2000\ \frac{N}{m}$
$\boldsymbol{k_{t_2}}$	$200\ \frac{N.m}{rad}$
k_3	$500\ \frac{N}{m}$
c_1	$10\ \frac{N.s}{m}$
$\boldsymbol{c_{t_1}}$	$5\ \frac{N.m.s}{rad}$
c_2	$4\ \frac{N.s}{m}$
$\boldsymbol{c_{t_2}}$	$2\ \frac{N.m.s}{rad}$
c_3	$2\ \frac{N.s}{m}$
m_1	2 kg
m_2	6 kg
m_3	1 kg
m	8 kg
J_O	$20\ \text{kg}.m^2$
r_1	1 m
r_2	2 m
r_3	3 m
$\boldsymbol{l}$	10 m
$\boldsymbol{\theta_0}$	0.1 rad
$\boldsymbol{\dot{\theta}_0}$	$3\ \frac{rad}{s}$

۲- برای سیستم نشان داده شده در شکل زیر

الف- جرم معادل

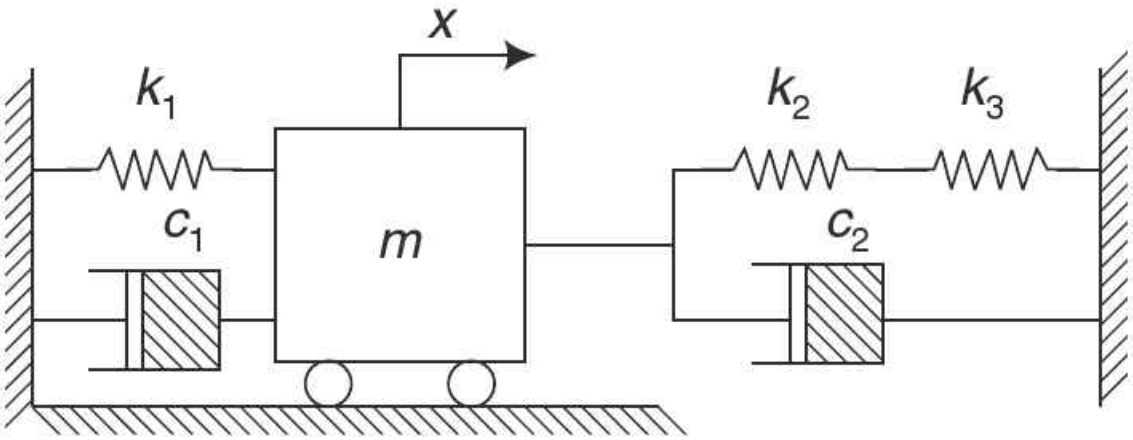
ب- دمپر معادل

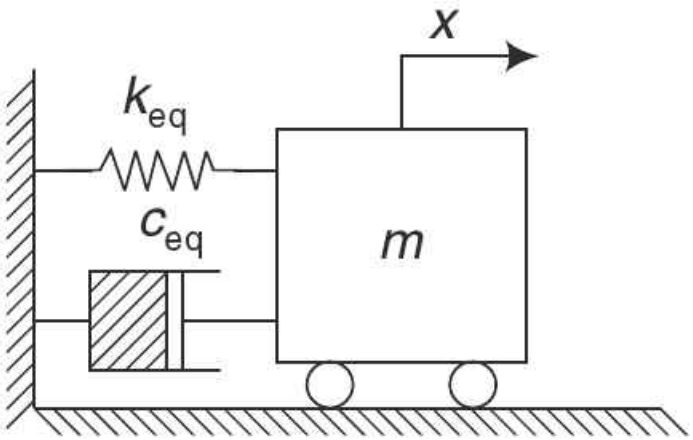
ج- فنر معادل

د- پاسخ سیستم را به شرایط اولیه $\begin{cases} x_{(0)} = 0.1m \\ \dot{x}_{(0)} = 0 \end{cases}$ به دست آورید.

مقادیر پارامترها در جدول بالا ذکر شده اند. تمامی مراحل حل را مرتب و تمیز ذکر کنید.

استفاده از فرمول‌های آماده قابل قبول نیست.





جواب سؤال 1

ابتدا x_1 ، x_2 ، x_3 ، θ_0 ، θ_3 را برحسب θ می نویسیم

$x_1 = 2\theta_0$ ① $x_2 = 2r_3\theta_3$ ② ، $x_3 = r_3\theta_3 = r_1\theta$ ③ $r_2\theta = 2l\theta_0$ ④

$$\begin{cases} \theta_0 = \frac{r_2}{2l}\theta \Rightarrow \dot{\theta}_0 = \frac{r_2}{2l}\dot{\theta} \\ \theta_3 = \frac{r_1}{r_3}\theta \Rightarrow \dot{\theta}_3 = \frac{r_1}{r_3}\dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{r_2}{2}\theta \Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{r_2}{2}\dot{\theta} \\ x_2 = 2r_1\theta \Rightarrow \dot{x}_2 = 2r_1\dot{\theta} \\ x_3 = r_1\theta \Rightarrow \dot{x}_3 = r_1\dot{\theta} \end{cases} \quad (4)$$

Kinetic energy

$$\frac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 \Rightarrow$$

$$J_{eq}\dot{\theta}^2 = m_1\left(\frac{r_2}{2}\dot{\theta}\right)^2 + J_0\left(\frac{r_2}{2l}\dot{\theta}\right)^2 + J\dot{\theta}^2 + m_2(2r_1\dot{\theta})^2 + J_3\left(\frac{r_1\dot{\theta}}{r_3}\right)^2 + m_3(r_1\dot{\theta})^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{J_{eq} = \frac{1}{4}r_2^2 m_1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r_2}{L}\right)^2 J_0 + J + 4r_1^2 m_2 + \left(\frac{r_1}{r_3}\right)^2 J_3 + r_1^2 m_3} \quad (5)$$

potential Energy

$$\frac{1}{2}(k_t)_{eq}\theta^2 = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_{t_1}\theta_0^2 + \frac{1}{2}k_{t_2}\theta^2 + \frac{1}{2}k_2x_3^2 + \frac{1}{2}k_3x_2^2$$

ادامه جواب سوال ۱

$$(k_t)_{eq}\theta^2 = k_1\left(\frac{r_2}{2}\theta\right)^2 + k_{t_1}\left(\frac{r_2}{2l}\theta\right)^2 + k_{t_2}\theta^2 + k_2(r_1\theta)^2 + k_3(2r_1\theta)^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{(k_t)_{eq} = \frac{1}{4}r_2^2 k_1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r_2}{l}\right)^2 k_{t_1} + k_{t_2} + r_1^2 k_2 + 4r_1^2 k_3} \quad (6)$$

Damped Energy

$$-\int (C_t)_{eq}\dot{\theta}\,d\dot{\theta} = -\int c_1\dot{x}_1\,d\dot{x}_1 - \int c_{t_1}\dot{\theta}_0\,d\dot{\theta}_0 - \int c_{t_2}\dot{\theta}\,d\dot{\theta} - \int c_2\dot{x}_3\,d\dot{x}_3 - \int c_3\dot{x}_2\,d\dot{x}_2 \Rightarrow$$

$$\int (C_t)_{eq}\dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \int c_1\left(\frac{r_2}{2}\dot{\theta}\right)\left(\frac{r_2}{2}d\dot{\theta}\right) + \int c_{t_1}\left(\frac{r_2}{2l}\dot{\theta}\right)\left(\frac{r_2}{2l}d\dot{\theta}\right) + \int c_{t_2}\dot{\theta}\,d\dot{\theta} + \int c_2(r_1\dot{\theta})(r_1 d\dot{\theta}) + \int c_3(2r_1\dot{\theta})(2r_1 d\dot{\theta})$$

$$\Rightarrow \boxed{(C_t)_{eq} = \frac{1}{4}r_2^2 c_1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r_2}{l}\right)^2 c_{t_1} + c_{t_2} + r_1^2 c_2 + 4r_1^2 c_3} \quad (7)$$

$J = \frac{1}{2}mr_2^2$, $J_3 = \frac{1}{2}m_3 r_3^2$ $\quad J = 16$ $\quad J_3 = 4.5$

(5) $\Rightarrow J_{eq} = 43.7 \ \ kg.m^2$ (8)

(6) $\Rightarrow (k_t)_{eq} = 3401 \ \frac{N.m}{rad}$ (9)

(7) $\Rightarrow (C_t)_{eq} = 24.05 \ \frac{N.S.m}{rad}$ (10)

Equation of motion $J_{eq}\ddot{\theta} + (C_t)_{eq}\dot{\theta} + (k_t)_{eq}\theta = 0 \Rightarrow$ (11)

ادامه جواب سوال 1

$\omega_n = \sqrt{\frac{(k_t)_{eq}}{J_{eq}}} \Rightarrow \omega_n = 8.829$ (12)

جواب سوال 2

$\frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \Rightarrow \boxed{m_{eq} = m}$ (1) $\Rightarrow \boxed{m_{eq} = 8\,kg}$

$\frac{1}{2} k_{eq} x^2 = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}} \right) x^2 \Rightarrow \boxed{k_{eq} = k_1 + \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3}}$ (2)

$\boxed{k_{eq} = 1400 \frac{N}{m}}$

$-\int c_{eq} \dot{x}\, d\dot{x} = -\int c_1 \dot{x}\, d\dot{x} - \int c_2 \dot{x}\, d\dot{x} \Rightarrow \boxed{c_{eq} = c_1 + c_2}$ (3) $\Rightarrow \boxed{c_{eq} = 14 \frac{N.s}{m}}$

Equation of motion $m_{eq} \ddot{x} + c_{eq} \dot{x} + k_{eq} x = 0 \Rightarrow$

$8\ddot{x} + 14\dot{x} + 1666.667x = 0$ (5) $\Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{1400}{8}} = 5\sqrt{7} = 13.23$ (6)

$\boxed{\omega_n = 13.2287 \frac{rad}{s}}$

$c_c = 2 m_{eq} \omega_n = 2\sqrt{k_{eq} m_{eq}} = 2\sqrt{1400 \times 8} = 80\sqrt{7} = 211.66 \frac{N.S}{m}$ (7)

$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{14}{80\sqrt{7}} = 0.066144 < 1 \Rightarrow$ underdamped (8)

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \Rightarrow \omega_d = 13.2287 \sqrt{1 - 0.066144^2} = 13.19948$ (9)

$\omega_d \simeq 13.20 \frac{rad}{s}$

$x = Ce^{st} \Rightarrow \dot{x} = Cse^{st} \Rightarrow \ddot{x} = Cs^2 e^{st}$ (10)

(10) into (5) $\Rightarrow 8[Cs^2 e^{st}] + 14[Cse^{st}] + 1400[Ce^{st}] = 0 \Rightarrow$

$\boxed{8s^2 + 14s + 1400 = 0}$ (11)

ادامه جواب سوال ②

$$s_1, s_2 = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4\times 8\times 1400}}{2\times 8} = -0.875 \pm i\,13.20 \quad (12)$$

(12) into (10) $\Rightarrow x = c_1 e^{(-0.875+13.20i)t} + c_2 e^{(-0.875-13.20i)t} \Rightarrow$

$$x = e^{-0.875t}\left[c_1 e^{13.20it} + c_2 e^{-13.20it}\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{x = e^{-0.875t}\left[A_1 \cos 13.20t + A_2 \sin 13.20t\right]} \quad (13)$$

$x_{(0)} = x\big|_{t=0} = 0.1\,m \Rightarrow (13) \Rightarrow e^0\left[A_1 + A_2 \times 0\right] = 0.1 \Rightarrow \boxed{A_1 = 0.1} \quad (14)$

$$(13) \Rightarrow \dot{x} = -0.875 e^{-0.875t}\left[A_1 \cos(13.20t) + A_2 \sin(13.20t)\right]$$

$$+ 14.407 e^{-0.875t}\left[-A_1 \sin 13.20t + A_2 \cos(13.20t)\right] \quad (15)$$

$\dot{x}_{(0)} = \dot{x}\big|_{t=0} = 0 \Rightarrow (15) \Rightarrow -0.875 e^0\left[A_1\right] + 13.20 e^0\left[A_2\right] = 0 \Rightarrow$

$$A_2 = \frac{0.875}{13.20} A_1 \Rightarrow A_2 = \frac{0.875}{13.20} \times 0.1 = 0.006628898 \quad (16)$$

$$\simeq 0.0063$$

$$\boxed{x = e^{-0.875t}\left[0.1 \cos(13.20t) + 0.006628 \sin(13.20t)\right]}$$