کاربردهای تبدیل لاپلاس

۱- محاسبه برخی از انتگرال های خاص.

گاهی می توان انتگرال توابع را با به کارگیری خواص تبدیلات لاپلاس به سادگی حل نمود.

معمولاً دو دسته از انتگرال ها با کمک تبدیل لاپلاس قابل حل هستند:

دسته اول: انتگرال های نامعینی که انتگرال ده ضریبی از تابع $e^{-\alpha t}$ است، یعنی انتگرال های به شکل $\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(t)\,dt$. در این حالت برای محاسبه انتگرال کافیست به جای مقدار α متغیر s قرار می دهیم که به دست می آید: $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ که این همان $\mathcal{L}(f(t))$ است. سپس با استفاده از روش های گفته شده در بخش قبل $\mathcal{L}(f(t))$ را محاسبه کرده و در آخر به جای s، مقدار α را جایگذین می کنیم. در واقع داریم:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(t)\,dt = \mathcal{L}(f(t))\Big|_{s=\alpha}$$

لازم به ذکر است که اگر در انتگرال ده ضریب $e^{-\alpha t}$ نباشد، می توان تابع را در e^{-0t} ضرب نمود.

مثال 1. انتگرال $\int_0^\infty te^{-5t}\sin t\,dt$ را حساب کنید.

حل: ابتدا توجه کنید که

$$\int_0^\infty e^{-st}t\sin t\,dt = \mathcal{L}(t\sin t)$$

اما بنابر قضیه مشتق تبدیل داریم:

$$\mathcal{L}(t\sin t) = -\left(\frac{1}{s^2+1}\right)' = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

پس

$$\int_0^\infty e^{-st}t\sin t\,dt = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

حال با قرار دادن 5 به جای متغیر s در تساوی بالا به دست می‌آوریم:

$$\int_0^\infty e^{-5t}t\sin t\,dt = \frac{10}{(26)^2}$$

مثال 2. حاصل $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$ را بیابید.

حل: توجه کنید که در انتگرال داده شده تابع انتگرالده دارای ضریب $e^{-\alpha t}$ نیست

بنابراین می‌توان آن را در e^{-0t} ضرب کرد، یعنی:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \int_0^\infty e^{-0t}\frac{\sin t}{t}dt$$

حال توجه بکنید به

$$\int_0^\infty e^{-st}\frac{\sin t}{t}\,dt = \mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right)$$

اما بنابر قضیه انتگرال تبدیل لاپلاس داریم:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \int_s^\infty \mathcal{L}(\sin t)\,du$$

$$= \int_s^\infty \frac{1}{u^2+1}\,du = tg^{-1}u\Big]_s^\infty = \frac{\pi}{2} - tg^{-1}s$$

پس

$$\int_0^\infty e^{-st}\frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} - tg^{-1}s$$

اکنون اگر بجای متغیر s مقدار صفر را قرار دهیم، به دست می آید:

$$\int_0^\infty e^{-0t}\frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} - tg^{-1}0 = \frac{\pi}{2}$$

پس

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

مثال ۳. حاصل انتگرال $\int_0^\infty \frac{e^{-2t}-e^{-5t}}{t}dt$ را بدست آورید.

حل. ابتدا توجه کنید که

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2t}-e^{-5t}}{t}dt = \int_0^\infty e^{-0t}\left(\frac{e^{-2t}-e^{-5t}}{t}\right)dt$$

بنابراین ابتدا $\int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{e^{-2t}-e^{-5t}}{t}\right)dt$ را حساب می‌کنیم. اما داریم:

$$\int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{e^{-2t}-e^{-5t}}{t}\right)dt = \mathcal{L}\left(\frac{e^{-2t}-e^{-5t}}{t}\right)$$

چون

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-2t}-e^{-5t}}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-2e^{-2t}+5e^{-5t}}{1} = 3$$

و

$$\mathcal{L}(e^{-2t}-e^{-5t}) = \mathcal{L}(e^{-2t})-\mathcal{L}(e^{-5t}) = \frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+5}$$

پس بنابر خاصیت انتگرال تبدیل لاپلاس:

$$\mathcal{L}\left(\frac{e^{-2t}-e^{-5t}}{t}\right) = \int_s^\infty \left(\frac{1}{u+2}-\frac{1}{u+5}\right)du = \ln\frac{u+2}{u+5}\Big|_s^\infty = \ln\frac{s+5}{s+2}$$

حال اگر به جای s مقدار صفر قرار دهیم، بدست می‌آوریم:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2t}-e^{-5t}}{t}dt = \ln\frac{5}{2}$$

دسته دوم: برخی از انتگرال های معین با کران های ۰ و t که می توان آنها را به صورت $\int_0^t f(r)g(t-r)dr$ نوشت. در این حالت این انتگرال را به صورت کانولوشن توابع $f(t)$ و $g(t)$ می نویسیم، یعنی

$$\int_0^t f(r)g(t-r)dr=(f*g)(t)$$

سپس از دو طرف آن تبدیل لاپلاس می گیریم، بدست می آید:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(r)g(t-r)dr\right)=\mathcal{L}(f*g) \qquad (*)$$

اما بنابر قضیه کانولوشن

$$\mathcal{L}(f*g)=\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$$

که پس از محاسبه، $\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$ و قرار دادن آن در رابطه $(*)$ از دو طرف تساوی بدست آمده $\mathcal{L}^{-1}$ می گیریم، بدین صورت حاصل انتگرال بدست می آید.

مثال ۱. حاصل انتگرال $\int_0^t (t-r)^4 r^3 dr$ را بدست آورید.

حل. البته داریم:

$$\int_0^t (t-r)^4 r^3 dr = t^4 * t^3$$

حال از دو طرف تساوی اخیر لاپلاس می گیریم:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t (t-r)^4 r^3 dr\right)=\mathcal{L}(t^4*t^3)=\mathcal{L}(t^4)\mathcal{L}(t^3)=\frac{4!}{s^5}\times\frac{3!}{s^4}$$

پس
$$\mathcal{L}\left(\int_0^t (t-r)^4 r^3\,dr\right) = 4!\,3!\,\frac{1}{s^9}$$

حال از دو طرف $\mathcal{L}^{-1}$ می‌گیریم، به دست می‌آوریم:

$$\int_0^t (t-r)^4 r^3\,dr = 4!\,3!\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^9}\right) = \frac{4!\,3!}{8!}\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{8!}{s^9}\right)$$

$$= \frac{1}{280}\,t^8$$

مثال 2. مطلوب است محاسبه انتگرال $I=\int_0^{+\infty}\int_0^t e^{-6r+t}\cos r\,dr\,dt$.

حل. برای این منظور ابتدا انتگرال داخلی را حساب می‌کنیم، داریم:

$$\int_0^t e^{-6r+t}\cos r\,dr = \int_0^t e^{6(t-r)}\,e^{-5t}\cos r\,dr = e^{-5t}\int_0^t e^{6(t-r)}\cos r\,dr$$

$$= e^{-5t}\left(e^{6t} * \cos t\right)$$

پس $I=\int_0^\infty e^{-5t}\left(e^{6t}*\cos t\right)dt$. حال برای محاسبه I ابتدا به جای عدد 5، متغیر s قرار می‌دهیم، داریم:

$$\int_0^\infty e^{-st}\left(e^{6t}*\cos t\right)dt = \mathcal{L}\left(e^{6t}*\cos t\right)$$

اما

$$\mathcal{L}\left(e^{6t}*\cos t\right) = \mathcal{L}\left(e^{6t}\right)\mathcal{L}(\cos t) = \frac{1}{s-6}\cdot\frac{s}{s^2+1}$$

در پایان s را 5 می‌گذاریم، به دست می‌آید:

$$I=\int_0^\infty e^{-5t}\left(e^{6t}*\cos t\right)dt = -\frac{5}{26}$$

2- حل معادلات دیفرانسیل

یکی از مهمترین کاربردهای تبدیل لاپلاس استفاده از آن جهت حل برخی از معادلات دیفرانسیل است. معادلاتی که می‌توان آنها را با به کارگیری تبدیلات لاپلاس حل کرد، غالباً به شکل

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t)$$

بوده که در آن ضرایب $a_i(t)$ ثابت یا توابع خاصی همانند تک جمله‌ای های bt^m می‌باشند البته به شرط آنکه شرایط اولیه در نقطه $t=0$ نیز معلوم باشد. در چنین حالتهایی برای حل معادله دیفرانسیل به این صورت عمل می‌کنیم که ابتدا تبدیل لاپلاس را از دو طرف معادله اثر داده، سپس با استفاده از خاصیت خطی آن و همچنین با به کارگیری برخی از روش‌هایی که در بخش قبل معرفی شده، تبدیل‌های لاپلاس موجود در دو طرف را محاسبه نموده و سپس $\mathcal{L}(y)$ را برحسب سایر جملات می‌نویسیم. در آخر نیز با اعمال عملگر وارون لاپلاس، یعنی $\mathcal{L}^{-1}$ بر دو طرف تساوی به دست آمده و محاسبه تمام وارون لاپلاس‌های ظاهر شده، y را به دست می‌آوریم.

لازم به ذکر است که در حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از تبدیل لاپلاس، برای محاسبه لاپلاس مشتق‌های n باید از قضیه تبدیل لاپلاس مشتق استفاده کنیم که در این صورت داریم:

$$\mathcal{L}(y^{(n)}) = s^n\mathcal{L}(y) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)$$

بدین جهت لازم است که مقادیر اولیه $y(0)$ ، $y'(0)$ ، ... ، $y^{(n-1)}(0)$ مشخص باشد.

مثال 1. معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید:

$$y''+4y'+6y = 1+e^{-t}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0$$

حل: داریم:

$$\mathcal{L}(y''+4y'+6y) = \mathcal{L}(1+e^{-t})$$

پس

$$\mathcal{L}(y'')+4\mathcal{L}(y')+6\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(1)+\mathcal{L}(e^{-t})$$

حال با استفاده از قضیه تبدیل لاپلاس مشتق داریم:

$$\left(s^2\mathcal{L}(y)-sy(0)-y'(0)\right)+4\left(s\mathcal{L}(y)-y(0)\right)+6\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}$$

که با جایگذاری مقادیر اولیه به دست می‌آید:

$$\mathcal{L}(y)(s^2+4s+6) = \frac{2s+1}{s(s+1)}$$

پس

$$\mathcal{L}(y) = \frac{2s+1}{s(s+1)(s^2+4s+6)}$$

حال با اعمال $\mathcal{L}^{-1}$ بر دو طرف این تساوی داریم:

$$y=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s+1}{s(s+1)(s^2+4s+6)}\right)$$

اما می‌توان نوشت:

$$\frac{2s+1}{s(s+1)(s^2+4s+6)}=\frac{1/6}{s}+\frac{1/3}{s+1}+\frac{-\frac{1}{2}s-\frac{5}{3}}{s^2+4s+6}$$

پس:

$$y=\frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)+\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{2}s-\frac{5}{3}}{(s+2)^2+2}\right) \qquad (*)$$

اما داریم:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{2}s-\frac{5}{3}}{(s+2)^2+2}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{2}(s+2)-\frac{2}{3}}{(s+2)^2+2}\right)=-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(s+2)}{(s+2)^2+2}\right)-\frac{2}{3\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{(s+2)^2+2}\right)$$

که با استفاده از قضیه اول انتقال

$$=-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos\sqrt{2}t-\frac{2}{3\sqrt{2}}e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$$

حال با جای گذاری در (*) و با محاسبه سایر وارون های لاپلاس بدست می‌آوریم:

$$\boxed{y=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos\sqrt{2}t-\frac{2}{3\sqrt{2}}e^{-2t}\sin\sqrt{2}t}$$

مثال 2 . مطلوبست حل معادله دیفرانسیل

$$y''+2y'+y=\begin{cases} 0 & 0\leq t<\frac{\pi}{2} \\ \cos 2t & t\geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad , \quad y(0)=y'(0)=0$$

حل: ابتدا معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y''+2y'+y=(\cos 2t)(u_{\frac{\pi}{2}}(t))$$

حال از دو طرف لاپلاس می‌گیریم:

$$\mathcal{L}(y''+2y'+y)=\mathcal{L}\left((\cos 2t)u(t-\tfrac{\pi}{2})\right)$$

پس

$$\mathcal{L}(y'')+2\mathcal{L}(y')+\mathcal{L}(y)=\mathcal{L}\left((\cos 2t)u(t-\tfrac{\pi}{2})\right)$$

$$\left[s^2\mathcal{L}(y)-sy(0)-y'(0)\right]+2\left[s\mathcal{L}(y)-y(0)\right]+\mathcal{L}(y)=\mathcal{L}\left(\cos 2t\, u(t-\tfrac{\pi}{2})\right)$$

حال با جایگذاری مقادیر اولیه داریم:

$$\mathcal{L}(y)(s^2+2s+1)=\mathcal{L}\left(\cos 2t\, u(t-\tfrac{\pi}{2})\right) \quad (*)$$

برای محاسبه عبارت سمت راست، فرض می‌کنیم $f(t-\frac{\pi}{2})=\cos 2t$ پس $f(t)=\cos(2t+\pi)$

حال داریم:

$$\mathcal{L}(f(t))=\mathcal{L}(\cos 2t\cos\pi-\sin 2t\sin\pi)=\mathcal{L}(-\cos 2t)=\frac{-s}{s^2+4}$$

اما بنابر قضیه دوم انتقال

$$\mathcal{L}\left(\cos 2t\, u(t-\tfrac{\pi}{2})\right)=\mathcal{L}\left(f(t-\tfrac{\pi}{2})u(t-\tfrac{\pi}{2})\right)=e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathcal{L}(f(t))$$

بنابراین با جای‌گذاری در رابطه (**) به دست می‌آید:

$$\mathcal{L}(y)(s^2+2s+1) = e^{-\frac{\pi}{2}s}\left(\frac{-s}{s^2+4}\right)$$

پس:

$$\mathcal{L}(y) = -e^{-\frac{\pi}{2}s}\left(\frac{s}{(s^2+4)(s+1)^2}\right)$$

اکنون با اعمال $\mathcal{L}^{-1}$ بر دو طرف تساوی بالا داریم:

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-s}{(s^2+4)(s+1)^2}\, e^{-\frac{\pi}{2}s}\right)$$

به راحتی می‌توان دید که

$$\frac{-s}{(s^2+4)(s+1)^2} = \frac{\frac{3}{25}s}{(s^2+4)} + \frac{-\frac{8}{25}}{(s^2+4)} + \frac{-\frac{3}{25}}{s+1} + \frac{\frac{1}{5}}{(s+1)^2}$$

پس:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-s}{(s^2+4)(s+1)^2}\right) = \frac{3}{25}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) - \frac{4}{25}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) - \frac{3}{25}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

$$+\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right) = \frac{3}{25}\cos 2t - \frac{4}{25}\sin 2t - \frac{3}{25}e^{-t} + \frac{1}{5}te^{-t}$$

حال بنابر قضیه دوم انتقال به دست می‌آید:

$$y = \left[\frac{3}{25}\cos 2\left(t-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{25}\sin 2\left(t-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{3}{25}e^{-\left(t-\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{5}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)e^{-\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}\right]u_{\frac{\pi}{2}}(t)$$

مثال ۳۰. معادله دیفرانسیل $ty''+(1+t)y'+y=0$ با شرایط اولیه $y(0)=1$ و $y'(0)=1$ ، y را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

حل: با اعمال تبدیل لاپلاس بر دو طرف معادله و همزمان استفاده از خاصیت خطی آن داریم:

$$\mathcal{L}(ty'')+\mathcal{L}(y')+\mathcal{L}(ty')+\mathcal{L}(y)=0$$

حال بنابر قضیه مشتق تبدیل به دست می‌آید:

$$-\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}(y'')\right)+\mathcal{L}(y')-\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}(y')\right)+\mathcal{L}(y)=0$$

از طرفی با به کار بردن قضیه تبدیل لاپلاس مشتق داریم:

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2\mathcal{L}(y)-sy(0)-y'(0)\right)+\left(s\mathcal{L}(y)-y(0)\right)-\frac{d}{ds}\left(s\mathcal{L}(y)-y(0)\right)$$

$$+\mathcal{L}(y)=0$$

حال برای سادگی قرار می‌دهیم $\mathcal{L}(y)=Y(s)$ و مقادیر اولیه را نیز جایگذاری می‌کنیم:

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2Y(s)-s-1\right)+\left(sY(s)-1\right)-\frac{d}{ds}\left(sY(s)-1\right)+Y(s)=0$$

که با محاسبه مشتق‌ها به دست می‌آوریم:

$$-2sY(s)-s^2Y'(s)+1+sY(s)-1-Y(s)-sY'(s)+Y(s)=0$$

پس:

$$-y'(s^2+s)-sy=0$$

لذا:

$$\frac{y'(s)}{y(s)}=\frac{-1}{s+1}$$

که یک معادله جدایی‌پذیر برحسب y و s بوده که آن را حل می‌کنیم:

$$\ln y=-\ln(s+1)=\ln\frac{1}{s+1}+C$$

با انتخاب $C=0$ به دست می‌آوریم:

$$\ln y=\ln\frac{1}{s+1}$$

پس $y(s)=\dfrac{1}{s+1}$ بنابراین با اعمال $\mathcal{L}^{-1}$ بر دو طرف این تساوی

داریم $y=\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s+1}\right)$ پس:

$$y=e^{-t}$$

مثال ۴. معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$ty'' + (3t-1)y' - (4t+9)y = 0 \qquad y(0) = 0$$

حل: با اعمال تبدیل لاپلاس به دو طرف معادله و استفاده از خاصیت خطی که داریم:

$$\mathcal{L}(ty'') + 3\mathcal{L}(ty') - \mathcal{L}(y') - 4\mathcal{L}(ty) - 9\mathcal{L}(y) = 0$$

پس

$$-\frac{d}{ds}(\mathcal{L}(y'')) + 3\left[-\frac{d}{ds}(\mathcal{L}(y'))\right] - \mathcal{L}(y') - 4\left[-\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y)\right] - 9\mathcal{L}(y) = 0$$

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0)\right] - 3\frac{d}{ds}\left[s\mathcal{L}(y) - y(0)\right] - (s\mathcal{L}(y) - y(0))$$

$$+4\frac{d}{ds}(\mathcal{L}(y)) - 9\mathcal{L}(y) = 0$$

حال برای سادگی قرار می‌دهیم $\mathcal{L}(y) = Y(s)$ و مقادیر اولیه را نیز جایگذاری می‌کنیم:

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2Y(s) - y'(0)\right] - 3\frac{d}{ds}\left[sY(s)\right] - \left[sY(s)\right] + 4\frac{d}{ds}\left[Y(s)\right] - 9Y(s) = 0$$

$$-2sY(s) - s^2Y'(s) - 3Y(s) - 3sY'(s) - sY(s) + 4Y'(s) - 9Y(s) = 0$$

پس

$$Y'(-s^2 - 3s + 4) + Y(-3s - 12) = 0$$

پس: $-y'(s^2+3s+4)=y\,3(s+4)$

لذا: $\dfrac{y'}{y}=-\dfrac{3(s+4)}{(s+4)(s-1)}$

یا $\dfrac{dy}{y}=-\dfrac{3}{s-1}\,ds$

که یک معادله جدایی‌پذیر است و با حل آن داریم:

$$\ln y+\ln c=-3\ln(s-1)$$

$$\ln cy=\ln\frac{1}{(s-1)^3}$$

پس:

بنابراین $cy=\dfrac{1}{(s-1)^3}$ پس $\mathcal{L}(y)=\dfrac{k}{(s-1)^3}$

که در آن $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. حال اگر $\mathcal{L}^{-1}$ را بر دو طرف تساوی فوق اعمال کنیم، بدست

می‌آوریم: $y=\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{k}{(s-1)^3}\right)$ که با استفاده از قضیه انتقال داریم:

$$y=\frac{k}{2!}t^2e^t$$

معادلات انتگرالی:

تعریف: هر معادله که در آن یک تابع مجهول مانند $f(t)$ در زیر علامت انتگرال

قرار دارد را یک معادله انتگرالی نامند. در صورتی که معادله انتگرالی شامل مشتقات تابع

مجهول نیز باشد، معادله دیفرانسیل انتگرالی نامیده می‌شود.

مثال 1. معادله $f(t)=t^3+\int_0^t f(r)\sin(t-r)\,dr$ یک معادله انتگرالی است.

مثال 2. معادله $f(t)=f''(t)-f'(t)+e^t\left(\int_0^t \frac{f(r)}{e^r}\,dr-1\right)$ یک معادله دیفرانسیل

انتگرالی است.

برای حل معادلات انتگرالی با کمک تبدیل لاپلاس، مشابه حل معادلات دیفرانسیل معمولی،

ابتدا $\mathcal{L}$ را به طرفین معادله اثر داده، سپس با محاسبه تبدیلات لاپلاس به روش مناسب

$\mathcal{L}(f(t))$ را از معادله استخراج می‌کنیم. در پایان نیز با اعمال $\mathcal{L}^{-1}$ به دو طرف تساوی

به دست آمده $f(t)$ به دست می‌آید.

تبصره: یکی از انواع معادلات انتگرالی به صورت

$$f(t)=h(t)+a\int_0^t f(r)g(t-r)\,dr$$

است که برای حل آن از تبدیلات لاپلاس و به ویژه از قضیه کانولوشن استفاده می‌کنیم.

مثال ۳. معادله انتگرالی زیر را حل کنید:

$$f(t)=t^3+\int_0^t f(r)\sin(t-r)dr$$

حل. ابتدا تبدیل لاپلاس را به دو طرف معادله اثر می دهیم:

$$\mathcal{L}(f(t))=\mathcal{L}\left(t^3+\int_0^t f(r)\sin(t-r)dr\right)$$

حال با توجه به خاصیت خطی $\mathcal{L}$ داریم:

$$\mathcal{L}(f(t))=\mathcal{L}(t^3)+\mathcal{L}\left(\int_0^t f(r)\sin(t-r)dr\right)$$

انتگرال با به کارگیری قضیه کانولوشن به دست می آوریم:

$$\mathcal{L}(f(t))=\frac{3!}{s^4}+\mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(\sin t)=\frac{3!}{s^4}+\mathcal{L}(f(t))\frac{1}{s^2+1}$$

حال $\mathcal{L}(f(t))$ را استخراج می کنیم:

$$\mathcal{L}(f(t))\left(1-\frac{1}{s^2+1}\right)=\frac{6}{s^4}$$

سپس

$$\mathcal{L}(f(t))=\frac{6(s^2+1)}{s^4(s^2+1-1)}=\frac{6}{s^4}+\frac{6}{s^6}$$

در گام $\mathcal{L}^{-1}$ را به دو طرف تساوی قبل اثر می‌دهیم:

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{s^4}+\frac{6}{s^6}\right)=6\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right)+6\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^6}\right)$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3!}{s^4}\right)+\frac{6}{5!}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5!}{s^6}\right)=t^3+\frac{t^5}{20}$$

$$f(t)=t^3+\frac{t^5}{20}$$

پس

مثال ۴. معادله دیفرانسیل انتگرالی $y''(t)-2y'(t)-y(t)+2\int_0^t y(r)\,dr=-1-2t$

را با شرایط اولیه $y(0)=0$ و $y'(0)=1$ حل کنید.

حل: داریم:

$$\mathcal{L}(y'')-2\mathcal{L}(y')-\mathcal{L}(y)+2\mathcal{L}\left(\int_0^t y(r)\,dr\right)=-\mathcal{L}(1)-2\mathcal{L}(t)$$

حال با استفاده از قضایای تبدیل مشتق و تبدیل انتگرال داریم:

$$(s^2\mathcal{L}(y)-sy(0)-y'(0))-2(s\mathcal{L}(y)-y(0))-\mathcal{L}(y)-\frac{2}{s}\mathcal{L}(y)=-\frac{1}{s}-\frac{2}{s^2}$$

در ادامه برای سادگی قرار می‌دهیم $\mathcal{L}(y)=Y(s)$ و مقادیر اولیه را نیز جایگزین می‌کنیم:

$$s^2Y(s)-1-2sY(s)-Y(s)+\frac{2}{s}Y(s)=-\frac{1}{s}-\frac{2}{s^2}=\frac{-s-2}{s^2}$$

اکنون دو طرف را در s ضرب نموده و پس ساده می‌کنیم:

$$s^3 y(s) - s - 2s^2 y(s) - s y(s) + 2y(s) = -1 - \frac{2}{s} = \frac{-s-2}{s}$$

$$(s^3 - 2s^2 - s + 2)y = -\frac{s-2}{s} + s = \frac{-s-2+s^2}{s}$$

پس

$$(s^3 - 2s^2 - s + 2)y(s) = \frac{s^2 - s - 2}{s}$$

یا:

$$(s-2)(s-1)(s+1)y(s) = \frac{(s-2)(s+1)}{s}$$

با استخراج $y(s)$ داریم:

$$\mathcal{L}(y) = y(s) = \frac{1}{s(s-1)}$$

اکنون از دو طرف $\mathcal{L}^{-1}$ می‌گیریم:

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s-1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$= e^t - 1$$

پس

$$y = e^t - 1$$

مثال ۵. معادله دیفرانسیل انتگرالی

$$x''(t)-x'(t)+x(t)=e^{t}\left(1-\int_0^t \frac{x(r)}{e^{r}}\,dr\right)$$

را با شرایط اولیه $x(0)=1$ و $x'(0)=2$ حل کنید:

حل. ابتدا معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x''-x'+x=e^{t}-e^{t}\int_0^t e^{-r}x\,dr$$

چون انتگرال نسبت به r است، می‌توان e^{t} را وارد انتگرال کرد:

$$x''-x'+x=e^{t}-\int_0^t e^{t-r}x\,dr$$

حال از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم،

$$\mathcal{L}(x'')-\mathcal{L}(x')+\mathcal{L}(x)=\mathcal{L}(e^{t})-\mathcal{L}\left(\int_0^t e^{t-r}x\,dr\right)$$

حال با به کارگیری تبدیل مشتق و قضیه کانولوشن داریم:

$$\left[s^2\mathcal{L}(x)-sx(0)-x'(0)\right]-\left[s\mathcal{L}(x)-x(0)\right]+\mathcal{L}(x)=\frac{1}{s-1}-\mathcal{L}(e^{t})\mathcal{L}(x)$$

با جای‌گذاری شرایط اولیه و ساده کردن به دست می‌آید:

$$s^2\mathcal{L}(x)-s-2-s\mathcal{L}(x)+1+\mathcal{L}(x)=\frac{1}{s-1}-\frac{\mathcal{L}(x)}{s-1}$$

یا:

$$\mathcal{L}(x)\left(s^2-s+1+\frac{1}{s-1}\right)=s+1+\frac{1}{s-1}$$

$$\mathcal{L}(x)\left(\frac{s^3-s^2+s-s^2+s-1+1}{s-1}\right)=\frac{s^2-1+1}{s-1}$$

پس

$$\mathcal{L}(x)(s^3-2s^2+2s)=s^2$$

بنابراین:

$$\mathcal{L}(x)=\frac{s^2}{s^3-2s^2+2s}$$

حال با اعمال $\mathcal{L}^{-1}$ به دو طرف تساوی گفته شده به دست می‌آید:

$$x=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{s(s^2-2s+2)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-2s+2}\right)$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s-1)^2+1}\right)$$

برای محاسبه وارون لاپلاس اخیر، چون مخرج تابعی از $s-1$ است، بنابراین صورت را هم به شکل زیر به صورت تابعی از $s-1$ می‌نویسیم:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s-1)^2+1}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1+1}{(s-1)^2+1}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2+1}\right)$$

که با به کارگیری قضیه اول انتقال

$$=e^t\cos t+e^t\sin t$$

پس جواب معادله عبارت است از:

$$\boxed{x(t)=e^t\cos t+e^t\sin t}$$

مثال ۵. معادله دیفرانسیل انتگرالی

$$y'(t)+\int_0^t y(r)\cos(t-r)\,dr=\cos t$$

را با شرط اولیه $y(0)=0$ حل کنید.

حل: توجه کنید که معادله داده شده را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$y'(t)+(y(t)*\cos t)=\cos t$$

حال با اعمال تبدیل لاپلاس $\mathcal{L}$ به دو طرف معادله داریم:

$$\mathcal{L}(y'(t))+\mathcal{L}(y(t)*\cos t)=\mathcal{L}(\cos t)$$

حال با به کارگیری قضیه تبدیل مشتق و کانولوشن داریم:

$$(s\mathcal{L}(y)-y(0))+\mathcal{L}(y)\mathcal{L}(\cos t)=\mathcal{L}(\cos t)$$

با جایگذاری شرط اولیه و قرار دادن $\mathcal{L}(y)=Y(s)$ داریم:

$$sY(s)+Y(s)\frac{s}{s^2+1}=\frac{s}{s^2+1}$$

حال $Y(s)$ را از معادله استخراج می‌کنیم:

$$Y(s)\left(s+\frac{s}{s^2+1}\right)=\frac{s}{s^2+1}$$

بقیه:

$$Y(s)=\frac{\frac{s}{s^2+1}}{s+\frac{s}{s^2+1}}=\frac{s}{s(s^2+1)+s}=\frac{1}{s^2+2}$$

بنابراین $$\mathcal{L}(y)=\frac{1}{s^2+2}$$

حال با اعمال تبدیل وارون لاپلاس به دو طرف تساوی فوق داریم:

$$y=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t$$

پس جواب معادله عبارتست از:

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t$$

۶- تابع دلتای دیراک :

یکی از توابع مهم و پرکاربرد در فیزیک و مهندسی تابع دلتای دیراک است که به افتخار فیزیکدان انگلیسی پاول دیراک نام گذاری شد. این تابع در واقع مدل ریاضی پدیده‌هایی است که در سیستم‌های الکتریکی و مکانیکی ماهیت ضربه‌ای دارند، یعنی پدیده‌هایی که در زمان بسیار کوتاه، اثر بزرگی بر جای می‌گذارند. برای تعریف تابع دلتای دیراک ابتدا تابع ضربه یکه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف: فرض کنید α عددی ثابت باشد. تابع

$$\delta_\alpha(t-t_0)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\alpha} & t_0-\alpha < t < t_0+\alpha \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

تابع ضربه یکه نامیده می‌شود.

واضح است که می‌توان تابع ضربه یکه را به صورت زیر برحسب تابع پله‌ای واحد نوشت:

$$\delta_\alpha(t-t_0)=\frac{1}{2\alpha}\left(U_{t_0-\alpha}(t)\right)+\left(0-\frac{1}{2\alpha}\right)\left(U_{t_0+\alpha}(t)\right)$$

پس:

$$\delta_\alpha(t-t_0)=\frac{1}{2\alpha}\left[U_{t_0-\alpha}(t)-U_{t_0+\alpha}(t)\right]$$

بنابراین می‌توان تبدیل لاپلاس کل را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\mathcal{L}\left(\delta_\alpha(t-t_0)\right)=\frac{1}{2\alpha}\left[\mathcal{L}\left(U_{t_0-\alpha}(t)\right)-\mathcal{L}\left(U_{t_0+\alpha}(t)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{s}e^{-(t_0-\alpha)s}-\frac{1}{s}e^{-(t_0+\alpha)s}\right]$$

$$=\frac{1}{2\alpha s}\left(e^{-t_0 s+\alpha s}-e^{-t_0 s-\alpha s}\right)$$

$$=e^{-st_0}\left(\frac{e^{\alpha s}-e^{-\alpha s}}{2\alpha s}\right)$$

همچنین داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\alpha(t-t_0)\,dt=\int_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha}\frac{1}{2\alpha}\,dt=\frac{1}{2\alpha}\left[t\right]_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha}=\frac{2\alpha}{2\alpha}=1$$

حال تعریف می‌کنیم:

$$\delta(t-t_0)=\lim_{\alpha\to 0}\delta_\alpha(t-t_0)$$

تابع $\delta(t-t_0)$ تابع دلتای دیراک نامیده می‌شود.

توجه کنید که $\lim_{\alpha \to 0} \delta_\alpha(t-t_0)$ به معنای خاص تابع وجود ندارد ولی اگر احتیاط را رها کنیم می‌توان آن را به عنوان یک شبه تابع در نظر گرفت. بنابراین تابع دلتای دیراک که تابع تعمیم یافته نیز نامیده می‌شود را می‌توان چنین تعریف کرد:

تعریف: تابع دلتای دیراک که با $\delta(t-t_0)$ نشان داده می‌شود، تابعی است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}0 & t\neq t_0\\ \infty & t=t_0\end{cases}\quad,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt=1$$

اکنون به محاسبه تبدیل لاپلاس تابع دلتای دیراک می‌پردازیم، داریم:

$$\mathcal{L}(\delta(t-t_0))=\mathcal{L}\left(\lim_{\alpha\to 0}\delta_\alpha(t-t_0)\right)=\lim_{\alpha\to 0}\left(\mathcal{L}(\delta_\alpha(t-t_0))\right)$$

$$=\lim_{\alpha\to 0} e^{-st_0}\left(\frac{e^{\alpha s}-e^{-\alpha s}}{2\alpha s}\right)$$

$$\underset{\text{هوپیتال}}{=} e^{-st_0}\lim_{\alpha\to 0}\frac{se^{\alpha s}+se^{-\alpha s}}{2s}=e^{-st_0}$$

بنابراین $$\mathcal{L}(\delta(t-t_0)) = e^{-st_0}$$

به ویژه، اگر $t_0=0$، آنگاه $$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

همچنین اگر $f(t)$ تابعی پیوسته باشد می‌توان ثابت کرد که

$$\mathcal{L}(f(t)\delta(t-t_0)) = f(t_0)e^{-st_0}$$

مثال 1. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$y''-4y'+4y = 3\delta(t-1) \qquad y(0)=y'(0)=1$$

حل: از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\mathcal{L}(y'')-4\mathcal{L}(y')+4\mathcal{L}(y) = 3\mathcal{L}(\delta(t-1))$$

پس

$$s^2\mathcal{L}(y)-sy(0)-y'(0)-4s\mathcal{L}(y)+4y(0)+4\mathcal{L}(y) = 3e^{-s}$$

بنابراین پس از جایگذاری شرایط اولیه و ساده کردن به دست می‌آوریم:

$$\mathcal{L}(y)(s^2-4s+4) = s-3+3e^{-s}$$

بنابراین:

$$\mathcal{L}(y) = \frac{s-3+3e^{-s}}{s^2-4s+4} = \frac{s-3+3e^{-s}}{(s-2)^2} =$$

$$\frac{s-2}{(s-2)^2} - \frac{1}{(s-2)^2} + 3\frac{e^{-s}}{(s-2)^2} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2} + 3\frac{e^{-s}}{(s-2)^2}$$

بنابراین با اعمال $\mathcal{L}^{-1}$ بر دو طرف تساوی :

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2}\right) + 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{(s-2)^2}\right)$$

اما بنابر قضیه اول انتقال $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2}\right) = e^{2t}t$ حال با استفاده از قضیه دوم

انتقال $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{(s-2)^2}\right) = e^{2(t-1)}(t-1)u(t-1)$ که با جایگذاری در تساوی بالا

جواب معادله به صورت زیر به دست می آید:

$$y = e^{2t} - e^{2t}t + 3e^{2(t-1)}(t-1)u(t-1).$$

(3051

مثال 2. معادله دیفرانسیل $y''+2y'+2y=\delta(t)+3\delta(t-\pi)$ را با شرایط اولیه $y(0)=y'(0)=0$ حل کنید.

حل: ابتدا از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\mathcal{L}(y'')+2\mathcal{L}(y')+2\mathcal{L}(y)=\mathcal{L}(\delta(t))+3\mathcal{L}(\delta(t-\pi))$$

با استفاده از قضیه تبدیل مشتق:

$$[s^2\mathcal{L}(y)-sy(0)-y'(0)]+2[s\mathcal{L}(y)-y(0)]+2\mathcal{L}(y)=e^{-s0}+3e^{-s\pi}$$

حال قرار می‌دهیم $\mathcal{L}(y)=Y(s)$ و سپس مقادیر اولیه را جایگذاری می‌کنیم:

$$s^2Y(s)+2sY(s)+2Y(s)=1+3e^{-\pi s}$$

سپس: $Y(s)(s^2+2s+2)=1+3e^{-\pi s}$ بنابراین

$$\mathcal{L}(y)=Y(s)=\frac{1+3e^{-\pi s}}{s^2+2s+2}$$

اکنون با اثر دادن $\mathcal{L}^{-1}$ به دو طرف تساوی:

$$y=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1+3e^{-\pi s}}{s^2+2s+2}\right)$$

اما:

$$\frac{1+3e^{-\pi s}}{s^2+2s+2}=\frac{1}{s^2+2s+2}+\frac{3e^{-\pi s}}{s^2+2s+2}=\frac{1}{(s+1)^2+1}+\frac{3e^{-\pi s}}{(s+1)^2+1}$$

پس:

$$y=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2+1}\right)+3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2+1}\right)$$

حال با استفاده از قضیه اول انتقال داریم $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2+1}\right)=e^{-t}\sin t$ و با به کارگیری قضیه دوم انتقال نیز داریم $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2+1}\right)=e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)u_\pi(t)$ پس:

$$y=e^{-t}\sin t+e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)u(t-\pi)$$

مثال ۳ - معادله دیفرانسیل $y''+2y'+5y=2\delta(t-\pi)\cos t$ را با شرایط اولیه $y(0)=y'(0)=1$ حل کنید.

حل: از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\mathcal{L}(y'')+2\mathcal{L}(y')+5\mathcal{L}(y)=2\mathcal{L}\big(\delta(t-\pi)\cos t\big)$$

حال بنابر نکته‌ای که در صفحه (۲۰۰) و قبل از مثال ۱ گفته شد:

$$\mathcal{L}\big(\delta(t-\pi)\cos t\big)=e^{-\pi s}\cos\pi=-e^{-\pi s}$$

پس:

$$\left[s^2\mathcal{L}(y)-sy(0)-y'(0)\right]+2\left[s\mathcal{L}(y)-y(0)\right]+5\mathcal{L}(y)=-2e^{-\pi s}$$

اکنون با جای‌گذاری مقادیر اولیه و قرار دادن $\mathcal{L}(y)=Y(s)$ بدست می‌آید:

$$s^2Y(s)-s-1+2sY(s)-2+5Y(s)=-2e^{-\pi s}$$

پس: $Y(s)(s^2+2s+5)=s+3-2e^{-\pi s}$ و از آنجا

$$\mathcal{L}(y)=Y(s)=\frac{s+3-2e^{-\pi s}}{s^2+2s+5}$$

پس:

$$y=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+3-2e^{-\pi s}}{s^2+2s+5}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+3}{s^2+2s+5}-2\,\frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+5}\right)$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(s+2)+1}{(s+2)^2+4}\right)-2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s}}{(s+2)^2+4}\right)$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+4}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)^2+4}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2e^{-\pi s}}{(s+2)^2+4}\right)$$

اکنون با به کارگیری قضایای اول و دوم انتقال داریم:

$$y = e^{-t}\cos 2t + e^{-t}\sin 2t + e^{-(t-\pi)}\sin 2(t-\pi)\,u(t-\pi)$$

$$y = e^{-t}\cos 2t + e^{-t}\sin 2t + e^{-t}e^{\pi}\left((\sin 2t)\,u_{\pi}(t)\right)$$

$$y = e^{-t}\left(\cos 2t + \sin 2t + e^{\pi}\left((\sin 2t)\,u_{\pi}(t)\right)\right)$$

$$y = \begin{cases} e^{-t}(\cos 2t + \sin 2t) & t < \pi \\ e^{-t}(\cos 2t + \sin 2t + e^{\pi}\sin 2t) & t \geq \pi \end{cases}$$

بس

تمرین: معادلات دیفرانسیل زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

1) $y'' - 4y = 3\cos t, \qquad y(0) = y'(0) = 1$

2) $y'' + y = \sin 2t, \qquad y(0) = y'(0) = 1$

3) $y'' - 3y' - 4y = \begin{cases} e^{t} & 0 \le t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases} \qquad y(0) = y'(0) = 0$

4) $y'' - y' = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1 \\ t-1 & t \geq 1 \end{cases} \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

5) $f(t) = e^{-t}\left(t + \int_0^t e^{r} f(r) \sin(t-r)\, dr\right)$

6) $y'' + y' - 4y - 4\int_0^t y(r)\, dr = e^{t} - 4t - 6 \qquad y(0) = y'(0) = 0$

7) $ty'' + (1-2t)y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

8) $ty'' + (2t+3)y' + (t+3)y = 3e^{-t}, \quad y(0) = 0$

9) $y'' + y' + y = \delta(t-1), \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

10) $y'' + y = \cos 2t - \delta(t-1), \quad y(0) = y'(0) = 0$

تمرین های دوره ای

الف) تبدیل لاپلاس هر یک از توابع زیر را بیابید

1) $f(t) = e^{-t/2} \cos 2\left(t - \pi/8\right)$

2) $f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \leq t < \pi/6 \\ \cos 2t & t \geq \pi/6 \end{cases}$

3) $f(t) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{\sqrt{t}} e^{-r^2} dr$

4) $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos(tr)}{r^2+1} dr$

5) $f(t) = \dfrac{(\sqrt{t}+1)(2-\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$

ب- تبدیل وارون لاپلاس هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

1) $F(s) = tg^{-1}\left(s - \pi/2\right)$

2) $F(s) = \dfrac{s^2+3}{s^3-1}$

3) $F(s) = \dfrac{e^{-3s}}{\sqrt{s-2}}$

4) $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)^2} \cot^{-1}(s+2)$

5) $F(s) = \dfrac{2s^3 - s^2}{(4s^2 - 4s + 5)^2}$

ج) هر یک از انتگرال های زیر را با به کارگیری تبدیل لاپلاس حل نمایید.

1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin t}{t}\,dt$

2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-2t} - e^{-3t}}{t}\,dt$

3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin 2t \cos 3t}{t}\,dt$

4) $\displaystyle\int_0^\infty t e^{-2t}\sin t\,dt$

5) $\displaystyle\int_0^\infty t^{1385} e^{-2t}\,dt$

6) $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^t \frac{t}{r} e^{4(t-r)} \sin 3r\,dr\,dt$

7) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t} t^2 \cos t\,dt$

8) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-5t}\sinh 3t\,dt$

9) $\int_0^\infty \frac{e^{-t}(1-\cos t)}{t}\,dt$

10) $\int_0^\infty \frac{1-\cos 2t}{2(1+t^2)}\,dt$

۷. هر یک از معادلات زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل نمایید.

1) $y'+y=1-tu_1(t) \qquad y(0)=0$

2) $y'(t)+y(t)=2\int_0^t y(r)\,dr$

3) $ty''-(2+t)y'+3y=t-1 \qquad y(0)=0$

4) $y^{(3)}+y'=\delta(t-1)+e^t \qquad y(0)=y'(0)=y''(0)=0$

5) $y''+2y'+y=\delta(t)+u_\pi(t) \qquad y(0)=1,\ y'(0)=0$

6) $ty''+(3t-1)y'-(4t+9)y=0 \qquad y(0)=0$

7) $y(t)+t=e^{t}\left(1+\int_{0}^{t}e^{-r}y(r)\,dr\right)$

8) $y^{(4)}+8y''+16y=0 \qquad y(0)=y'(0)=y''(0)=0 \qquad y^{(3)}(0)=1$

9) $y^{(4)}+2y''+y=e^{2t} \qquad y(0)=y'(0)=y''(0)=y^{(3)}(0)=0$

10) $y''-2y'+4y=8\sin t-4\cos t \qquad y(0)=0 \qquad y'(0)=8$

11) $y''+4y=\sin 2t-\sin(t-2\pi)u_{2\pi}(t) \qquad y(0)=y'(0)=0$

12) $y''-2y'+2y=\begin{cases}0 & 0\leq t<\pi/2\\ 1 & \pi/2\leq t<3\pi/2\\ 2 & t\geq 3\pi/2\end{cases} \qquad y(0)=y'(0)=0$

13) $y''+y=\sum_{k=1}^{\infty}\delta(t-2k\pi) \qquad y(0)=y'(0)=0$

14) $(t+2)y''(t)+(t+1)y'(t)-y(t)=0 \qquad y(0)=0 \quad y'(0)=2$

15) $y''(t)+y(t)=t(1-u_{2}(t)) \quad t\geq 0, \quad t(0)=t'(0)=0$