

جواب به صورت سری در مجاورت یک نقطه تکین متقلم (روش فروبیوس)

در این بخش به بررسی چگونگی حل یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب غیر ثابت

$$c_2(u)y'' + c_1(u)y' + c_0(u)y = 0 \quad (11) \quad \text{مانند}$$

در یک همسایگی محذوف حول نقطه تکین متقلم u_0 می‌پذیریم. یادگار می‌شویم که محذوف

لذات همسایگی محذوف حول نقطه u_0 ، مجموعه‌ای به شکل $0 < |u - u_0| < R$

است که در آن R یک عدد صحیح مثبت است. در واقع این مجموعه همان بازه

$(u_0 - R, u_0 + R)$ است که نقطه مرکزی آن یعنی u_0 حذف شده است.

لازم به ذکر است که اگر u_0 یک نقطه تکین متقلم از معادله دیفرانسیل (11) باشد، گاهی

توابع $\frac{c_1(u)}{c_2(u)}(u - u_0)$ و $\frac{c_0(u)}{c_2(u)}(u - u_0)^2$ دارای بسجلی سری توانی به شکل

$$(u-u_0) \frac{e_1(u)}{e_2(u)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (u-u_0)^n \quad |u-u_0| < R_1 \quad (2)$$

$$(u-u_0)^2 \frac{e_1(u)}{e_2(u)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (u-u_0)^n \quad |u-u_0| < R_2 \quad (3)$$

باستفاده از گویایی R_1 و R_2 می‌باشند. توابع e_1 و e_2 یک نقطه تکین معکوس

برابر معادله (۱) است، جواب این به طوری که در e_2 تعریف نمی‌شود. با این وجود،

اگر فرض کنیم که R کوچکترین معکوس R_1 و R_2 باشد، گویا معادله (۱) دارای در جواب

مستقل خطی در حسی است مفروض $|u-u_0| < R$ است. هدف اصلی ما

در این بخش یافتن این در جواب مستقل خطی است. قبل از بیان نتیجه‌های محاسبه

این جواب‌ها، تعریف زیر را می‌کاریم:

تعریف: فرض کنید α یک نقطه تکین متعلق به معادله دیرانتس (1) بوده و فرض کنید

$$A_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{e_1(x)}{e_2(x)}, \quad B_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 \frac{e_0(x)}{e_2(x)}$$

$$r^2 + (A_0 - 1)r + B_0 = 0$$

در این صورت معادله درجه دوم

معادله مشخص معادله دیرانتس (1) در نقطه α می باشد.

قضیه (جواب هایدنبارت یک نقطه تکین متعلق به فرض کنید α یک نقطه تکین متعلق

$$r^2 + (A_0 - 1)r + B_0 = 0$$

معادله دیرانتس (1) باشد. اگر معادله مشخص

دو ریشه حقیقی r_1 و r_2 باشد، آنگاه با فرض این که $r_1 \geq r_2$ ، پس از جواب می

معادله (1) به صورت زیر است:

$$y(x) = (x - x_0) \sum_{n=0}^{r_1} a_n (x - x_0)^n, \quad a_0 \neq 0 \quad (4)$$

و این جواب در همایون صورت $0 < |x - x_0| < R$ $R = \min\{R_1, R_2\}$

معتبر است. جواب مستقل فرض دیر معادله، یعنی $y_2(x)$ ، در همایون صورت

$R < |u - u_0| < \infty$ ، بفتح به حالت حال زیر تعیین می شود:

الف) اگر $r_1, r_2 \notin \mathbb{Z}$ ، $r_1 \neq r_2$

$$g_2(u) = (u - u_0) \sum_{n=0}^{\infty} b_n (u - u_0)^n, \quad b_0 \neq 0 \quad (5)$$

ب) اگر $r_1 = r_2$ ، $r_1 \notin \mathbb{Z}$

$$g_2(u) = g_1(u) \ln(u - u_0) + (u - u_0) \sum_{n=0}^{\infty} b_n (u - u_0)^n, \quad b_0 \neq 0 \quad (6)$$

ج) اگر $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ ، $r_1 \neq r_2$

$$g_2(u) = K g_1(u) \ln(u - u_0) + (u - u_0) \sum_{n=0}^{\infty} b_n (u - u_0)^n, \quad b_0 \neq 0 \quad (7)$$

که در آن K مقدار ثابت بوده و K می تواند برابر یا منفی باشد.

تصویر

۱- همانند حالت نگاه اعماری، مندریب سری مگر جواب بالا را می توان با جایگذاری مستقیم سری های
جواب در معادله (۱) به دست آورد.

۲- به هر حال معادله (۱) در محاورات متعلقه تین مستقل θ ، باید ابتدا سری (۴) را به دست
آورد.

۳- سری های به شکل (۴) را سری فرونیوس نامیده و روش یافتن چنین جواب هایی برای
معادله دینفرانشل را روش فرونیوس می نامند.

۴- جواب دوم را می توان از سری های (۵)، (۶) و (۷) محاسبه کرد.

۵- راه دیگر به دست آوردن جواب مستقل خطی دوم استفاده از روش مکس مرتبه
است.

مسئله 1. جواب عمومی معادله دیفرانسیل (1) $2x^2 y'' + (x - x^2) y' - y = 0$

که در معادله نقطه $x_0 = 0$ به دست می آید.

فرض داریم $e_2(0) = 0$ ، $e_0(u) = -1$ ، $e_1(u) = x - x^2$ ، $e_2(u) = 2x^2$ چون

بنابراین نقطه $x_0 = 0$ یک نقطه تکین معادله است. چون

$$(x - x_0) \frac{e_1(u)}{e_2(u)} = x \frac{x - x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \quad (2)$$

$$(x - x_0)^2 \frac{e_0(u)}{e_2(u)} = x^2 \frac{-1}{2x^2} = -\frac{1}{2} \quad (3)$$

و این توابع در نقطه $x_0 = 0$ تحلیل اند. بنابراین این نقطه یک نقطه تکین متفلسف معادله است.

$R_1 = R_2 = \infty$ ، (چون 2، 3 همه جا تحلیل اند).

$$B_0 = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad A_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$$

و داریم

محسین از نگاه

سپر معادله شش ضلع در نقطه $x_0 = 0$ عبارت است از $r^2 + (\frac{1}{2} - 1)r - \frac{1}{2} = 0$

یعنی $2r^2 - r - 1 = 0$ که ریشه های آن عبارتند از $r_1 = 1$ و $r_2 = -\frac{1}{2}$

بنابراین هر 355، یک جواب هر معادله دیفرانسیل دارد شده به صورت

$$y_1(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^{n+1}$$

$$\hookrightarrow y_1(u) = u \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$$

است و چون $r_1 - r_2 = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$ ، بنابراین طبق حالت اول مقصود، جواب

$$y_2(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^{n-1/2} \quad \hookrightarrow \quad y_2(u) = u^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n$$

مستقل از هم و معادله نیز به شکل

$$R = \min\{R_1, R_2\} = \infty \quad , \quad R_1 = R_2 = \infty$$

چون باشد. همانگونه که دیدیم

سری $y_1(u)$ به ازای هر u همگرا است. در همین حال، سری $y_2(u)$ در $u=0$

تعریف نشده و بنابراین مقصود در بازه مفروضه $0 < |u| < \infty$ تعریف شده است.

حال به معادله ضرایب در جواب $y_1(u)$ و $y_2(u)$ می پردازیم. ابتدا a_n ها را به دست می آوریم، داریم:

$$y_1(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^{n+1}$$

$$y_1'(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n u^n$$

$$y_1''(u) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_n u^{n-1}$$

حال خارج کردن این توانج در معادله (۱) داریم:

$$2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) e_n x^{n-1} + (u-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) e_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} e_n x^{n+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2n(n+1) e_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) e_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) e_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} e_n x^{n+1} = 0$$

اکنون به بیان ساز توان ها می پردازیم. به این منظور، اندیس مجموع را در سری سوم به انداز ۱ +

انتقال می دهیم، یعنی:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2n(n+1) e_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) e_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} n e_{n-1} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} e_n x^{n+1} = 0$$

سپس به بیان کردن نقاط شروع، عملیات ۰-ام را در سری ها اول، دوم و چهارم کرده

به دست می آوریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n(n+1) e_n x^{n+1} + e_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) e_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} n e_{n-1} x^{n+1} - e_0 x - \sum_{n=1}^{\infty} e_n x^{n+1} = 0$$

حال به این جهت که تمام سری ها در نقطه شروع و توان بیان هست، می توان که با یکدیگر جمع کرد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [2n(n+1)a_n + (n+1)a_n - na_{n-1} - a_n] x^{n+1} = 0$$

ولنگنجا:

$$[2n(n+1)a_n + (n+1)a_n - na_{n-1} - a_n] = 0 \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$a_n = \frac{na_{n-1}}{2n(n+1) + (n+1) - 1} = \frac{1}{2n+3} a_{n-1} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

نه از اینجا داریم:

$$n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{5} a_0$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{7} a_1 = \frac{1}{5 \cdot 7} a_0$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{9} a_2 = \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} a_0$$

و بنابراین

$$a_n = \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (2n+3)} a_0 \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$a_0 = 1, \text{ حول اول معادله در معادله نقله } a_0 = 0$$

حال پالنتها

$$y_1(x) = x \left(1 + \frac{x}{5} + \frac{x^3}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{x^n}{5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+3)} + \dots \right)$$

$$= x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (2n+3)} x^n \right]$$

پس به محاسبه ضرایب b_n در جواب $y_2(x)$ می پردازیم. همانگونه که گفته شد، این جواب
در بازه معزوف $-\infty < x < \infty$ ، یعنی به ازای $x > 0$ یا $x < 0$ معتبر است. بدون کسین
کنشیت ساده، فرض می کنیم $x > 0$ (برای $x < 0$ ، با تغییر متغیر $t = -x$ می توان جواب
معادله حاصل را به دست آورد) بنابراین داریم:

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-\frac{1}{2}}$$

$$y_2'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \frac{1}{2}) b_n x^{n-\frac{3}{2}}$$

و لذا کجا

$$y_2''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) b_n x^{n-\frac{5}{2}}$$

اینکه در نهایت این توانج در معادله (۱) به دست می آوریم:

$$2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) b_n x^{n-\frac{5}{2}} + (x - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n - \frac{1}{2}) b_n x^{n-\frac{3}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-\frac{1}{2}} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n-\frac{1}{3})(n-\frac{3}{2})b_n x^{n-\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} (n-\frac{1}{2})b_n x^{n-\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} -(n-\frac{1}{2})b_n x^{n+\frac{1}{2}}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} -b_n x^{n-\frac{1}{2}} = 0$$

حال اگر در شذرات قبل به بیان سازتار تان ها ولند بر جا ببر داریم، به دست می آوریم:

$$\left(2 \cdot \frac{3}{4} b_0 - \frac{1}{2} b_0 - b_0\right) x^{-\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[2(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})b_n + (n-\frac{1}{2})b_n - (n-\frac{3}{2})b_{n-1} - b_n\right] x^{n-\frac{1}{2}} = 0$$

نه لذتجا به دست می آید:

$$2(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})b_n + (n-\frac{1}{2})b_n - (n-\frac{3}{2})b_{n-1} - b_n = 0 \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{(n-\frac{3}{2})b_{n-1}}{2(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2}) + (n-\frac{1}{2}) - 1} = \frac{1}{2n} b_{n-1} \quad n=1, 2, \dots$$

$$n=1 \Rightarrow b_1 = \frac{1}{2} b_0$$

$$n=2 \Rightarrow b_2 = \frac{1}{2 \cdot 2} b_1 = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2} b_0$$

$$n=3 \Rightarrow b_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} b_2 = \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{1}{2^2 \cdot 2} b_0 = \frac{1}{2^3 \cdot 3!} b_0$$

$$b_n = \frac{1}{2^n \cdot n!} b_0 \quad n=1, 2, \dots$$

نبا بر این با انتخاب $b_0 = 1$ جواب دوم خنجر است:

$$y_2(x) = x^{-1/2} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} + \dots + \frac{x^n}{2^n \cdot n!} + \dots \right)$$

$$= x^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!} = x^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2} \right)^n$$

نبا بر این جواب برای $0 < x < \infty$ خنجر است.

$$y_2(x) = x^{-1/2} e^{x/2}$$

حال چون دو جواب مستقل خطی معادله دیفرانسیل مشخص شد، بنابرین جواب

عمومی عبارت است که

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

$$y = c_1 x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+3)} x^n \right] + c_2 x^{-1/2} e^{x/2}$$

بیانیه $0 < x < \infty$

مسئله 2. معادله دیفرانسیل (1) $4xy'' + 2y' + y = 0$ درجه دوم

نقطه $x_0 = 0$ حل خاص

حل: داریم $\frac{e_1(x)}{e_2(x)} = \frac{1}{2x}$ و $\frac{e_0(x)}{e_2(x)} = \frac{1}{4x}$ چون

مفروضه که جواب نهایی $x_0 = 0$ برابر با صفر است، بنابراین $x_0 = 0$ یک نقطه تکین معادله است.

حقیقت این است که

$$(x - x_0) \frac{e_1(x)}{e_2(x)} = x \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$(x - x_0)^2 \frac{e_0(x)}{e_2(x)} = x^2 \frac{1}{4x} = \frac{1}{4} x \quad (3)$$

و این توابع در نقطه $x_0 = 0$ تحلیل می‌شوند، بنابراین این نقطه یک نقطه تکین معادله

است و چون توابع (2) و (3) همه جا تحلیل می‌شوند پس $R_1 = R_2 = \infty$.

الآن داریم:

$$A_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad B_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} x = 0$$

پس معادله شیف در نقطه $x_0 = 0$ عبارت است از $r^2 + (\frac{1}{2} - 1)r + 0 = 0$

دفعی $r^2 - \frac{1}{2}r = 0$ که ریشه‌های آن عبارتند از $r_1 = \frac{1}{2}$ و $r_2 = 0$.

بنابراین مطابق قضیه 355، می‌توان جواب هم معادله دینفرانسیل را به شکل عبارت نوشت:

$$y_1(u) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n u^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{و} \quad y_2(u) = u^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e_n u^n$$

اما چون $r_1 - r_2 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ ، بنابراین مطابق حالت اول قضیه، جواب

مستقل قضیه دوم معادله نیز به شکل

$$y_2(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n \quad \text{و} \quad y_1(u) = u^0 \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n$$

می‌باشد. حال به متغیرهای جدید $y_1(u)$ و $y_2(u)$ می‌پردازیم.

ابتدا e_n ها را بدست می‌آوریم. داریم:

$$y_1(u) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n u^{n+\frac{1}{2}}$$

$$y_1'(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\frac{1}{2}) e_n u^{n-\frac{1}{2}}$$

$$y_1''(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2}) e_n u^{n-\frac{3}{2}}$$

که با فکر دادن در معادله (۱) داریم:

$$4\kappa \sum_{n=0}^{\infty} (n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2}) a_n \kappa^{n-\frac{3}{2}} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+\frac{1}{2}) a_n \kappa^{n-\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \kappa^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

۲

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2}) a_n \kappa^{n-\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+\frac{1}{2}) a_n \kappa^{n-\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \kappa^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

الگن به بیان ساز تقارن ها می پردازیم. به این منظور اندیس مجموع را در سری سوم به اندازده ۱-

تقارن می دهیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2}) a_n \kappa^{n-\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+\frac{1}{2}) a_n \kappa^{n-\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \kappa^{n-\frac{1}{2}} = 0$$

سپس به بیان کردن نقاط شروع، عملیات ۰-ام را اندیس های اول و دوم خارج کرده،

به دست می آوریم:

$$-a_0 \kappa^{\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} 4(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2}) a_n \kappa^{n-\frac{1}{2}} + a_0 \kappa^{\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+\frac{1}{2}) a_n \kappa^{n-\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \kappa^{n-\frac{1}{2}} = 0$$

حال که نتایج به دست آمده برای شرایط شروع و پایان بسیار جفتند، می توان اینها را با یکدیگر جمع کرد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[4\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right) + 2\left(n+\frac{1}{2}\right)e_n + e_{n-1} \right] x^{n-\frac{1}{2}} = 0$$

$n=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(2n+1)(2n)e_n + e_{n-1} \right] x^{n-\frac{1}{2}} = 0$$

$n=1$

$$\left[(2n+1)(2n)e_n + e_{n-1} \right] = 0, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

بنابراین

$$e_n = -\frac{1}{(2n)(2n+1)} e_{n-1}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

و از آنجا

$$n=1 \Rightarrow e_1 = -\frac{1}{2 \times 3} e_0 \Rightarrow e_1 = (-1)^1 \frac{1}{3!} e_0$$

به شکل داریم:

$$n=2 \Rightarrow e_2 = -\frac{1}{4 \times 5} e_1 = +\frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5} e_0 \Rightarrow e_2 = (-1)^2 \frac{1}{5!} e_0$$

$$n=3 \Rightarrow e_3 = -\frac{1}{6 \times 7} e_2 = -\frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7} e_0 \Rightarrow e_3 = (-1)^3 \frac{1}{7!} e_0$$

به صورت کلی

$$e_n = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} e_0$$

انتخاب با انتساب $e_0 = 1$ ، جواب اول معادله در مجاورت نقطه $x_0 = 0$

به صورت زیر بدست می آید:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{n+\frac{1}{2}}$$

سپس به معادله ضرایب b_n در جواب $y_2(x)$ می پردازیم:

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$y_2'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1}$$

$$y_2''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2}$$

که با قرار دادن آن‌ها در معادله داریم:

$$4x \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0$$

۶:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4n(n-1)b_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2nb_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0$$

الآن به بیان ساده تر توان ها را بدو دسته کنیم، به این منظور، اندیس مجموع را در سری دوم به انداز ۱- انتقال می دهیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4n(n-1)b_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2nb_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1} = 0$$

سپس به بیان دیگر ازین نقاط شروع، عملیات ۰ ام را که در سری ها اول و دوم خارج می کنیم:

$$0 + \sum_{n=1}^{\infty} 4n(n-1)b_n x^{n-1} + 0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2nb_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1} = 0$$

حال می توان سری ها را با یکدیگر جمع کرد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [4n(n-1)b_n + 2nb_n + b_{n-1}] x^{n-1} = 0$$

$$4n(n-1)b_n + 2nb_n + b_{n-1} = 0 \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = -\frac{1}{2n(2n-1)} b_{n-1} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$n=1 \Rightarrow b_1 = -\frac{1}{2 \times 1} b_0$$

بنابراین

$$n=2 \Rightarrow b_2 = -\frac{1}{4 \times 3} b_1 = \frac{1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} b_0$$

$$n=3 \Rightarrow b_3 = -\frac{1}{6 \times 5} \frac{b_2}{2} = -\frac{1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} b_0$$

$$b_n = (-1)^n \frac{1}{(2n)!} b_0$$

و به طوری:

حال با انتخاب $b_0 = 1$ ، جواب درم معادله به صورت زیر به دست می آید:

$$y_2(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n$$

همچنین می توان عبارت زیر را نیز نوشت:

$$y(u) = C_1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{n+\frac{1}{2}} \right) + C_2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n \right)$$

مثال 3. نشان دهید که $x_0 = 0$ یک نقطه تکین متعلق برای معادله دفرانسیل

$$2x^2 y'' + 3xy' - (1+x)y = 0$$

است، پس جواب متعلق به بارش نقطه معادله مشخص را بیابید.

حل: در این معادله

$$\frac{e_1(x)}{e_2(x)} = \frac{3x}{2x^2} = \frac{3}{2x}, \quad \frac{e_0(x)}{e_2(x)} = \frac{-(1+x)}{2x^2}$$

که چون این کسرها در $x_0 = 0$ تحلیل نیستند، بنابراین، این نقطه یک نقطه تکین است.

اما چون توانج

$$(x-x_0) \frac{e_1(x)}{e_2(x)} = x \frac{3}{2x} = \frac{3}{2}$$

$$(x-x_0)^2 \frac{e_0(x)}{e_2(x)} = x^2 \frac{-(1+x)}{2x^2} = -\frac{1+x}{2}$$

حدود $x_0 = 0$ تحلیل کنید، بهترین نقطه تکین متعلق است. اکنون داریم

$$B_0 = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1+x}{2} = -\frac{1}{2}, \quad A_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$r^2 - \left(\frac{3}{2} - 1\right)r - \frac{1}{2} = 0$$

بنابراین معادله مشخص عبارت است از

نه دلايلي رشته ها $r_1 = \frac{1}{2}$ و $r_2 = -1$ است. حال آنكه $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$

بنابرين جواب درم معادله نه متفاوت از رشته كوچكتر است عبارتست از: $y_2(u) = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

يعني: $y_2(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1}$. اکنون به تعيين ضرايب b_n مي پردازيم.

$$y_2'(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)b_n x^{n-2}$$

$$y_2''(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (n-2)(n-1)b_n x^{n-3}$$

اينها را در معادله به دست مي آوريم:

$$2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n-2)(n-1)b_n x^{n-3} + 3x \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)b_n x^{n-2} - (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n-2)(n-1)b_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n-1)b_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0$$

اکنون به بيان مساوي توان ها مي پردازيم، بزرگترين مقوليه مثبت اندیس مجموع را در نظر مي گيريم و به اينگونه

۱- انتقال دهم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n-2)(n-1)b_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n-1)b_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^{n-1} = 0$$

سپه برابر بیان سایر نقاط شروع، عملیات ۰-ام سری ما/اول، درم و سوم بلا خارج می‌کنیم:

$$4b_0 x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n-2)(n-1)b_n x^{n-1} + (-3)b_0 x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 3(n-1)b_n x^{n-1} + (-1)b_0 x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} -b_{n-1} x^{n-1}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^{n-1} = 0$$

آنچه در یک سری ما را با سایر جمع نموده:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [2(n-2)(n-1)b_n + 3(n-1)b_n - b_n - b_{n-1}] x^{n-1} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n(2n-3)b_n - b_{n-1}] x^{n-1} = 0$$

$$n(2n-3)b_n - b_{n-1} = 0, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

سپه ۰:

$$b_n = \frac{1}{n(2n-3)} b_{n-1}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

نه از اینجا:

$$n=1 \Rightarrow b_1 = \frac{1}{1 \times (-1)} b_0 = \frac{-1}{1} b_0 = \frac{-2^0}{1 \times 0!} b_0$$

بالنسبة:

$$n=2 \Rightarrow b_2 = \frac{1}{2 \times 1} b_1 = \frac{-1}{1 \times 2} b_0 = \frac{-2^1}{2 \times 2!} b_0$$

$$n=3 \Rightarrow b_3 = \frac{1}{3 \times 3} b_2 = \frac{-1}{1 \times 2 \times 3 \times 3} b_0 = \frac{-2^2}{3 \times 4!} b_0$$

$$n=4 \Rightarrow b_4 = \frac{1}{4 \times 5} b_3 = \frac{-1}{1 \times 2 \times 3 \times 3 \times 4 \times 5} b_0 = \frac{-2^3}{4 \times 6!} b_0$$

وبالتالي:

$$b_n = \frac{-2^{n-1}}{n(2n-2)!} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

بما أن $b_0 = 1$ بما أن $b_0 = 1$

$$y_2(x) = x^{-1} \left(1 - \frac{2^0}{1 \times 0!} x - \frac{2^1}{2 \times 2!} x^2 + \dots + \frac{2^{n-1}}{n(2n-2)!} x^n - \dots \right)$$

لغرض:

$$y_2(x) = x^{-1} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n(2n-2)!} x^n \right)$$